4° Math. u. 113

<36622055840019

S

<36622055840019

Bayer. Staatsbibliothek

Math Un. 113

Mathesis. Arithmetica. Systemata & methodi.

203.

Deutliche und vollständige

Vorlesungen

über die

Rechenkunst

und

Geometrie

Zum Gebrauche derjenigen, welche sich in diesen Wissenschaften durch eigenen Fleiß üben wollen,
ausgefertiget

von

Joh. Andreas von Segner

Sr. Königl. Preußischen Maj. Geh. Rath, ersten Lehrer der Mathematik und Naturlehre bey der Königl. Friedrichs Universität zu Halle, Mitgliede der Kaiserlichen Academie zu Petersburg, der Königl. Societät zu London und der Königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin.

Zweyte verbesserte Auflage.

LEMGO

in der Meyerschen Buchhandlung

1767.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Sr. Hochreichsgräfl. Erlauchten

des H. Röm. Reichs Grafen und Herrn

HERRN

Wilhelm I.

Regierenden Grafen zu Schaumburg, Grafen und Edlen Herrn zur Lippe und Sternberg, Ritter des Königlichen Preußischen großen Ordens vom schwarzen Adler, Generalissimus der Armeen Sr. Allergetreuesten Majestät des Königes von Portugal und Algarbien, wie auch Generalfeldmarschall der Armeen Sr. Königl. Majestät von Großbritannien und Thurfürstl. Durchlaucht zu Braunschweig und Lüneburg ꝛc.

Meinem Gnädigen Grafen und Herrn.

Inhalt.

Erlauchter Reichsgraf,

Gnädiger Graf und Herr.

Bey dem Vorhaben, meinem zur Ausbreitung nützlicher Erkäntniß bestimten Buche, durch die Zueignung an eine Person von erhabenen Würden und Verdiensten, mehrern Eingang zu verschaffen, müste Ew. Hochreichsgräfl.

gräfl. Erlauchten großer Name sich vorzüglich darstellen; nachdem derselbe, vornemlich in dem letzten Kriege, der Welt durch Heldenthaten bekant worden ist, welche den Sieg der gerechten Sache auf mehr als eine Art befördert haben: mir aber durch die außerordentliche Gnade, mit welcher Ew. Erlauchten, zu ganz besonderer Aufmunterung der Gelehrsamkeit, das Andenken eines als öffentlichen Lehrer mir nahe verwanten Mannes zu beehren geruhet haben, sich von neuen auf das lebhafteste eingedrücket hat.

Ew. Hochreichsgräfl. Erlauchten sind ein vollkommener Kenner der Wissenschaften, insbesondere derjenigen, deren erste Gründe das gegenwär-

wärtige Buch denen beybringen soll, welche keine Gelegenheit haben sich des mündlichen Unterrichts zu bedienen: und urtheilen auf das richtigste von ihrem wahren Nutzen, welcher nicht sowol darin bestehet, daß sie vielen Bedürfnissen des Lebens abhelfen, und zur Bequemlichkeit desselben ein großes beytragen; sondern vielmehr in der Aufklärung des Verstandes zu suchen ist, und in demjenigen, was **Ew. Erlauchten** Selbst auf einer gewissen Medaille, in einer andern Sprache, **eine gesunde Seele** nennen. Dieses muß einer jeden Arbeit, welche **Höchstdieselben** eines gnädigen Beyfals würdigen, insbesondere aber denen, die von der Art der meinigen sind, bey allen, die nach Gründen urtheilen, einen besondern Werth beylegen.

So schmeichelhaft aber auch diese Vorstellung vor andern seyn mag, welche das Recht haben, sich etwas zuzutrauen: so würde doch die Erkäntniß meiner eigenen Schwäche mich immer abgehalten haben, **Höchstdero** erleuchteten Einsicht mein Buch vorzulegen, wenn mir nicht bekant wäre, wie sehr **Ew. Hochreichsgräfl. Erlauchten** sich über die gemeine Art zu denken auch dadurch erheben, daß **Höchstdieselben** Selbst beschäftiget sind, der glücklichen Jugend, welche unter **Dero** väterlichen Regierung heranwächst, zur Erlernung der mathematischen Wissenschaften allen möglichen Vorschub zu thun. Ich kan bey so gestalten Sachen hoffen, daß **Ew. Erlauchten**, in Ansehung des Zwecks, eine Ausführung, welche

dem-

demselben vielleicht nicht überall angemessen ist, auf das Huldreichste entschuldigen werden.

Vornemlich aber erwarte ich die gnädige Aufnahme meiner unterthänigen Zuschrift von Ew. Erlauchten allgemeinen Menschenliebe, von welcher selbst diejenigen Völker, nun nahen und entfernten Westen, die wir vor kurzem noch Feinde nanten, Beyspiele zu erzählen wissen. Denn es wird nicht wenig zu meiner Glückseligkeit beytragen, wenn ich vernehme, daß Ew. Erlauchten diese öffentliche Darlegung meiner unterthänigen Verehrung nicht ganz gleichgültig gewesen sey. Die Versicherung aber, mir dadurch einigen Antheil an der Gnade eines Herrn erworben zu haben, bey welchem der erhabenste Rang den geringsten Theil sei-

seiner Vorzüge ausmacht, würde diese Glückselig-
keit zu einem Grade erheben, welcher meine Wün-
sche völlig befriedigte.

Der Höchste erhalte **Ew. Erlauchten** bis
auf die späteste Zeiten, und lasse sein Bild, wel-
ches **Höchstdieselben** als ein Regente tragen, noch
lange mit vorzüglicher Pracht glänzen. Ich werde
nie aufhören diese Wünsche zu thun, und mit der
vollkommensten Unterwerfung verharren

Ew. Hochreichsgräfl. Erlauchten

Halle, den 6 April
1767.

Unterthäniger Diener.
J. A. v. Segner.

Vorrede

zu dieser zweyten Auflage.

In der Vorrede zur ersten Auflage werden die Gründe, welche mich zur Ausfertigung dieser Vorlesungen bewogen haben, samt der Absicht derselben, hinlänglich angezeigt. Diese war keine andere, als denenjenigen, welche sich durch eigenen Fleiß zu einer

ner gründlichen Erkäntnis in der Mathematik den Weg öf=nen wollen, ein Buch in die Hand zu geben, welches sie zu diesen Zweck führen kan: und ich habe in den Jahren, wel=che seit dieser Ausgabe verflossen sind, mit Vergnügen ver=nommen, daß diese Absicht bey verschiedenen würklich errei=chet worden sey. Ich unterstehe mich dieses Vergnügen zu erweitern, indem ich von denen, die mir von dieser Seite bekant worden sind, auf mehrere schließe. Denn warum sol=te ich bemühet seyn den Lohn meiner Arbeit, welcher vornem=lich in diesem Vergnügen bestehet, selbst zu schmälern; zuma=len da eben dasselbe eine Triebfeder abgeben konte, bey der Verbesserung des Werks zu einer zweyten Auflage, desto würksamer zu seyn?

Der lange Aufschub dieser Auflage, dessen betrübte Ur=sache der Krieg gewesen, hat mir dazu Zeit genug gelassen; und ich habe diese Zeit, so weit es meine übrige Arbeiten zu=lassen wolten, nach Vermögen gebraucht. Indessen habe ich die eigentliche Absicht des Buches nie aus den Augen gesetzt; und bin nur bemühet gewesen, dieselbe auf einen etwas beque=

mern Weg zu erreichen. Es ist also nichts zu dem vorigen hinzu gekommen, als was nach meinem Urtheil zu diesem Zweck dienen konte: und diese Zusätze bestehen nicht in neuen Abhandlungen, sondern in einzelnen Sätzen und Anmerkungen, welche an vielen Orten eingeschaltet und mit den übrigen verbunden worden sind. Ich bin bemühet gewesen die Schreibart fließender zu machen: verschiedene Beweise habe ich abgekürzt, oder eine weitläuftige Erläuterung mit einer kürzern verwechselt. Insonderheit habe ich mir angelegen seyn lassen, die Fehler zu entdecken und zu verbessern, welche gleich Anfangs gänzlich zu vermeiden, meine Kräfte nicht zulangen wolten: und Sorge getragen, daß bey wichtigen und mühsamen Stellen der Druck gut ausfallen möchte. Die Geschicklichkeit und der Fleiß des Hrn. Verlegers, welcher die Mathematik selbst kennet und liebet, haben das übrige ersetzt: und ich habe in dem mir zugesendeten Abdrucke, welcher den

gröſten Theil des Werks ausmachet, gar wenige, und nur solche Druckfehler bemerket, die einen achtsamen Leser nicht aufhalten werden: woraus leicht auf das annoch rückständige zu schlieſsen ist.

Ich hoffe nicht, daß so beträchtliche Verbesserungen jemanden bewegen werden sich zu beschweren, daß dadurch die vorige Auflage allzuviel an ihrem innern Werthe verliere. Bücher, aus welchen man die Anfangsgründe einer Wissenschaft erlernet, und die man zu dem Ende vom Anfange bis zum Ende durchlieset, sind niemals zu theuer, und bezahlen, wenn sie sonst gut sind, den geringen Aufwand, welchen sie erfordern, immer mit starkem Wucher. Ich wünsche, daß dieses der Fall bey mir und meinem Leser seyn möge: welches die aufrichtige Begierde, mich demselben nützlich zu machen, noch ferner, so lange ich lebe, unterhalten wird. Halle den 20 Jenner 1767.

Vorrede

zur ersten Auflage.

Der Zweck bey der Ausfertigung des gegenwärtigen Buches war, denenjenigen, welche sich die Anfangsgründe der Mathematik durch eigenen Fleiß, oder unter der Anführung eines Lehrmeisters, der selbst nicht allzuweit in denselben gekommen ist, bekant machen wollen, dazu beförderlich zu seyn: andern aber die Wiederhohlung des mündlichen Vortrags zu erleichtern, und denselben, wo es nöthig ist, zu ergänzen. Man hat sich zu dem Ende einer an einander hangenden, deutlichen, weitläuftigen und ungezwungenen Schreibart bedienet: und da man sich den Leser als neu

in

in dieser Wissenschaft, und der geometrischen Schlüsse ungewohnt, vorstellen müssen; so ist man, sonderlich im Anfange, beflissen gewesen, die meisten Dinge von mehr als einer Seite vorzustellen, und durch verschiedene, aus verschiedenen Quellen hergehohlete Beweise, recht verständlich zu machen. Doch hat man sich dabey gehütet, den Zusammenhang der Sätze zu unterbrechen, und die Kette der Schlüsse, welche vom Anfange an durch das ganze Buch reichet, zu zerreissen. Selbst die Erklärungen der Wörter sind hievon nicht ausgenommen; welche nicht ehe angebracht worden sind, als nachdem man, als bereits bekant, voraus setzen konte, daß dasjenige, so das Wort bedeuten soll, möglich sey, und nichts widersprechendes enthalte.

So angenehm diese Art des Vortrages einem Anfänger hoffentlich seyn wird; so würde sie doch endlich eckelhaft geworden seyn, wenn man sie durch das ganze Buch in eben der Weitläuftigkeit hätte fortführen wollen. Man ist also auch darinnen der Lehrart gefolget, der man sich bey dem gewöhnlichen mündlichen Vortrage zu bedienen pfleget, daß man sich desto mehr zur Kürze gelenket hat, je weiter man in der Abhandlung gekommen ist: und man hat der Einsicht des Lesers desto mehr zugetrauet, je geübter man sich denselben vorstellen müssen. Es ist würklich ein großer Theil dieses Buches zu Papier gebracht worden, nachdem man einem jungen von Adel den Inhalt desselben nach und nach erkläret hatte: und man hat dessen Einsicht zum Maas der Deutlichkeit und der Weitläuftigkeit oder Kürze angenommen, der man sich zu befleißigen hatte. Dieses ist die Ursache, warum es den Namen der Vorlesungen bekommen hat.

Ueberhaupt sind alle Beweise zu der größesten Kürze und Einfalt gebracht worden, die man erreichen konte; und man

hat

hat sich dabey keine Mühe verdrießen lassen. Es ist aber diese Kürze aus der Menge der Begriffe und Schlüsse, welche in einem Beweise vorkommen, und keinesweges aus der Menge der Zeilen zu ermessen, in welchen er vorgetragen wird. Diese Kürze zu erhalten hat man hier und da von den gebahnten Straßen abweichen, und solche Wege gehen müssen, welche selten, und zum Theil vielleicht niemals, betreten worden sind. Auch hat man sich kein Bedenken gemacht, Grundsätze anzunehmen, welche eben vor den Büchern des Euklides nicht stehen. Doch sind es wahre Grundsätze, und werden zum Theile selbst von dem Euklides gebraucht, ob sie zwar den übrigen Grundsätzen desselben nicht ausdrücklich beygefüget sind: zum Theile aber werden sie von verschiedenen neuern Geometren angenommen, oder verdienen wenigstens, daß sie angenommen werden. Man rechnet hierunter keines weges den Leibnitzischen Satz des zureichenden Grundes, und einige andere dieser Art. Denn ob sie wol in den Nebenbeweisen und zur Erläuterung gebrauchet werden: so kommen sie doch keines weges mit in die Hauptkette der Schlüsse; und es wäre in meinen Augen ein Fehler, wenn man sie würklich unter die Grundsätze der Geometrie rechnen wolte; als wozu es ihnen an der nöthigen Deutlichkeit mangelt. Man hat aber die Grundsätze selten von den übrigen abgesondert, sondern sie gröstentheils erst alsdenn angebracht, wenn sie anzuwenden waren: weil man bemerket, daß die Anfänger sich öfters, ich weiß nicht was, vor Schwürigkeiten bey denselben vorstellen, wenn sie von ihnen, außer dem Zusammenhange mit dem übrigen, erblicket werden.

Sonst hat man die nöthige Strenge bey den Beweisen überall beyzubehalten getrachtet, und ist bemühet gewesen, sich

in der Art zu schließen den griechischen Urbildern eben so sehr zu nähern, als weit man in der Schreibart sich von denselben entfernete; ob zwar die Absicht war, diese Vorlesungen also einzurichten, daß sie auch Kindern vorgeleget werden könten. Denn es ist niemand deswegen mit Wind zu speisen, weil er einen schwachen Mangen hat; und man muß sich überdieses hüten von der Fähigkeit der Kinder aus der Fähigkeit derjenigen zu urtheilen, welche durch die gemeine grammaticalische Uebungen angewöhnet worden sind, den grösten Theil ihrer Zeit, an bloße Töne zu gedenken; welche in der Oratorie der Schulen nichts anders gelernet haben, als eine Menge klingender Wörter ohne Verstand zusammen zu fügen; bey welchen die natürliche Kraft zu schließen durch eine übel ausgesonnene Logik, in Unordnung gebracht ist; und die durch eine verworrene Metaphysik außer den Stand gesetzet sind, die Schaalen von dem Kerne zu unterscheiden. Man führe ein Kind von acht bis zwölf Jahren ordentlich und bedächtlich in die Geometrie, so wird man Ursache genug finden, sich über dessen Einsicht zu verwundern. Es kan aber diese so unumgänglich nothwendige Ordnung bey unvollkommenen Beweisen nicht bestehen.

Es wäre zu weitläuftig, wenn man durch die Anführung besonderer Stellen eine Probe davon geben wolte, wie man alles dieses zu erreichen getrachtet hat. Ein Leser, so die Geometrie verstehet, wird, vermittelst des dem Werke beygefügten Inhaltes, die Materien leicht finden können, von welcher er insonderheit begierig ist zu wissen, auf was Art sie vorgetragen worden sind. Eben dieser Inhalt kan den ganzen Zusammenhang der Theile, und die Ordnung, welcher man gefolget ist, in einem Blicke, vorstellen; insonderheit wenn auch die Zeichnungen zu

Hülfe genommen werden, bey welchen man sich der Ordnung nicht weniger, als bey dem Texte, beflissen hat.

Man schmeichelt sich mit der Hofnung, es werde bey diesem Durchblättern das Urtheil dahin ausfallen, daß wir alles so von der Rechenkunst und derjenigen Geometrie, welche außer dem Cirkelkreise sich auf keine andere krumme Linie gründet, hauptsächlich zu wissen nöthig ist, in diese Vorlesungen zu bringen bemühet gewesen sind, und daß also dieselben in so ferne vollständig genennet werden können. Indessen ist man gar nicht gemeinet, junge Gemüther durch dieselbe, von Lesung der Bücher des Euklides und anderer scharfsinniger Männer, abzubringen. Man will sie vielmehr in den Stand setzen, diese Schriften mit Nutzen durchzugehen, und dadurch die Einsicht, welche sie vermittelst unserer Beyhülfe erhalten haben, zu erweitern, und je mehr und mehr in Ordnung zu bringen. Aufgeweckte Gemüther werden dieses auch ohne unserm Rath thun, und die gegenwärtigen Vorlesungen eben sowol bey Seite legen, nachdem sie dieselben ein oder zweymal durchgegangen sind, als man aufhöret sich der mündlichen Anweisung zu bedienen, nachdem man durch dieselbe in den Stand gesetzt worden ist, sich selbst weiter fort zu helfen. Zumalen da, bey dem weitläuftigen und zusammenhängenden Vortrage, dessen man sich bedienet hat, die Sätze selbst zum öftern unter dem übrigen gar sehr verstecket sind, welches dem Gedächtnisse eine schlechte Beyhülfe giebet, und selbst das Nachschlagen etwas schwer machet. Denn man muß meistentheils mehr als einen Absatz lesen, ehe man einen Satz und dessen Beweis recht deutlich einsiehet. Es ist aber selten möglich ein Ding zu unterschiedenem Gebrauche gleich bequem zu machen; und man muß von einem Buche keinen andern

Nutzen verlangen, als denjenigen, zu welchem es eigentlich bestimmet ist.

Es ist kaum möglich bey einem so langweiligen Vortrage alle Fehler in den Schlüssen und in dem Gebrauche der Wörter gänzlich zu vermeiden, und gar nichts zu verschreiben. Man hat zwar auch in diesem Stücke allen Fleiß angewendet, welchen zu gebrauchen die Zeit erlauben wolte. Doch ist fast nicht zu hoffen, daß sich gar nichts einer Aufmerksamkeit entzogen haben solte, welche zum öftern und unter andern selbst durch die Gedanken unterbrochen worden ist, zu welchen das wiederhohlte Durchsehen natürlicher Weise Anlas geben muste. Vielleicht sind auch bey dem fremden und etwas eilfertigen Drucke einige Fehler der Setzer stehen geblieben. Doch hoffe ich nicht, daß alle diese Versehen von der Art seyn, daß sie einen bedachtsamen Leser aufhalten könten.

Uebrigens ist es hauptsächlich die Begierde, sich nach Vermögen nützlich zu machen, so die Gedult unterhalten können, welche bey der Ausarbeitung dieser Vorlesungen aus vielen Ursachen nöthig war. Dieses ist der einzige Ruhm, welchen man dabey suchet; und man wird es als eine Glückseligkeit ansehen, wenn dieser Zweck bey einem oder dem andern Leser erhalten wird. Geschrieben auf der Georg = Augustus Universität zu Göttingen, den 18 Merz 1747.

Erster Abschnitt.

Einfache Rechnungsarten mit ganzen Zahlen und zehentheilichten Brüchen.

Allgemeine Begriffe von den Zahlen.

§. 1.

Wenn etwas gezehlet, oder durch eine Zahl ausgedrückt werden sol, so muß dasselbe entweder schon in Theile getheilet seyn, oder in dergleichen Theile getheilet werden: und diese Theile müssen entweder gleich seyn, oder man muß sie doch als gleich ansehen: in allen andern Fällen ist das Zehlen ohnmöglich. Es liegen etliche Münzen vor mir, die ich zehlen sol; ich werde dieses leicht verrichten, wenn sie alle von einer Grösse, und, zum Exempel, Gulden sind. Sind sie aber von verschiedenem Werthe, so können sie nicht anders gezehlet werden, als wenn man auf ihren Werth gar nicht Acht hat, sondern sich dieselbe bloß unter dem allgemeinen Begrif der Münzen vorstellet. So bald man dieses annimt, kan man zehlen, eine,

zwo, drey Münzen, von was vor einem Werth sie auch seyn mögen, weil sie nehmlich darinne alle überein kommen, daß sie Münzen sind.

§. 2. Diese Theile mögen im übrigen so groß oder klein seyn als sie wollen. Es sind zuweilen die Dinge, welche gezehlet werden sollen, in Theile getheilet, die ihrer Beschaffenheit nach nicht wohl kleiner können genommen werden, als wenn man eine Heerde Schaafe zehlet, welche man nicht füglich in kleinere Theile, als in einzelne Schaafe abgetheilet, sich vorstellen kan. Doch verhindert in diesem Fall nichts, daß man die Heerde nicht auch durch Paare oder Dutzende, durch Schocke oder etwas dergleichen, zehle. In den meisten Fällen aber können die Theile auch so klein genommen werden als man wil, und man kan, zum Exempel, eine jede Länge, durch die Zahl der Meilen, der Ruthen, der Schritte, der Ellen, der Schuhe, der Zolle, und so ferner, welche in derselben enthalten sind, ausdrücken.

§. 3. Ein dergleichen Theil, aus welchem dasjenige, so gezehlet werden sol, zusammen gesetzet wird, oder verschiedene solche Theile zusammen genommen und als ein Ganzes betrachtet, heisset eine **Einheit**. Es besteht also bloß in unserer Willkühr, wie groß wir die Einheiten annehmen wollen, welche zu zehlen wir uns vorgenommen haben.

§. 4. Wenn man sich aber ein Ding, es mag so groß oder klein seyn als es wil, aus Einheiten zusammen gesetzt, vorstellet, so wird es zwar oft eben deswegen, weil man es sich so vorstellet, und so lange man es sich so vorstellet, eine **Zahl** genennet, es mag nun dieses Ding, würklich aus andern verschiedenen einzeln Dingen bestehen, wie eine Armee aus vielen Soldaten; oder es mögen die Einheiten, aus welchen man es zusammen gesetzet hat, in einem dergestalt fortgehen, daß die zweite anfängt, wo die erste aufhöret, wie auf die Art ein Stück Weges aus den Schritten bestehet, welche es ausmachen, oder eine gewisse Zeit aus den Stunden oder Minuten, die in derselben enthalten sind. Doch muß man gestehen, daß dieses die eigentliche Bedeutung nicht sey, welche wir mit dem Wort, **Zahl**, verknüpfen.

§. 5. Wenn wir genau reden, so verstehen wir unter diesem Worte **Zahl**, nicht so wohl die Dinge selbst, welche wir zehlen, als vielmehr einen Begrif von der Art und Weise, wie dieselbe aus ihrer Einheit entstehen. Ich zehle eins, zwey, drey Thaler. Nicht diese drey Thaler sind eigentlich die Zahl, sondern sie sind dasjenige, so gezehlet worden ist, und machen vor sich bloß eine **Menge** einzelner Dinge aus. Indem ich aber diese drey Tha-

Thaler zehle, so stelle ich mir vor, daß, um dieselbe aus einem einzeln Thaler zu machen, ich einen Thaler nehmen, zu demselben den zweyten, und denn noch einen hinzusetzen müsse; und eben dieser Begrif ist es, welchen ich mit dem Wort Drey verknüpfe, womit ich die gegenwärtige Zahl der Thaler ausdrücke. Aus der Ursache drücken wir drey Ducaten, drey Menschen, drey Schritte, durch eben das Zahl-Wort aus, weil nehmlich drey Ducaten aus einem Ducaten, drey Menschen aus einem Menschen, drey Schritte aus einem Schritt, eben so werden, wie drey Thaler aus einem Thaler entstehen.

§. 6. Wir fangen unser Zehlen immer mit dem **Eins** an, und endigen es auch öfters mit demselben. Der Begrif, welchen wir alsdenn mit diesem Worte verknüpfen, ist von eben der Art, und saget bloß, daß man die angenommene Einheit nicht öfter als einmal setzen müsse. Er hat mit der innern Beschaffenheit, der Grösse und andern Eigenschaften dieser Einheit nichts zu thun. Diese wird, wie bey allen Zahlen, vorausgesetzt, und kömt alsdenn in keine weitere Betrachtung, als daß man darauf merket, wie oft sie gesetzt werden müsse, damit die Menge heraus komme, welche zu zehlen ist.

§. 7. Da die Einheiten willkührlich sind, I, 3. fügt es sich zuweilen, daß dieselbe, wenn sie wiederhohlet werden, die Menge herausbringen, so gezehlet werden sol, oder eine andere so ihr gleich ist, wie dieses geschiehet, wenn man eine Heerde Schaafe nach einzeln Schaafen zehlet. In diesem Fall wird die Zahl, womit man diese Menge ausdrücket, eine **ganze Zahl**, oder auch schlechthin eine Zahl genennet.

§. 8. Zuweilen aber bringet die wiederhohlte Einheit das Ding, so durch eine Zahl ausgedrückt werden sol, nicht heraus. Nicht eine jede Heerde Schaafe läst sich durch Dutzende zehlen; es kan eine Heerde aus sieben Dutzenden, und einigen einzeln Schaafen drüber, bestehen, oder eine kleine Heerde kan nicht einmal ein einziges Dutzend ausmachen. Die Zahlen, welche uns einen Begrif von der Art und Weise machen, wie dergleichen Dinge aus ihrer Einheit entstehen, heissen **gebrochene Zahlen** oder **Brüche**. Es wird aber das Ding, welches durch eine gebrochene Zahl bedeutet wird, aus der Einheit, indem man die Einheit in verschiedene gleiche Theile theilet, und deren etliche annimt.

§. 9. Eine gebrochene Zahl ist entweder grösser oder kleiner als die Einheit. Ist die Einheit ein Dutzend, so ist eine Heerde, welche nicht aus lau-

ter vollen Dutzenden besteht, entweder weniger als ein Dutzend, oder mehr. Ein Bruch von der ersten Art, welcher nehmlich kleiner ist als die Einheit, heisset ein **ächter Bruch**, der andere aber **ein unächter**, und kan allzeit in eine ganze Zahl und einen ächten Bruch verwandelt werden. Zuweilen stellet man sich auch eine ganze Zahl als einen Bruch vor, indem man nehmlich die ganze Einheit in etliche gleiche Theile theilet, und alle diese Theile zusammen zwey, drey, vier oder mehr mal nimmet. Indem dieses geschiehet, wird die ganze Einheit eben so oft genommen, und man bekomt also wirklich eine ganze Zahl.

Fig. 1. §. 10. Alles dieses noch deutlicher einzusehen, stelle man sich die gerade Linie AB vor, welche durch eine Zahl ausgedrückt werden sol. Man muß zu dem Ende eine andere gerade Linie nach Belieben als eine Einheit annehmen, wenn man sich nicht einer solchen bedienen wil, welche bereits im gemeinen Leben dazu angenommen worden ist, dergleichen die Ellen, Schuhe, Zolle, und dergleichen sind. Gesetzt CD sey diese Einheit, und AB lasse sich in Theile theilen, welche der CD gleich sind, als AE, EF, FB, welche zusammen genommen die Linie AB ausmachen: so kan AB durch eine Zahl ausgedrückt werden. Ich sehe daß man die Einheit AE, welche so groß ist als CD, setzen, und noch eine dergleichen Einheit EF hinzu thun, und so dann FB anfügen müsse, damit die AB aus der CD werde; das ist, daß man die Einheit CD dreymal nehmen müsse, um die AB zu erhalten. Die Zahl drey ist demnach diejenige, welche nunmehro die Grösse der Linie AB ausdrücket, und diese ist eine **ganze Zahl** I, 7.

Fig. 2. §. 11. Wenn aber die gerade Linie GH durch eine Zahl ausgedrücket werden sol, welche sich auf die Einheit IK beziehet, so kan dieses nicht anders geschehen, als wenn man die IK in verschiedene gleiche Theile theilet, und so dann aus solchen Theilen die GH zusammen setzet. Dieses geschiehet in der vorliegenden Figur, wenn man der IK drey Theile giebt; denn zwey solche Theile machen die Linie GH aus. So bald man dieses eingesehen hat, kan man GH durch eine Zahl ausdrücken, aber diese wird keine ganze, sondern eine **gebrochene Zahl** seyn I, 8. Man stellet sich diese Zahl eben damit vor, wenn man begreifet, daß man die Einheit IK in drey gleiche Theile theilen, und zwey dergleichen Theile nehmen müsse, die Linie GH zu erhalten; oder indem man saget, GH sey zwey Drittel der Einheit. Dieses ist ein **ächter Bruch** I, 9.

Fig. 3. §. 12. Ein Exempel eines **unächten Bruchs** aber hat man bey der Linie MN, welche durch eine Zahl ausgedrücket werden sol, deren Ein-

Einheit OP ist. Diese OP ist in drey gleiche Theile getheilet worden, und fünf solcher Theile machen die MN aus. Es ist also die MN grösser als die Einheit OP; sie entstehet aber doch, indem man einen gewissen Theil dieser Einheit, nehmlich ein Drittel derselben wiederholet, und kan nicht durch die Wiederholung der OP selbst entstehen.

§. 13. Eine Zahl wird **grösser**, wenn die Menge der Einheiten vermehret wird, welche sie ausmachen, und **kleiner**, wenn dieser Einheiten weniger werden. Und ausser dieser Vermehrung und Verminderung kan man mit den Zahlen keine andere Veränderung vornehmen. Eine Zahl bleibt unverändert, ob man zwar die Einheiten, aus welchen sie bestehet, in eine andere Ordnung setzet, oder an statt einiger Theile, welche man wegnimt, andere hinzusetzet, welche jenen gleich sind, oder doch als gleich angesehen werden. Denn man siehet bey dem Zehlen keinesweges auf die Ordnung der Einheiten: und wenn man die Einheiten selbst verändert, und zum Beyspiel, an die Stelle eines jeden Puncts in der Zahl AB ein Sternchen, wie zwischen CD, setzet, so bleibt doch die Art und Weise, wie alle Sternchen zwischen CD aus einem Sternchen erwachsen, einerley mit der Art und Weise, wie alle Puncte zwischen AB aus einem solchen Puncte worden sind. Es wird demnach I, 5. die Zahl durch eine dergleichen Verwechselung nicht geändert, sondern bloß die Einheiten. [*Fig.* 4.]

§. 14. Einerley Ding kan bald durch eine grössere, bald durch eine kleinere Zahl ausgedrücket werden, nachdem man die Einheiten annimmet, aus welchen man es zusammen setzt. Und nahmentlich wird dasselbe Ding durch eine große Zahl ausgedrückt, wenn die Einheiten, aus welchen man es zusammen setzt, kleiner angenommen werden; und durch eine kleinere, wenn man die Einheiten grösser nimmet. Eine Armee kan aus sehr vielen einzeln Leuten bestehen; sie bestehet aber nothwendig aus ungemein wenigern Regimentern.

[*Fig.* 5.] §. 15. Und zwar, wenn die Grösse eines Dinges AB durch eine Zahl ausgedrücket ist, welche sich auf die Einheit CD beziehet, und man nimt an die Stelle dieser Einheit eine andere CE, welche nur halb so groß ist als die vorige CD, so wird die Zahl, welche AB ausdrücket, zweymal grösser als diejenige, welche sie vorher ausgedrücket hatte. Dieses ist selbst aus der Figur sichtlich, und man begreifet leicht, daß man weiter gehen, und sagen kan, daß wenn die Einheit, drey, vier, fünfmal kleiner gemacht wird, die Zahl, welche die Grösse der AB ausdrücket, drey, vier, fünfmal grösser werden müsse und so ferner. Wie auch, daß die Zahl, welche die Grösse eines Dinges ausdrücket, zwey, drey, viermal kleiner werden

müsse, wenn die Einheit zwey, drey, viermal grösser genommen wird: und so in allen Fällen.

§. 16. Ist aber die Einheit bekant, nach welcher gezehlet worden ist und die Zahl solcher Einheiten, welche die Grösse eines gewissen Dinges ausmachen; so ist uns die Grösse dieses Dinges selbst bekant. Und darin bestehet eben der Nutzen der Zahlen, daß man vermittelst derselben einem jeden so leicht einen Begrif von der Grösse dieses oder jenen Dings beybringen kan. Das Ding, welches durch eine Zahl ausgedrücket worden, ist desto grösser, je grösser die Einheit ist, nach welcher gezehlet wird, und je grösser die Zahl ist, welche das Ding ausdrücket; und desto kleiner, je kleiner die Einheiten sind, aus welchen es bestehet, und je geringer sich ihre Zahl befindet.

[*Fig. 6.*] §. 17. Man muß sich demnach hüten, daß man nicht die Grösse der Dinge aus einem dieser Stücke, nehmlich der Grösse der Einheit und der Grösse der Zahl, welche es ausdrücket, allein ermesse, nachdem wir gesehen, daß einerley Grösse durch gar verschiedene Zahlen ausgedrückt werden könne, wenn man verschiedene Einheiten annimmet. Bey den Brüchen ist dieses am wenigsten ausser Acht zu lassen. Die Theile, aus welchen AB zusammen gesetzet wird, sind die Theile der Einheit CD, und diese Theile sind als die Einheiten anzusehen, nach welchen man die AB zehlet. Theilet man nun CD in vier gleiche Theile, so kommen drey solcher Theile auf AB, und AB besteht aus drey Vierteln der Einheit CD. Theilet man aber CD in acht gleiche Theile, so kommen sechs solcher Theile auf AB, und AB wird nunmehro durch die Zahl sechs Achtel ausgedrücket: doch ist die Grösse dieser AB nicht verändert worden. Man kan CD noch auf tausend andere Arten theilen, und aus dergleichen Theilen die AB zusammen setzen, welche dadurch immer durch andere und andere Zahlen ausgedrücket wird, ob sie zwar beständig eben die AB bleibt.

Wie die Zahlen durch Worte ausgedrücket werden.

§. 18. Die Zahlen auszudrücken, werden nothwendig Zeichen und Wörter erfordert. Bey beyden sind gewisse Gesetze zu bestimmen, damit man mit wenigen Wörtern und Zeichen auch grosse Zahlen ausdrücken könne, wenn man nicht aus der Menge derselben die äusserste Verwirrung erwarten wil.

§. 19. Das geschickteste, ja das einzige so uns hier zu statten kommen kan, ist, daß man verschiedene Einheiten annimmet, deren einige

grösser

grösser sind als die andern, doch so, daß allzeit die grössere eine gewisse Zahl der kleinern enthalten. Auf die Art werden die Zahlen allezeit klein, und man braucht wenige Wörter und Zeichen dieselben auszudrücken. So zehlen wir die Länge von Madrit bis Petersburg durch nicht eben sonderlich viele Meilen; welche durch eine gar grosse Zahl würde ausgedrückt werden, wenn man an statt der Meilen, Ruthen vor die Einheiten nehmen wolte, und durch eine noch viel grössere, wenn man sich des Zolles als einer Einheit bedienen wolte. Dasjenige aber so seiner Bequemlichkeit wegen heut zu Tage fast überall eingeführet ist, ist nachfolgendes.

§. 20. Nachdem man eine beliebige **Einheit** angenommen hat, setzet man eine andere aus zehen dergleichen Einheiten zusammen, welche man einen **Zehner** nennet, eben so wie die Landmesser ihre Ruthe aus zehen Schuhen machen. Andere Einheiten machet man aus zehen Zehnern, welche **Hunderte** heissen. Wieder andere aus zehen hunderten, die heissen **Tausende**; und so fort nach eben diesen Gesetzen, wie bald umständlicher sol erkläret werden.

§. 21. Um nun eine jede Zahl mit Worten auszudrücken, ist nichts nöthig als daß man anzeige, wie viel Tausende, wie viel Hunderte, wie viele Zehner und wie viele einzelne Einheiten in derselben enthalten sind. Und weil jede Zehen einzelne Einheiten, eine Einheit der **ersten höhern Ordnung**, nehmlich einen Zehner, ausmachen, und jede zehen Zehner eine Einheit der **zweyten höhern Ordnung**, nehmlich hundert, und jede zehen Hunderte, eine Einheit der **dritten höhern Ordnung**, oder Tausend; so ist klar, daß zu gedachter Ausdrückung einer jeden Zahl, ausser den Erklärten, nicht mehr als neun Wörter erfordert werden, welche eine jede Zahl von eins bis auf zehne ausdrücken, die bekant genug sind. Diesemnach drücken die wenigen Worte, fünf tausend, sieben hundert, dreyssig und viere, eine gar grosse Zahl aus, deren Verstand ist, daß die Zahl aus vier einzeln Einheiten, aus drey Zehnern oder Einheiten von der ersten höhern Ordnung, aus sieben Hunderten, oder sieben Einheiten von der zweyten höhern Ordnung, und endlich aus fünf Tausenden, oder Einheiten von der dritten höhern Ordnung, bestehe.

§. 22. Besteht die Zahl aus mehr als neun Tausenden, so werden die Tausende ferner eben so gezehlet, wie die einfache Einheiten gezehlet werden. Man spricht nemlich, ein, zwey, drey tausend - - - zwanzig tausend, - - dreyssig und sieben tausend, hundert tausend - - hundert siebenzig und drey tausend - - zwey hundert tausend - - - neun hundert und neunzig tausend, und so ferner, bis der Tausende wieder tausend werden, welche eine

Ein-

Einheit von der sechsten höhern Ordnung geben, die eine Million genennet wird. Nehmlich ein Zehner der Tausende, oder einmal zehen tausend, ist eine Einheit der vierten höhern Ordnung, ein hundert tausend, eine Einheit der fünften, und also eine Million, eine Einheit der sechsten höhern Ordnung.

§. 23. Zahlen, welche über Millionen gehen, werden ausgedrückt, wenn man die Millionen anzeiget, so in derselben enthalten sind, und so dann die Tausende, Hunderte, Zehner, und die einfache Einheiten, wie gelehret worden ist. Es werden aber die Millionen vollkommen so gezehlet, wie die einfache Einheiten, man rechnet nehmlich derselben eine, zwo, drey, zehne, zwanzig - - - vier und zwanzig - - - hundert - - - vier hundert Dreyssig und fünfe - - tausend - - hundert tausend - - - neun hundert neunzig und neun tausend, neun hundert neunzig und neune, bis endlich eine Million von Millionen erwächst, welche eine Billion heisset, und wieder als eine besondere Einheit von einer hohen Ordnung angesehen wird, so die zwölfte ist.

§. 24. Nun ist hoffentlich nichts mehr zu sagen nöthig, wenn man ohne Ende weiter gehen sol, als bloß das einzige, daß eine Million von Billionen eine Trillion heisse, eine Million von Trillionen eine Quadrillion, und so ferner Quintilion, Sextilion, Septilion ꝛc. Dieses setzt uns in den Stand, eine jede Zahl, sie mag so groß seyn als sie wil, mit Worten geschickt auszudrücken, und wenn sie von andern ausgesprochen wird, deutlich zu übersehen.

Die Zahlen geschickt zu schreiben.

§. 25. Im schreiben der Zahlen kan man ausser der gezeigten noch eine andere Leichtigkeit haben, welche bloß deswegen nicht von allen nach Würden geschätzet zu werden scheinet, weil sie so sehr bekant ist. Jede Zahl wird durch Einheiten von verschiedenen Ordnungen ausgedrückt I, 21. Die Zahl keiner dieser Einheiten steiget über neune. Was ist weiter nöthig, als daß man sich neun Zeichen erwehle, und mit denselben die Zahlen der Einheiten bis auf neune bemerket, es mögen nun diese Einheiten einfach, oder von einer höhern Ordnung seyn; dabey aber auch etwas anders ausmachet, wodurch man unterscheiden könne, ob die also angenommenen Zeichen einfache Einheiten bedeuten, oder ob sie Einheiten von der ersten, andern, dritten, oder einer andern der höhern Ordnungen, ausdrücken. Die Zeichen der Zahl der Einheiten bis auf neune, sind bey uns die bekannten

Zif-

Ziffer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Die Ordnung aber der Einheiten, welche sie bedeuten, wird aus dem Ort ermessen, welchen jedes dieser Zeichen einnimt. Und dazu hat man nachfolgendes festgesetzt.

§. 26. Wenn eine Zahl bloß vor sich da stehet, so bedeutet sie allezeit einfache Einheiten; als 5, 7, 3. Stehen aber zwo Zahlen neben einander als 45, so bedeutet die, so gegen der rechten Hand stehet, wieder einfache Einheiten, die nächste zur linken aber Einheiten von der erstern höhern Ordnung, oder Zehner, und demnach 45, vier Zehner oder vierzig, und fünfe.

§. 27. Solten nun bloffe vier Einheiten der ersten höhern Ordnung, oder vierzig, ausgedrücket werden, so müste zwar die 5 fehlen, aber damit so dann 4 noch vier Zehner bedeuten könte, derselben ein Zeichen beygefüget werden, so an sich nichts bedeutete, aber doch dienen konte, das Zeichen 4 am nächsten Ort von demjenigen in welchem die 5 stund, nach der linken zurück zu setzen, welches Zeichen o ist, so in allen ähnlichen Fällen auf die Art gebrauchet wird.

§. 28. Und auf eben die Art verfähret man auch bey den Einheiten von noch höhern Ordnungen. Gleichwie eine Ziffer die zunächst an der letzten stehet, Einheiten von der ersten höhern Ordnung, oder Zehner bedeutet, also bedeutet eine Ziffer, so zunächst auf diese folget, und folgends die dritte Stelle einnimt, Einheiten von der andern höhern Ordnung, oder Hunderte, die in der vierten Stelle, Tausende und so ferner, und überall werden die Stellen, in welchen keine Ziffer stehen, weil nemlich dergleichen Einheiten fehlen, als die Ziffer in derselben Stellen bedeuten würden, mit oo vollgefüllet, weil man ohne denselben nicht wissen könte, den wie vielsten Ort die würklich vorhandene Ziffer einnimt. Wenn also dreytausende und vierzig und siebene bezeichnet werden sollen, da keine Einheiten von der andern höhern Ordnung, oder keine Hunderte vorkommen, so müssen die Ziffer also 3047 stehen, 3007 aber wird dreytausend und sieben bedeuten, und so in allen übrigen Fällen.

§. 29. Wenn demnach Einheiten von der ersten höhern Ordnung alleine vorkommen, so bekommen die Ziffer, welche sie ausdrücken eine o, also 30: Einheiten von der andern höhern Ordnung alleine bekommen zwo oo, also 700, die von der dritten Ordnung drey ooo, als 4000, und überall ist die Zahl der oooo, die zur Rechten angehänget werden, einerley mit der Zahl, welche die Ordnung der Einheiten angiebet, die durch die da vorstehende Ziffer ausgedrücket werden. Wenn der Nullen zu viele werden, pflegt man die Zahlen derselben, zuweilen nur dadurch zu bemerken, daß man über die Ziffer eine andere setzet, welche diese Zahl anzeiget, also 5^{7}_{3}, welches so viel

seyn sol, als 53 mit sieben 00, oder 53000000, und in diesem Fall zeiget die übergeschriebene Ziffer, als hie 7, allezeit die Ordnung der Einheiten der darunter stehenden Ziffer 3 an, und folgends auch die Ordnung der Einheiten, welche die übrigen Ziffern, als hie 5, ausdrücken.

Die dergestalt geschriebene Zahlen zu lesen.

§. 30. Setzt man dieses alles mit dem, was von Aussprechung der Zahlen gesaget worden ist, zusammen, so wird es unschwer seyn, eine jede mit den erklärten Ziffern geschriebene Zahl auch mit Worten geschickt auszudrücken. Zur Erleichterung theile man die vorgegebene Zahl erstlich in Classen von sechs Ziffern, indem man von der ersten Ziffer zur Rechten anfängt, und nach der Linken zugehet, und schreibe über die erste Ziffer zur Rechten gar nichts oder 0, über die siebende oder die erste der folgenden Classe aber I, über die dreyzehende, oder die erste der dritten Classe II, über die erste der vierten Classe III, und so fort.

§. 31. So dann theile man zweytens jede dieser Classen wieder in zwo von dreyen Ziffern, und bemerke die Abtheilung mit einem (') oder wie man sonst will. Kan man nun drey Ziffern lesen, die so geschrieben stehen 472, oder 301, oder 035, oder 006, welches keine Schwierigkeit hat, da die erste zur Linken Hunderte, die zweyte Zehner und die dritte einfache Einheiten bedeutet, so kan man eine jede also getheilte Reihe ebenfals aussprechen. Man darf nur jede Classe von drey Ziffern eben so lesen wie die, deren wir eben erwehnet haben, so dann aber ein jedes (') so die kleinen Classen unterscheidet, durch tausend, und die oben geschriebene Zeichen I, II, III ꝛc. durch Million, Billion, Trillion ꝛc. aussprechen, eben so, als wenn an statt dieser Zeichen, die eben genante Wörter geschrieben wären, vor (') nemlich tausend, vor I, Million, vor II, Billion, vor III Trillion, und so fort. Diesem zu folge wird nachstehende Zahl 73.524‴287.503″724.315030.515° ausgesprochen: 73 tausend und 524 Trillionen, 287 Tausend und 503 Billionen, 724 Tausend und 315 Millionen, 30 Tausend und 515 Einheiten.

§. 32. Nemlich, alle Ziffer die vor den bezeichneten 5°, 5′, 3″, 4‴ stehen, bedeuten dergleichen Einheiten, als die über diesen stehende Zeichen 0, I, II, III, andeuten: und demnach die in der ersten Classe zur Linken 73 tausend Trillionen, und noch über dieses 524 Trillionen, die in der nächsten, 287 tausend Billionen, und noch über dieses 503 Billionen, und so fort.

Wie

Wie die Brüche überhaupt bezeichnet werden.

§. 33. Da eine gebrochene Zahl entstehet, indem man die Einheit in verschiedene gleiche Theile theilet, und einen oder etliche solche Theile annimt, welche den Bruch ausmachen I, 8. so sind einen Bruch zu bezeichnen zwo ganze Zahlen nöthig, deren erstere anzeiget, in wie viele gleiche Theile die Einheit getheilet werden müsse, die andern aber, wie viele dieser Theile zusammen genommen den Bruch ausmachen. Die erstere dieser Zahlen heisset der **Nenner**, weil sie die Grösse der Theile bestimmet, in welche man die Einheit getheilet hat, welche alsdenn ihre Benennung von dieser Zahl kriegen; die andere aber der **Zehler**, weil sie die Zahl dieser Theile in dem Bruch anziehet. In dem Bruch, welcher das Stück GH aus der Einheit IK ausdrücket, ist der Nenner 3 und der Zehler 2, denn die Einheit IK ist in 3 Theile getheilet, deren jedes ein Drittel derselben genennet wird, und zween dieser Theile machen die GH aus. Dieses ist ein ächter Bruch. In dem Bruch aber welcher MN aus der Einheit OP ausdrücket, und welcher unächt ist, ist der Nenner wieder 3, und der Zehler 5. [*Fig. 2. 3.*]

§. 34. Es ist durchgehends eingeführet, daß man den Zehler über eine Linie, und den Nenner darunter schreibt, folgender massen, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{11}$, und auf die Weise werden alle Brüche bezeichnet, sie mögen ächt oder unächt seyn.

§. 35. Man kan aber auch einen unächten Bruch anders schreiben, indem man nemlich die ganze Einheiten, welche in demselben enthalten sind, voraus setzet, und den Ueberschuß hinten anfüget, folgender gestalt: $1\frac{2}{3}$, $3\frac{7}{9}$, $153\frac{17}{32}$. Im Gegentheil kan man auch eine jede ganze Zahl in Form eines Bruchs schreiben, als $\frac{7}{1}$, bedeutet so viel als 7, und $\frac{18}{2}$ so viel als 9.

Zehentheilichte Brüche.

§. 36. Es giebt eine besondere Art von Brüchen, welche von sonderbarer Bequemlichkeit sind, nemlich die so genanten **Zehentheilichten**. Die Nenner derselben sind 10, oder 100, oder 1000, oder eine jede Einheit von einer der höhern Ordnungen. Diese Brüche kan man, ausser der eben gewiesenen, noch auf eine andere Art bezeichnen, welche ganz und gar aus den Gesetzen fliesset, nach welchen die ganzen Zahlen bezeichnet werden; nur sind dieselben zu dem Ende etwas weiter auszudehnen.

§. 37 Ein Bruch dessen Nenner 10 ist, und der Zehler 1, oder $\frac{1}{10}$ ist der zehende Theil der Einheit. Ein Bruch dessen Nenner 100 ist, und

der Zehler wieder 1, oder $\frac{1}{100}$ ist der zehende Theil des vorigen $\frac{1}{10}$, weil jedes Theil so in den vorigen gezehlet wird, oder jedes $\frac{1}{10}$ wieder in zehen Theile getheilet werden muß, damit ihrer 10 mal 10 oder hundert heraus kommen: und eben so ist $\frac{1}{1000}$ der zehende Theil von $\frac{1}{100}$, und so beständig fort. Schreibet man also $\frac{3}{10}$ und wiederum $\frac{5}{100}$, so sind die Einheiten, welche der Zehler des ersten Bruchs zehlet, zehen mal grösser, als die Einheiten, die der Zehler des andern Bruchs anzeiget, und wiederum sind die Einheiten des Zehlers in dem Bruch $\frac{5}{100}$ zehen mal grösser als die Einheiten des Zehlers in dem Bruch $\frac{9}{1000}$, und so fort. Denn es zehlet der Zehler eines jeden Bruchs nichts anders als die Theile, deren Grösse der Nenner dadurch ausdrücket, daß er anzeiget, wie viele derselben in der ganzen Einheit enthalten sind I, 33.

§. 38. Nach den Gesetzen von der Bezeichnung der Zahlen, welche I, 25. gelehret worden sind, enthält jede Einheit einer Ziffer die Einheiten derjenigen, welche nach der rechten Hand zu unmittelbar an derselben stehet, zehen mal, und die Einheiten welche in dieser gezehlet werden, sind zehen mal kleiner als die Einheiten, die jene zehlet. In der Reihe von Ziffern 5372 sind die Einheiten welche die Ziffer 5 bemerket, Tausende, und folgends zehen mal grösser als die Einheiten der Ziffer 3, welche Hunderte sind. Diese sind wieder zehen mal grösser als die Einheiten der Ziffer 7, da diese Zehner sind, und diese sind zehen mal grösser als die einfache Einheiten, welche von der nächst folgenden Ziffer 2 gezehlet werden. Hieraus folget, daß wenn gesetzet wird, daß in eben der Reihe 5372 die letzte Ziffer 2, einfache Einheiten bedeute, und man setzet noch eine Ziffer zur Rechten darzu, als, 5372, 6; so könne diese Ziffer 6 nichts anders als 6 Zehentheile der Einheit oder $\frac{6}{10}$ bedeuten, und wenn noch eine Ziffer daran gesetzt wird, als 5372, 64, so müsse diese $\frac{4}{100}$ bedeuten, und so fort.

§. 39. Dieses sage ich, wird in unserm Exempel erfolgen, wenn die Ziffer 2, beständig einzelne Einheiten bedeutet. Daß man aber dieser Ziffer 2, oder einer jeden andern diese Bedeutung gebe, könte nicht errathen werden, wenn man die Ziffer ohne Absatz in einer Reihe nach einander fortschreiben wolte, dergestalt 537264, da vielmehr jederman die letzte Ziffer 4, nach den gegebenen Gesetzen, vor die Zahl der einzelnen Einheiten halten würde I, 26. Man hat ein Zeichen nöthig, wodurch die Ziffer bemerket wird, so die einzeln Einheiten zehlet, und dieses ist meistentheils, und bey uns allezeit, ein (,), so nach derselbigen Ziffer gesetzet wird, dergestalt 5372,641. Einige haben andere Zeichen, welche, wenn sie vorkommen, leicht abzumerken sind.

§. 40.

§. 40. Es können nach dieser Anweisung auch diejenige zehentheilichte Brüche bezeichnet werden, bey welchen gar keine einzeine Eintheile anzutreffen sind, wenn nur auch hier der Ort dieser Einheiten bemerket wird, damit man wissen möge, welcherley Einheiten durch eine jede der in der Bezeichnung des Bruchs vorkommenden Ziffer bedeutet werden. Dieses geschiehet, indem man an die Stelle der einzeln Einheiten o setzet, mit dem darauf folgenden (,), wie dieses ordentlich gebraucht wird, diesen Ort zu bezeichnen. Demnach bedeutet 0,6, sechs zehentheile, 0,659, sechs zehentheile, 5 hundertheile und 9 tausendtheile. Aber 0,05 bloß fünf hundertheile, und 0,009 neun tausendtheilchen.

§. 41. Nachdem der Ort der einfachen Einheiten auf die Art bezeichnet worden ist, kan man zu jeder Ziffer, oder zu jeder Reihe von Ziffern beiderseits so viel Nullen hinzusetzen als man will, ohne die Zahl, welche durch dieselbe ausgedrückt wird, zu verändern. Es bedeutet 003,7000 nichts anders als 3,7 oder 3 und 7 Zehentheilchen. Denn die Nullen können niemals etwas anders würken, als daß sie den Ort verändern, welchen eine jede Ziffer einnimmet; dieser aber ist unveränderlich, so bald durch die Bemerkung des Orts der einfachen Einheiten, oder durch das (,) der Ort einer jeden Ziffer fest gestellet wird, so daß man denselben zu erkennen auf die beygeschriebene Nullen ferner gar nicht zu sehen hat, welche demnach gänzlich unnütze sind, und keine Würkung haben können.

§. 42. Ob zwar im übrigen die zehentheilichte Brüche dem ersten Anblick nach von geringen Nutzen scheinen dürften, weil unter den unzehlichen Arten, nach welchen die Einheit kan getheilet werden, die zehenfältige Theilung nur sehr selten vorkommen kan: so wird man doch bey genauerer Betrachtung die Sache ganz anders finden. Es ist an dem, daß sich diese Theilung der Einheit nicht schicket, einen jeden Bruch genau auszudrücken. Als zum Exempel $\frac{2}{9}$ sind grösser als $\frac{2}{10}$ und kleiner als $\frac{3}{10}$ und können also durch zehentheile nicht ausgedrückt werden, es geht dieses auch nicht durch zehentheile, hundertheile und tausendtheile an, ja man kan diesen Bruch $\frac{2}{9}$ gar nicht durch zehentheilche Brüche darstellen, wie in dem folgenden gezeigt werden wird. Aber es ist auch im Gegentheil richtig, daß je mehr der Theile sind, in welche die Einheit getheilet wird, je kleiner dieselben werden, und daß, so groß auch die Einheit seyn mag, man durch eine wiederholte Theilung der Theile endlich auf Kleinigkeiten hinaus komme, welche in Ansehung des Ganzen fast vor nichts zu achten sind, so daß in der Anwendung wenig daran gelegen ist, ob man um ein oder anderes dergleichen Theilchen fehlet oder nicht. In Ansehung eines Thalers ist $\frac{1}{10}$ von einem

Pfenning vor nichts zu halten, ja es ist diese Kleinigkeit auch vor sich allein fast so anzusehen, als ob sie von ganz und gar keinem Werthe wäre, weil in der That wenig nützliches damit kan geschaffet werden. Nun komt man aber bey den zehentheilichten Brüchen, wenn man fortgehet, endlich allezeit auf dergleichen Kleinigkeiten, welche in der Anwendung vor nichts können gehalten werden, weil deren Abgang in keine Betrachtung kommet, und es kan demnach in einem solchen Fall der bequeme zehentheilchte Bruch mit eben solcher Richtigkeit gebraucht werden, als ob er alles genau ausdrückte. Zum Exempel, 0,5732 wären Theilchen eines Thalers, so ist es mir in der Anwendung eines, ob ich 0,5732 eines Thalers habe, oder ob mir die letzte 0,0002 mangelt. In diesem Fall ist also 0,5732, und 0,573 vor einerley zu halten, weil 0,0002 eines Thalers eine an sich ganz und gar unnütze Kleinigkeit sind, indem sie noch nicht $\frac{3}{100}$ eines Pfennigs ausmachen. Demnach ist vielmehr der Bruch 0,5732 genau genug, ob ich zwar versichert seyn kan, daß derselbe den Theil des Thalers, welchen er ausdrücken solte, nicht völlig darstelle, sondern ihm eine oder andere Ziffer von hinten zu mangele. Und es folget, daß wenn die zehentheilchte Brüche nicht geschickt sind, einen jeden Theil der Einheit genau zu bezeichnen, sie doch dieses jederzeit mit so geringen Fehlern thun können, daß an diesen Fehlern gar nichts gelegen ist, und sie begehen und gar nicht fehlen, in der Anwendung auf eins hinaus komt.

§. 43. Nimt man nun dasjenige, so von den zehentheilichten Brüchen gesagt worden, mit dem zusammen, so wir oben I, 21. von der Bezeichnung der ganzen Zahlen beygebracht haben, so siehet man, daß eine jede Zahl so groß oder so klein sie auch seyn mag, bequem auszudrücken, man sich ausser den angegebenen Einheiten der höhern Ordnung, andere Einheiten von **niedrigern Ordnungen**, als die einfachen Einheiten sind, vorstellen könne, von welchen die unmittelbar grössere allezeit die nächstfolgende kleinere zehenmal in sich fasset, und deren allergröste der zehnte Theil der einfachen Einheiten ist. Diesem zu folge wird die Einheit der **erstern niedrigern Ordnung** ein Zehentheil des Ganzen, die Einheit der **zweyten niedrigern Ordnung** ein Zehentheil der Einheit der ersten niedrigern Ordnung, und ein Hundertheil des Ganzen, und so ferner.

Die Addition.

§. 44. Der Nutzen dieser Bezeichnung der Zahlen besteht nicht bloß darinne, daß wir dieselben bequem ausdrücken können. Sie giebt uns auch die

die bequemsten und leichtesten Arten an die Hand, eine Zahl in eine andere zu verwandeln, und aus einigen Zahlen andere von verlangeter Grösse, und welche sich auf jene auf eine vorgegebene Art beziehen, zu finden, welches eben der Hauptzweck der Rechenkunst ist.

§. 45. Es können diese Veränderungen der Zahlen, wie wir oben I, 13. gewiesen haben, nicht anders als durch die Vermehrung und Verminderung derselben, vorgenommen werden. Man vermehret eine Zahl, indem man andere beliebige Zahlen zu derselben hinzusetzet: man vermindert sie, indem man eine oder die andere Zahl von derselbigen hinwegnimt. Dieses sind die Grundveränderungen alle, aber man kan so wohl das eine als das andere auf verschiedene Art, und nach verschiedenen Gesetzen verrichten: wenn man nemlich die Zahlen so oder so annimt, welche zu einer vorgegebenen Zahl nach und nach hinzu gesetzt, oder von derselben hinweg genommen werden sollen.

§. 46. Dasjenige, so bey allen diesen Veränderungen der Zahlen, oder bey allen Rechnungsarten, bey demjenigen zum Grunde gesetzet werden muß, der sie ausüben soll, ist daß er ohne Anstoß bis zehne zehlen, und von einer jeden Zahl wieder um 9 Einheiten zurück gehen könne. Weiß man diese Kleinigkeit, so ist es leicht zu sagen, wie viel heraus komme, wenn man jede Zahl, die nicht grösser ist als neune, um eine andere dergleichen Zahl vermehret oder vermindert. Und diese Wissenschaft ist demjenigen, welcher alles andere ausüben will, so von der Veränderung der Zahlen und deren Verwandelung in andere, gesagt werden soll, zum ersten Anfange hinlänglich.

§. 47. Indem man eine Zahl vermehret durch Zusetzung anderer Zahlen, wird eine neue Zahl gefunden, welche alle Zahlen, die zusammen gesetzet worden sind, in sich begreift, und denselben zusammen gleich ist. Diese heisset die **Summe** aller der Zahlen, welche man zusammen gesetzet hat. Die Rechnung aber, durch welche die Summe verschiedener gegebenen Zahlen gefunden wird, heisset die **Addition**. Zum Exempel, die Zahlen 3 und 5 und 9 zusammen, bringen die Zahl 17, und 17 begreift alle die vorigen Zahlen in sich. Diese Zahl 17 ist also die Summe der Zahlen 3 und 5 und 9, und indem ich diese Zahlen nach und nach zusammen setze, und dadurch finde, daß sie die Zahl 17 bringen, und zusammen genommen dieser gleich sind, so addire ich gedachte Zahlen.

§. 48. Wenn wir uns auch hier die Zahlen als aus den Theilen zusammen gesetzt vorstellen, aus welchen wir sie bis anhero mit so vieler Bequemlichkeit zusammen gesetzet haben, nemlich aus ihren einfachen Einhei-

ten,

ten, und aus den verschiedenen Einheiten der höhern und niedrigern Ordnungen, so ist jede Addition leicht zu verrichten. Gesetzt, es wären die nachstehende Zahlen zu addiren:

5327	957,32	58,3279
235	50,2	0,0701
18	0,7318	0,008
7954	57,	132,7

so setze man sie dergestalt unter einander wie hier zu sehen ist; so nemlich, daß jede Ziffer, welche Einheiten von einerley Ordnungen zehlen, gerade unter einander zu stehen kommen, und folgends die einfachen Einheiten unter einander, und die Zehner, die Hunderte, und so ferner, und die Zehentheile, die Hundertheile, und was sonst vor zehentheilchte Brüche vorkommen, wieder unter einander. Dieses alles giebt sich von selbst, wenn man nur zuforderst die Ziffern, welche die einfache Einheiten bedeuten, gerade unter einander gesetzet hat, denn nach diesen richten sich so dann alle übrige.

§. 49. Nun fängt man am bequemsten von der rechten Hand an, oder von den Ziffern, welche die niedrigsten Einheiten zehlen, und rechnet dieselbe nach und nach zusammen: so doch, daß, so oft man auf zehen komt, man diese zehen als eine Einheit der nächst folgenden Ordnung bey derselben bemerket. Die übrige Einheiten schreibet man unter die Säule von Ziffern, welche man dergestalt zusammen gerechnet hat, und gehet so dann zur nächsten nach der linken fort, da man aber die von der vorhergehenden übergetragene Einheiten zugleich mitnehmen muß. Ist man mit dieser Säule fertig, so verfähret man eben so mit der dritten und auf eben die Art mit den übrigen, bis an die äuserste zur linken.

§. 50. In dem ersten der gegebeuen Exempel

5327
235
18
7954
13534

ist 7 und 5 so viel als 12, ich bemerke die 10 als eine Einheit der nächsten Säule, und sage die übrigen 2 (denn 12 ist 10 und 2) und die nächste 8 machen wieder 10, welche eine neue Einheit in der nächsten Säule geben, also stehet unter der letzten nur 4, als der Ueberschuß aller Einheiten dieser Säule über die darinne enthaltene Zehner. Nun machen die zwey Zehner

ner so herüber gegangen sind, und die oberste Ziffer der zweyten Säule 2, so viel als 4, die nächste 3 dazu giebt 7, und die nächste 1 noch darzu, 8, endlich die letzte 5 hinzugesetzt, 13, oder 10 und 3. Die 10 dieser Säule sind wieder Einheiten der folgenden, sie müssen zu derselbigen gerechnet, und nur die übrigen 3, als Einheiten von der ersten höhern Ordnung, unter diese Säule gesetzet werden. Ferner giebt die Einheit, so von der zweyten Säule herüber gegangen ist, mit 3, der obersten Ziffer der dritten, 4; die nächste 2 dazu macht 6, und diese mit der nächsten, 15, oder 10 und 5. Man bemerket demnach unter dieser Säule wieder die 5, und rechnet vor die 10 eine Einheit zur nächst folgenden Säule, deren Ziffer mit dieser Einheit zusammen 13 ausmachen, welche neben der vorigen geschrieben werden.

§. 51. Es ist leicht einzusehen, daß man auch in der Zusammenrechnung der Ziffer in den Säulen beständig fortzehlen, und erst am Ende auf einmal die ganze Zahl der gefundenen Zehner zur nächsten Classe bringen könne. Als in unserm Exempel giebt die ganze erste Säule 24, da denn die 4 Einheiten geschrieben, die zween Zehner aber zu den übrigen der nächsten Säule, in welcher eben dergleichen Zehner enthalten sind, gerechnet werden müssen; und dieses ist zum fertigen Rechnen bequemer. Die übrigen Exempel machen nicht die geringste Schwierigkeit, wenn man das erste eingesehen hat. Es wird alles eben so gemacht als in dem bereits erklärten, und in der Summe wird das (,) so den Ort der einfachen Einheiten bezeichnet, gerade unter die (,) in denen gegebenen Zahlen gesetzt. Denn es ist an sich deutlich, daß durch Zusammenrechnung einer jeden Säule keine andere Einheiten heraus kommen können, als solche, die in den Ziffern der Säule, welche zusammen gerechnet worden, selbst vorkommen, weil, wenn ja durch die Zusammensetzung derselben endlich zehne kommen, dieselbe allezeit zu den Einheiten der nächsten Säule, wohin sie gehören, gebracht werden.

§. 52. Weil nehmlich bey den zehentheilchen Brüchen die Einheiten auf eben die Art wachsen, als bey den ganzen Zahlen, und auch hier die Einheit, so von einer jeden Ziffer gezehlet wird, zehenmal so groß ist, als die Einheit der Ziffer welche auf dieselbe zunächst nach der Rechten zu folget; so muß überhaupt alles was von den ganzen Zahlen gewiesen worden ist, sich auf diese Brüche ebenfals ziehen lassen. Demnach wird die Summa in den vorgesetzten Exempeln also stehen:

957,32	58,3279
50,2	0,0701
0,7318	0,008
57,	132,7
1065,2518	191,1060

§. 53. Daß nach dieser Anweisung die richtige Summe, oder eine Zahl welche allen gegebenen zusammen genommen gleich ist, gefunden werde, ist selbst aus dem gesagten deutlich. Man hat in die gefundene unter dem Querstrich stehende Zahl alle Theile aller gegebenen Zahlen gebracht. Alle Theile sind beständig das Ganze, und von diesem gar nicht unterschieden. Also hat man die Zahlen welche über den Strich stehen alle in die Zahl unter den Strich gebracht. Diese enthält also jene zusammen, sie können als Theile dieser Zahl betrachtet werden; also muß die unter den Strich geschriebene Zahl denen obern zusammen genommen gleich, und demnach die richtige Summe derselben seyn I, 47. Und dieses ist alles, so von der Addition dieser Art von Zahlen zu sagen war.

Die Subtraction.

§. 54. Indem man eine Zahl um eine andere vermindert, 9, zum Exempel, um 4, oder indem man die Zahl 9 um vier Einheiten kleiner machet als sie vorher war, bringet man eine neue Zahl 5 heraus, welche der Ueberschuß der grössern der gegebenen Zahlen, 9, über die kleinern 4 ist, und anzeiget, was zu der kleinern hinzu gesetzet werden müsse, damit die grössere Zahl heraus komme. Dieser Ueberschuß, oder dieser erforderliche Zusatz zu der kleinern Zahl, heisset auch der **Unterscheid** der gegebenen zwo Zahlen. Denn bloß derselbe, machet, indem er der kleinern mangelt, daß sie von der grössern Zahl verschieden ist, I, 13. und die kleinere Zahl wird der grössern gleich, so bald dieser Unterscheid zu ihr hinzu gethan wird.

§. 55. Die Rechnungsart, durch welche man den Unterscheid zwoer bekanten Zahlen findet, heisset die **Subtraction**. Es wird demnach dieselbe verrichtet, indem man eine kleinere Zahl von einer grössern wegnimt, oder deutlicher, indem man von einer bekanten Zahl einen Theil wegnimt, welchem eine ebenfals bekante Zahl gleich ist. Man kan auch sagen, daß eine kleinere Zahl 4 von einer grössern 7 subtrahiren oder abziehen nichts anders sey, als eine dritte Zahl 3 finden, welche zu der kleinern 4 hinzugesetzt oder addiret, die grössere 7 herausbringt.

§. 56.

§. 56. Dasjenige was hier voraus gesetzet wird, ist bloß die Kleinigkeit, deren oben I, 46. erwehnet worden ist, daß man nehmlich von einer jeden Zahl bis neun Einheiten zurück zu zehlen wisse. Kan man dieses, so ist es leicht den Unterscheid einer Zahl, die nicht grösser ist als 9, von einer jeden andern Zahl zu finden. Wil ich wissen wie viel 5 läst wenn ich es von 12 abziehe, so zehle ich von 12 fünf Einheiten zurück. Es bleiben siebene, und dieses ist der gesuchte Unterscheid.

§. 57. Bey Zahlen welche aus Einheiten von verschiedener Ordnung zusammen gesetzet sind, verfähret man nach folgender Anweisung. Nachdem man die zwo bekante Zahlen, wie bey der Addition, unter einander geschrieben hat, so ziehet man nach und nach die Ziffer der kleinern Zahl von den Ziffern der grössern ab, welche mit jenen einerley Einheiten bedeuten, und bemerket den Ueberschuß der letztern über die erstern, gerade unter denselben, wobey man einen Strich, wie bey der Addition, zur bequemen Absonderung der bekanten Zahlen von der gesuchten machet.

§. 58. Es ist oft nicht viel daran gelegen, wo man anfange, wenn nemlich die kleinere der bekanten Zahlen aus lauter solchen Ziffern bestehet, welche weniger oder doch nicht mehr bedeuten, als die Ziffer der grössern Zahl, deren Einheiten mit den Einheiten der erstern von einerley Ordnung sind, als in nachfolgenden Exempeln:

87325	742,18
13023	31,04
74302	711,14

da man leicht einsiehet, daß einerley heraus kommen müsse, man mag forne oder hinten, oder irgendswo in der Mitte anfangen.

§. 59. Wenn es sich aber füget, daß ein oder andere Ziffer der kleinern Zahl mehr Einheiten in sich hält, als diejenige Ziffer der grössern, welche Einheiten von eben der Ordnung bedeutet, und also gerade über oder unter derselben stehet, so könte aus dieser Art abzuziehen Verwirrung entstehen, und man thut am besten, wenn man die Subtraction allzeit von den Ziffern zur rechten Hand anfängt, deren Einheiten die allerkleinsten sind.

§. 60. Denn in diesem Fall, da nemlich eine Ziffer der kleinern Zahl mehr Einheiten enthält, als die Ziffer der grössern, deren Einheiten von eben der Ordnung sind, muß man erstlich von der nächsten Ziffer zur linken Hand in der grössern Zahl eine Einheit wegnehmen, oder, wie man es gemeiniglich nennet, **borgen**, welche zu der besagten Ziffer, welche zu klein

war, hinzu gesetzet, dieselbe um 10 vermehren wird, und so denn die Subtraction verrichten, wie in den beygesetzten Exempeln:

95326	573,48
17408	94,25
77918	479,23

da die untern Zahlen die kleinern sind.

§. 61. In dem ersten dieser Exempel läst sich 8 von 6 nicht abziehen. Ich nehme derowegen von der, der 6 zunächst stehenden Ziffer, eine Einheit, und bringe diese 1 in den Ort der 6, woselbst sie 10 ist, und mit der 6 die Zahl 16 ausmachet. Nun nehme ich 8 von 16 hinweg, so bleiben 8, welche ich unter dem Strich, und unter der Ziffer 8 bemerke. Allein die nächst an der 6 stehende Ziffer 2, von welcher eine Einheit dergestalt abgezogen oder geborget worden ist, gilt nunmehro um eins weniger als vorher, und demnach nur eins, welches, nicht zu vergessen, ihr ein (·) beygesetzet worden ist, dessen man sich in allen dergleichen Fällen zu bedienen pfleget. Wenn man demnach in der Subtraction fortfahren wil, so hat man nunmehro zu sagen, 0 von 1 läst 1, und diese 1 an gehörigen Ort, unter die 0 zu setzen. Die nächste 4 kan man von der 3, welche über ihr stehet, und eben die Einheiten enthält, wieder nicht abziehen. Man muß demnach von der 5 eine Einheit hierüber bringen, welche mit der 3 zusammen 13 Einheiten von der Ordnung geben, als in der 3, oder unter ihr stehenden 4, gezehlet werden. Nun läst 4 von 13 abgezogen 9 übrig, welche an den gehörigen Ort bemerket wird. Die in der untern Zahl nächst folgende 7 kan von der obersten 4 wieder nicht abgezogen werden: man muß auch hier von der in der obern Zahl folgenden 9 eine Einheit zu diesen herüber bringen, mit welcher diese 4 die Zahl 14 ausmacht. Nun läst 7 von 14 abgezogen, andere 7 übrig, und die folgende 1 von 8 genommen läst auch 7.

§. 62. Es ist bey der Rechnung des zweyten Exempels nichts weiter zu beobachten, ob zwar in demselben zehentheilche Brüche enthalten sind. Eine Ueberrechnung desselben wird alles klar machen. Die Einheiten der Ziffer, welche übrig bleiben, sind allzeit einerley mit den Einheiten derjenigen Ziffer, deren Unterscheid man suchet. Da also die letzte 5 der untern Zahl von der letzten 8, der obern abgezogen 3 übrig läßt; so bedeutet diese 3 Einheiten der zweyten niedrigern Ordnung, weil 5 und 8 dergleichen Einheiten bedeuten, und so ist es mit den übrigen allen. Demnach komt die Ziffer in dem gefundenen Unterscheid, welche die Zahl der einfachen Einheiten anzeiget, gerade unter die Ziffer, welche in den gegebenen Zahlen einzelne

einzelne Einheiten bedeuten, zu stehen, und das Zeichen dieser Einheiten (,) muß auch gerade unter das Zeichen der einfachen Einheiten in den gegebenen Zahlen, gesetzet werden.

§. 63. Nach eben den Regeln werden auch nachstehende Exempel gerechnet:

53,072	9,003	0,5734
8,32	5,8	0,25748
44,752	3,203	0,31592

3000	8,03	7,...
573	2,574	0,354
2427	5,456	6,646

bey welchen keine Schwierigkeit seyn kan, wenn man nur nicht vergessen hat, was oben I, 41. gesagt worden ist, daß nemlich denen zehentheilchen Brüchen von hinten zu, oder zur rechten, so viele ooo beygesetzt werden können, als man ihnen zusetzen wil, ohne ihre Bedeutung im geringsten zu verändern, und daß demnach, wenn eine Reihe Ziffer, keine Einheiten von dieser oder jener Ordnung hat, man an den Ort derselben Einheiten allzeit eine o setzen, oder doch sich vorstellen könne.

§. 64. Ferner aber ist zu beobachten, daß von der o man zwar eigentlich nichts borgen, und an den nächsten Ort zur rechten überbringen könne, weil nichts an der Stelle derselben befindlich ist: daß aber von der vor der o oder den ooo zur linken stehenden Ziffer in der grössern Zahl, (es muß aber allzeit wenigstens 1 da stehen) erstlich eine Einheit in die Stelle der nächsten o könne übergebracht werden, welche daselbst 10 gilt, von welchen 10 wieder 1 in den nächsten Ort übergetragen, hier 9 läst, und in dem Ort, in welchen es übergetragen worden, wieder 10 bedeutet, und so fort. Diesem zufolge kan man, zum Exempel, die Zahl 3000 durch das Uebertragen der Einheiten so zergliedern; 2000 und 900 und 90 und 10, und 3000 kan nichts anders bedeuten, als die eben angezeigte Zergliederung.

§. 65. Wenn demnach von der Zahl 3000 eine andere 573 sol abgezogen werden, so wird man, nachdem dieselbe, wie zusehen ist, mit Puncten bezeichnet worden, sagen müssen, 3 von 10, 7 von 9, 5 von 9, nichts von 2. Oder man wird die nicht punctirte o ein 10 müssen bedeuten lassen, eine punctirte o aber

3000
573
2427

9, und die punctirte Zahl, wie allezeit, eines weniger als sie ohne Punct bedeutet hätte, sie mag stehen wo sie wil.

§. 66. Wil man sich nach diesem allen so gesagt worden ist, nochmals kurz überzeugen, daß auf die gewiesene Art die Subtraction richtig verrichtet, und der Ueberschuß der einen der gegebenen Zahlen über die andere genau gefunden werde, so hat man nur darauf Acht zu geben, daß in allen gegebenen Regeln die grössere Zahl in die Theile, aus welchen sie bestehet, zu zertheilen gelehret worden sey, nemlich in ihre Einheiten von verschiedenen Ordnungen, und so ebenfals die kleinere, und daß so dann befohlen worden, die Theile der kleinern nach und nach von den Theilen der grössern abzuziehen, und den Ueberschuß eines jeden Theils der grössern Zahl über den Theil der kleinern, welcher von jenem abgezogen worden ist, unter der Querlinie anzumerken. Es ist klar, daß wenn man dieses alles beobachtet, endlich nothwendig unter diese Linie der Ueberschuß aller Theile der grössern Zahl über alle Theile der kleinern zu stehen kommen müsse. Der Ueberschuß aber der ganzen grössern Zahl über die ganze kleinere, ist dem Ueberschuß aller Theile der grössern Zahl über alle Theile der kleinern gleich. Denn alle Theile sind auch hier das Ganze. Demnach wird durch die angegebene Rechnungs-Art der Ueberschuß der grössern zwoer gegebenen Zahlen über die kleinere allzeit richtig gefunden.

Probe der Addition und Subtraction.

§. 67. Man siehet hieraus zugleich, daß wenn man sich versichern wil, man habe in der Anwendung der gegebenen Regeln nicht gefehlet, wie dieses aus Mangel der Achtsamkeit leicht geschehen kan, man nur den gefundenen Ueberschuß zu der kleinern der gegebenen Zahlen addiren dörfe. Ist richtig gerechnet, und also der wahre Ueberschuß gefunden worden, so muß die Summe dieser Zahlen der grössern Zahl gleich seyn, nach dem ersten Begrif, welcher von dem Ueberschuß zu haben ist I, 54. Man könte eben diesem zufolge die Addition durch eine wiederholte Subtraction probiren. Denn wenn man von der Summe dreyer Zahlen die erste abziehet, und von dem Ueberschuß wieder die zweyte, so muß endlich die dritte Zahl bleiben. Und so ist es auch wenn mehr als drey Zahlen zusammen gesetzt worden sind. Es bleibt allezeit die letzte übrig, wenn man alle andere ausser der letzten nach und nach von der Summe wegnimt. Erfolget dieses nicht, so hat man sich gewiß in der Anwendung der Regeln verstossen. Allein diese wiederhohlte Subtraction ist schwerer als die Addition selbst, und man kan in

dieser leichter als in jener fehlen. Da denn, wenn der letzte Ueberschuß nicht genau mit der letzten der zusammen addirten Zahlen übereinkomt, man nicht wissen kan, ob man in der Addition oder in der wiederhohlten Subtraction gefehlet habe. Man hat noch andere Arten der Proben vor der Addition, welche aber alle diese Unbequemlichkeit haben, daß man sich bey denselben leichter verstossen kan, als bey der Addition selbst. Es ist also am besten, daß man die Addition nicht anders probire, als indem man eine jede Säule Ziffer, welche man zusammen gerechnet hat, zweymal addire, und man kan, um desto gewisser zu seyn, einmal von den obersten anfangen und zu denselben nach und nach die untern zehlen, das zweyte mal aber von den untern Ziffern aufwärts steigen. Komt einerley Summe, so ist es nicht wahrscheinlich daß man gefehlet habe: sind aber die Summen verschieden, so ist ein Fehler da, welchen man durch die zum dritten mal wiederholte Addition zu verbessern trachten muß.

Die Anwendung der Addition und Subtraction.

§. 68. Von der Anwendung dieser beyden Arten der Rechnung ist nur noch etwas weniges zu gedenken. Es ist an sich klar, daß keine andere Zahlen können addiret, oder daß der Unterscheid keiner andern Zahlen könne gefunden werden, als solcher, deren einzelne Einheiten von einerley Grösse sind. Niemand kan sagen wie viel zwey Pferde zu vier Thalern hinzu gesetzt ausmachen, oder wie viel übrig bleibt, wenn man 3 Meilen von 7 Centnern abziehet. Die Sache ist bereits oben I, 1. berühret worden, da wir von den ersten Grundeigenschaften der Zahlen gehandelt haben.

§. 69. Zahlen also welche addiret werden sollen, oder deren eine von der andern weg zu nehmen ist, müssen einerley einfache Einheiten haben. Aber in welchen Fällen sind sie zu addiren, und in welchen Fällen, oder bey was vor Aufgaben, ist die kleinere von der grössern abzuziehen? Dieses einzusehen hat in allen besondern Fällen keine Schwierigkeit. Es nimt jemand im Januario 38 Rthl. ein, und im Februario 41, im Merz aber 52, und es wird gefragt, wie viel er in diesen 3 Monaten zusammen eingenommen habe? so ist klar, daß man die vorgegebene 3 Zahlen zusammen setzen müsse, um die ganze Einnahme der 3 Monaten zu bekommen, welche 131 Rthlr. beträgt. Gesetzt wieder, es hat jemand zu Anfang des Januarii 63 Rthlr. giebt aber in diesen Monat aus 47, wie viel hat er nach Verfliessung des Monats? Hier ist wieder klar, daß man die kleinere Zahl von der grössern abziehen müsse, um die Zahl 16 zu finden, welche den Ueberschuß anzei-

anzeiget. Wiederum gesetzt, es habe jemand zu Anfang des Februarii 16 Rthlr. und verzehre in diesem Monat 27 Rthlr. so wird er zu Ende desselben 11 Rthlr. schuldig, welches ebenfals durch die Subtraction gefunden wird. Alles dieses ist natürlich und ohne die geringste Schwierigkeit.

[*Fig.* 7.] §. 70. Eben so ist es auch mit sehr vielen andern Dingen beschaffen. Gesetzt, es geht jemand von dem Ort A nach B zu, und komt bis in C, kehret aber in C um, und gehet bis in D zurück, so mindert dieser Rückweg den Weg, welchen er vorhero von A nach B gemacht hatte, um seine ganze Grösse, und die Entfernung dieses Menschen von A nach der Seite B ist nunmehro nicht grösser als AD. Wäre aber jemand aus A auf der Linie AB gegangen, bis an C, und wäre an diesem Ort C umgekehret, und gerade zurück bis nach E gereiset, so wäre alsdenn seine Entfernung von A nach der andern Seite die AE. In beyden Fällen komt die Entfernung von dem Ort A, vorwärts oder rückwärts, wenn man die kleinere Entfernung von der grössern abziehet. Ist aber der Weg vorwärts AC grösser als der Weg rückwärts CD, so liegt die Entfernung AD vorwärts; im Gegentheil hat sich unser Reisender rückwärts von seinem Ort A entfernet, wenn der Weg AC, welchen er vorwärts gegangen ist, kleiner ist, als der Rückweg CE.

§. 71. Wenn wir auf diese Dinge etwas Acht haben, so finden wir, daß die Grössen von einerley Art, und die Zahlen welche diese Grössen ausdrücken, dergestalt beschaffen seyn können, daß sie, wenn sie zusammen kommen, einander vermehren, daß sie aber auch einander dergestalt zuwider seyn können, daß, so bald sie zusammen gebracht werden, und mit einander eine Grösse oder eine Zahl, welche diese Grösse ausdrücket, ausmachen, die grössern von den kleinern dergestalt vermindert werden, daß nichts, als der Ueberschuß der grössern Zahl über die kleinere übrig bleibt. Ein Thaler ist allezeit ein Thaler, ich mag ihn ausgeben oder einnehmen. Allein in Ansehung auf mein Vermögen ist es nicht einerley, ob ich den Thaler einnehme oder ausgebe. Nehme ich ihn ein, so wird mein Vermögen, welches zum Exempel aus 13 Thlr. bestehen mag, vermehret, und ich habe nunmehro deren 14, gebe ich ihn aber aus, so wird es vermindert, und ich habe nur noch 12 Thlr. Also vermehret alle Einnahme mein Vermögen, und verschiedene Einnahmen vermehren einander. Die Ausgabe vermindert das Vermögen, und verschiedene Ausgaben vermehren einander. Eben so vermehren auch die Schulden einander, vermindern aber das Vermögen, und das Vermögen vermindert die Schulden, denn ich kan diese dadurch tilgen, so daß sie ganz und gar nicht mehr da sind. So vermeh-

ren

ren alle die Wege, die ich vor mich gehe, ein ander, und die Wege, die ich zurück gehe, vermehren ein ander wiederum; im Gegentheil vermindert der Weg, den ich vor mich gegangen bin den Rückweg, und der Rückweg den erstern, nachdem nemlich dieser oder jener kleiner ist; eben so ist es mit vielen andern Dingen beschaffen.

§. 72. In der Anwendung also, wenn man eine Zahl haben wil, welche aus verschiedenen andern erwächset, wird man allzeit diejenigen addiren müssen, welche Grössen bedeuten, die einander vermehren. Im Gegentheil muß man die Subtraction gebrauchen, wenn man die Zahl haben wil, welche durch die Zusammensetzung zwoer Zahlen entstehet, die da Grössen bedeuten, deren eine die andere vermindert. Man kan die Subtraction nicht anders verrichten, als in dem man die kleinere Zahl von der grössern wegnimt, und der Ueberschuß ist so dann immer von der Beschaffenheit der grössern.

Bezeichnung der Grössen, die einander vermehren oder vermindern.

§. 73. Damit man sich aber hiebey desto weniger verwirre, und nicht etwa aus Uebereilung diejenige Grössen addire, welche einander vermindern, oder diejenige von einander subtrahire, welche einander vermehren, (welches desto leichter geschehen kan, weil beyderley Grössen von einerley Art sind, und einerley Einheiten haben, indem die Schulden, zum Exempel, eben so wohl als baares Geld nach Thalern; und der Rückweg eben so wohl als der Weg vorwärts nach Meilen gerechnet werden): so hat man zwey Zeichen beliebt, welche den Zahlen, oder überhaupt den Zeichen, womit man etwa die Grössen andeuten wil, vorgesetzet werden. Diese sind + und —, und werden nachfolgender massen gebraucht. Diejenige Zahlen vor welchen einerley Zeichen stehet, es mag dieses + oder — seyn, vermehren einander, wenn sie zusammen kommen. Im Gegentheil aber, wenn vor einer Zahl + stehet, und vor einer andern —, so wird dadurch angezeiget, daß sie Grössen bedeuten, welche einander vermindern. Es ist sonst nichts bey der Sache zu merken. Sind verschiedene Zahlen da, deren einige einander vermehren, andere aber jene vermindern, so kan ich der ersten vorsetzen was ich wil. Gemeiniglich schreibet man zu derselben +, oder läst sie vielmehr ohn einiges Zeichen, indem man eine Zahl, vor welcher gar kein Zeichen stehet, allzeit so ansiehet, als ob sie mit + bezeichnet wäre. Vor die übrigen Zah-

len setzet man + wenn sie die erste, welcher eben dieses Zeichen vorgeschrieben ist, vermehren, und — wenn sie dieselbe vermindern.

§. 74. Ein Exempel kan die Sache in ihr völliges Licht setzen, welche an sich selbst klar genug wäre, wenn sie nicht zuweilen verdunkelt würde. Es wird angegeben, es nehme jemand von seinen Gütern des Jahrs 395, gebe aber dargegen aus vor Wohnung 57, und vor seinen Tisch 175, ferner nehme er von einer Besoldung jährlich 342 und gebe vor Kleider aus 45, an Nebendingen habe er einzunehmen 97, und gebe dagegen noch aus 185. Man fragt, wie viel er übrig behalte, oder wie viel er mehr ausgebe als er einnimt; denn eins oder das andere wird hier gefunden. Das gesuchte ist $395-57-175+342-45+97-185$. Die Zahlen nun vor welchen + stehet, vermehren hier das Vermögen, die andern vermindern es. Die erstern zusammen geben +834, die andern — 462, und dieses letztere von dem erstern abgezogen, läst +372, um welche Summe nach Ablauf des Jahrs das Vermögen vermehret wird. Eben dieses wäre gefunden worden, wenn man gesetzt hätte $-395-97-342+57+175+45+185$, da die Zahlen von der erstern Art, die das Vermögen vermehren, mit —, die andern aber, welche es vermindern, mit + bezeichnet sind.

§. 75. Man würde diese Zeichen nicht nöthig haben, wenn man immer die Einnahme auf eine Seite, und die Ausgabe auf die andere setzen, beydes zusammen rechnen, und hernach das kleinere von dem grössern abziehen wolte, folgender gestalt:

395	57
97	175
342	45
	185
834	462

Der Ueberschuß ist Gewinst oder Verlust, nachdem die Einnahme oder die Ausgabe grösser ist. Allein es ist nicht allezeit bequem, diese Weitläufigkeit zu machen: und alsdenn unterscheiden die Zeichen + und — dergleichen Zahlen eben so wohl, als wenn man sie in zwo verschiedene Reihen gebracht hätte.

§. 76. Man hat sich mit Fleiß enthalten die Namen dieser Zeichen +, — anzugeben. Sie können falsche Begriffe beybringen, wenn man auf ihre eigentliche Bedeutung Acht hat. Man nennet das erste *plus* und das andere *minus*. Diese Worte können so verstanden werden, als ob die Grössen, so mit dem ersten + bezeichnet sind, allzeit vermehrten, und die

an-

andern mit — verminderten. Und doch vermindern die mit + gezeichneten eben so wohl als die, welche — vor sich haben, und verschiedene, die mit — bezeichnet sind, vermehren einander, wie auch alle diejenige thun, so + vor sich haben. Das Beste ist also, wenn man diese Wörter als Thone annimt, die zu nichts, als bloß die Zeichen + — anzudeuten, bestimmet sind, ohne sich um ihre anderweitige Bedeutung im geringsten zu bekümmern.

§. 77. Bey dem Gebrauch dieser Zeichen + und —, werden die Grössen, deren Zahlen mit + bezeichnet sind, als solche angesehen, die etwas würklich setzen, und man nennet sie aus dieser Ursache auch **Positiv**. Im Gegentheil betrachtet man diejenigen, deren Zahlen das Zeichen — vor sich haben, in Ansehung jener, als **Negativ** oder **Privativ**, weil sie immer von denen, die als positiv betrachtet werden, so vieles vernichten als sie selbst betragen. Es ist aber keines weges eine innere Beschaffenheit der Grössen selbst vorhanden, welche diese positiv, und andere wieder negativ machte; sondern es komt bloß auf unsere Willkühr an, welche von zwoen einander entgegen gesetzten Grössen wir als positiv ansehen wollen; da denn die andere nothwendig negativ wird. Denn, gleichwie eine negative Grösse von derjenigen, welche in Ansehung derselben positiv ist, so viel vernichtet, als sie selbst beträgt: eben so vernichtet im Gegentheil eine positive Grösse, wenn sie mit einer grössern negativen zusammen kömt, immer einen Theil der letztern, der der ganzen positiven Grösse gleich ist. Also hat auch hierinne die eine vor der andern keinen Vorzug. Doch liegt gemeiniglich in der Sache selbst, bey welcher wir uns mit der Rechnung beschäftigen, etwas so uns beweget, mehr diese als jene zwoer Grössen, die einander zu wider sind, als Positiv oder Negativ anzusehen. Ein Beyspiel wird dieses völlig klar machen, und zeigen, wie ferne diese Dinge willkührlich sind.

§. 78. Ein Schiffer nimt sich vor von einer in der offenen See liegenden Insul nach Westen zu segeln, und leget würklich den ersten Tag, nachdem er ausgelaufen ist, 47 Meilen von diesen Wege zurück. Den Tag darauf aber wird er 28 Meilen zurück nach Osten getrieben, und den folgenden zwingt ihn der Wind noch andere 37 Meilen nach dieser Seite zu machen. Endlich kan er am vierten Tag seinen Weg wieder verfolgen, und er fährt an demselben 21 Meilen nach Westen. Hiebey können verschiedene Fragen vorfallen: und unter diesen ist die erste, wie viel Meilen das Schif überhaupt fortgegangen sey? Weil hier die Strecke, nach welcher es gelaufen ist, ganz in keine Betrachtung komt, so wird diese

Frage dadurch beantwortet, daß man die Summe von allen Tagereisen nimt; und es ist der ganze Weg 47+28+37+21, das ist, 133 Meilen. Man hat hier nicht nöthig die Zahlen durch verschiedene Zeichen von einander zu unterscheiden, weil die eine nicht anders gebraucht wird, als die andere. Zweytens kan gefragt werden, wie viel dieses Schif Meilen zurück gelegt habe, in dem es nach Abend gesegelt ist, und wie viel nach Morgen? Da hier die Zahlen, welche den Weg nach Abend anzeigen, allerdings von denjenigen zu unterscheiden sind, die den Weg nach Morgen ausdrücken; so ist es nicht undienlich, dieselbe mit verschiedenen Zeichen zu bemerken. Es ist an sich einerley, ob man den erstern oder die letztern das Zeichen +, und den übrigen das — vorsetzt. Weil aber der Weg nach Westen derjenige ist, welchen das Schif hat gehen sollen, und es bloß gezwungen von Abend nach Morgen gegangen ist, so ist es natürlich den erstern Weg sich als positiv vorzustellen, und den letztern als privativ. Zeichnet man also die Zahlen folgender gestalt 47 — 28 — 37 + 21, so sihet man leicht, daß der ganze Weg nach Abend 68, und der nach Morgen 65 Meilen ausmache. Endlich ist die letzte Frage, wie viele Meilen sich das Schif von der Insel, aus welcher es ausgelaufen ist, entfernet habe, und nach welcher Seite, ob gegen Abend oder gegen Morgen? Diese zu beantworten, muß der ganze Weg nach Morgen von dem ganzen Weg nach Abend, oder dieser von jenen, abgezogen werden. Es ist eins, ob man dieses thut, nachdem man diese Wege erst in Summen gezogen hat, oder ob man die Zahlen, wie sie anfangs da stunden, nach Maaßgebung ihrer Zeichen, nach und nach vereiniget, das ist, addiret oder subtrahiret. Doch scheinet das letztere in vielen Fällen bequemer, und hiebey äussert sich der Nutzen der Zeichen + und — vornemlich. Die mit denenselben bezeichnete Zahlen waren 47 — 28 — 37 + 21. Die zwo erstern 47 — 28 sind so viel als + 19. Diese 19 gilt mit der dritten 19 — 37, das ist — 18, und diese mit der letzten — 18 + 21 oder + 3. Es ist also nach allen diesen Reisen das Schif nur um 3 Meilen nach der Abendseite von seiner Insel entfernet. Am Ende des dritten Tages befand es sich an der Morgenseite der Insel, in einer Entfernung von 18 Meilen, welches beydes die Zahl — 18 anzeiget, und daß es am Ende des zweyten Tages 19 Meilen gegen Abend von eben der Insel entfernet gewesen sey, ist aus der Zahl + 19 zu erkennen. Man würde nichts anders gefunden haben, wenn man den Weg nach Morgen positiv, und den nach Abend negativ genommen hätte.

Die Addition und Subtraction gewisser Brüche.

§. 79. Hat man verschiedene Brüche von einerley Benennung, die sich auf einerley Einheiten beziehen, zu einander zu addiren, oder den kleinern von dem gröſſern abzuziehen, so läst man die Nenner stehen, und verrichtet die aufgegebene Rechnungsart bloß mit den Zehlern. Denn die Nenner zeigen bloß an, was das vor Theile sind, welche die Zehler zehlen, als in den beyden Brüchen $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{9}$ die neunten Theile der Einheit: die Zehler bestimmen die eigene Zahl dieser Theile I, 33. Die Grösse der Theile, welche gezehlet werden, ist in dem gegebenen und in ähnlichen Fällen einerley, denn man setzt bey den zwey Brüchen einerley ganze Einheiten zum voraus, und die neunten Theile von eben dem ganzen Dinge, und überhaupt die Theile welche kommen, wenn einerley Ganzes zwey oder mehr mal in gleich viele gleiche Theile getheilet wird, können nicht verschieden seyn: Demnach zehlen die Zehler der Brüche einerley Theile, und wenn man also die Zahlen aller der Theile, die in beyden Brüchen vorkommen, und folgends die beyden Brüche selbst, zusammen rechnen wil, so hat man nichts als die Zehler zusammen zu rechnen, und die Nenner zu lassen wie sie sind. Denn in der Summe kommen allezeit solche Einheiten heraus, als in den Zahlen enthalten sind, welche zusammen gesetzt werden, und folgends in unserm Exempel Neuntheile. Demnach ist $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$ so viel als $\frac{7}{9}$. Und auf eben die Art siehet man, daß $\frac{5}{9}-\frac{2}{9}$ nichts anders als $\frac{3}{9}$ seyn könne. Man kan nach dieser Anweisung so viel Brüche von einerley Benennung mit einander vereinigen als man will: $\frac{5}{17}-\frac{3}{17}-\frac{8}{17}+\frac{9}{17}+\frac{2}{17}$, ist so viel $\frac{16}{17}-\frac{11}{17}$ das ist $\frac{5}{17}$, und $\frac{3}{18}-\frac{7}{18}+\frac{2}{18}$ ist so viel als $-\frac{2}{18}$.

§. 80. Damit wir inskünftige dergleichen Sätze bequemer ausdrücken können, werden wir uns des gewöhnlichen Zeichens = bedienen, welches bedeutet, daß die Zahlen oder andere beliebige Zeichen der Grössen, welche vor diesen Zeichen stehen, denjenigen gleich sind, welche nach denselben gesetzt sind, oder daß die erstern so viel ausmachen, als die letztern: welchem zufolge die eben erwehnte Sätze dergestalt auszudrücken sind, $\frac{5}{17}-\frac{3}{17}-\frac{8}{17}+\frac{9}{17}+\frac{2}{17}=\frac{16}{17}-\frac{11}{17}=\frac{5}{17}$, und $\frac{3}{18}-\frac{7}{18}+\frac{2}{18}=-\frac{2}{18}$.

§. 81. Man siehet überhaupt gar leicht, daß wenn verschiedene Zahlen zu vereinigen sind, als die eben bemerkte Brüche, und wenn eine einzige Zahl zu finden ist, welche so viel beträgt als sie alle I, 78. es gar nicht darauf ankomme, in was Ordnung man sie vereinige. In dem eben wiederhohlten Exempel, giebt der erste Bruch $\frac{5}{17}$ mit dem andern $-\frac{3}{17}$ den Bruch $\frac{2}{17}$, dieser mit dem dritten $-\frac{8}{17}$ giebt $-\frac{6}{17}$, wenn man zu diesem den vier-

ten $\frac{9}{17}$ setzet, erhält man $\frac{3}{17}$, und noch der fünfte $\frac{2}{17}$ darzu, bringt $\frac{5}{17}$, wie vorher. Und eben dieses komt, wenn man die Brüche in einer andern Ordnung setzt, und so dann vereiniget. Denn man setzet doch allemal die mit + bezeichnete alle zusammen, wie auch die mit —, und nimt den Ueberschuß der grössern Summe über die kleinere.

Begriffe von der Multiplication.

§. 82. **Multipliciren**, eine neue Rechnungsart, heisset eine Zahl aus einer bekanten dergestalt machen, wie eine andere ebenfals bekante Zahl aus der Einheit entstehet. Sol ich 7 durch 3 multipliciren; so habe ich mir vor allen Dingen die Art und Weise vorzustellen, wie die letztere dieser Zahlen 3, durch welche ich die erstere 7 multipliciren soll, aus der Einheit entstehet. Dieses einzusehen ist etwas leichtes. Die Zahl 3 wird aus der Einheit, wenn man die Einheit dreymal nimmet, oder wenn man dieselbe dreymal setzet, und diese Einheiten addiret; Eben so sol ich nun auch aus der Zahl 7 eine neue Zahl machen. Ich sol diese Zahl 7 dreymal setzen, und so denn addiren, die Summe, die dergestalt gefunden wird 21, ist diejenige Zahl, welche durch die Multiplication solte gefunden werden.

§. 83. **Es kommen demnach bey der Multiplication drey Zahlen vor**, deren zwo bekant oder gegeben sind, und die dritte aus den zwo ersten durch die Multiplication gefunden wird. Die erste ist diejenige, welche **zu multipliciren** ist, das ist, aus welcher eine neue Zahl soll gemacht werden, dergleichen in unserm Exempel die Zahl 7 war. Die zweyte diejenige, nach deren Vorschrift aus jener eine neue Zahl zu machen ist, indem man nemlich darauf siehet, wie dieselbe aus ihrer Einheit entstehet. Diese heisset **die multiplicirende Zahl**, und war in dem vorstehenden Exempel 3, und endlich wird die dritte Zahl, welche durch die Multiplication solte gefunden werden, als hier 21, das **Product** genennet.

§. 84. Dieser allgemeine Begrif der Multiplication begreift zwey Fälle in sich, welche insonderheit wohl von einander zu unterscheiden sind. Die multiplicirende Zahl ist entweder eine ganze Zahl, oder ein Bruch. Es kan zwar auch die Zahl, welche durch jene zu multipliciren ist, entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn, allein es ist nicht nöthig darauf zu sehen, weil die Multiplication fast nach eben den Regeln, wenigstens nach eben den Grundsätzen, verrichtet wird, es mag diese Zahl ganz oder gebrochen seyn.

§. 85. Daß aber eine Multiplication durch eine ganze Zahl ganz was

anders sey, als eine Multiplication durch einen Bruch, siehet man daraus, weil eine ganze Zahl ganz anders aus der Einheit entstehet, als ein Bruch. Eine ganze Zahl zu erhalten, wird die Einheit vervielfältiget, und die Zahl wird dadurch grösser als die Einheit. Ein Bruch aber entstehet, indem man ein oder etliche dergleichen Theile, in welche man die Einheit zerfället hat, annimt, und ein ächter Bruch ist kleiner als die Einheit, I, 11. Sol demnach aus einer Zahl, eine andere eben so gemacht werden, wie ein Bruch aus einer Einheit wird, das ist, soll eine ganze Zahl durch einen Bruch multipliciret werden, so muß man die ganze Zahl in so viele gleiche Theile theilen, als viele der Theile sind, in welche man die Einheit getheilet hat, den Bruch herauszubringen, und dieser Theile muß man so viele annehmen, als viele Einheiten in dem Zehler des Bruchs enthalten sind. Dieses ist viel schwerer als das erste, und gründet sich auf dasselbe. Wir werden demnach uns vor allen Dingen die Multiplication durch ganze Zahlen bekant machen müssen. Worzu doch auch die Multiplication durch zehentheilichte Brüche gebracht werden kan, weil diese aus eben den Grundsätzen fliesset, der wir uns bedienen werden, die Multiplication durch ganze Zahlen begreiflich zu machen.

Grundsätze zur Multiplication.

[*Fig.* 8.] §. 86. Damit man sich aber diese Grundsätze recht deutlich vorstellen möge, so nehme man eine beliebige Zahl von Einheiten, von was Art sie auch seyn mögen, dergleichen in der Zahl zwischen AB durch die * * angedeutet werden, unter welchen man sich vorstellen kan was man will, auch so gar beliebige Theile der Einheiten, als siebentheile, zwölftheile oder etwas dergleichen. Diese Zahl AB ist die, welche zu multiplicieren ist. Die andere Zahl sey diejenige, welche zwischen CD stehet, deren Einheiten durch . . . ausgedrückt worden sind, um sie mit den voriaen nicht zu verwirren. Wir stellen uns vor, daß diese CD eine ganze Zahl sey, es bedeuten demnach die . . . ganze Einheiten und keine Theile der Einheiten. Diese Zahl CD ist diejenige, durch welche die vorige AB multipliciret werden soll. Man setze zu dem Ende vor eine jede Einheit, welche in der Zahl CD angetroffen wird, die Zahl AB ganz, und bringe auf diese Art die in Form eines Vierecks zwischen ABEF geschriebene Zahl heraus. Diese wird das Product seyn, und aus der Betrachtung dieser Zahl sind

ver-

verschiedene Eigenschaften der Producte einzusehen, welche auf eine andere Art etwas schwerer heraus zu bringen wären.

§. 87. Das die Zahl zwischen ABEF das würkliche Product sey, welches durch die Multiplication der Zahl AB durch die Zahl CD entstehet, ist klar genug. Denn man siehet volkommen deutlich, daß diese Zahl ABEF aus der Zahl AB eben so entstehe, wie die CD aus der Einheit entstehet, weil man vor jede Einheit, welche in der CD anzutreffen war, die Zahl AB selbst in die Zahl ABEF gebracht hat. Man siehet aber auch, daß die Multiplication der Zahl AB durch die ganze Zahl CD, nichts anders als eine wiederholte Addition der zu multiplicirenden Zahl AB erfordere, und daß folgends die Einheiten des Products ABEF von den Einheiten der Zahl AB, welche zu multipliciren war, nicht verschieden seyn können. Denn die Einheiten der Summe sind von den Einheiten der Zahlen, welche man zusammen gesetzt hat, niemals verschieden.

§. 88. Die Einheiten der multiplicirenden Zahl CD aber haben in das Product ABEF ganz und gar keinen Einfluß. Es wird eben die Zahl ABEF heraus gebracht, was man sich auch vor Dinge unter den ... vorstellen mag. Es dienet die Zahl CD bloß dazu, daß sie anzeige, wie das Product ABEF aus der zu multiplicirenden Zahl AB zu machen ist, und dieses zeiget sie durch die Art und Weise an, wie sie selbst aus ihrer Einheit entstehet. Es entstehen aber vier Pferde aus einem Pferd nicht anders, als vier Thaler aus einem Thaler, oder vier Ellen aus einer Elle entstehen. Deswegen hat man auf die Grösse oder Art der Einheiten der multiplicirenden Zahl gar nicht zu sehen, und deswegen pflegt man auch nicht zu sagen, man soll, zum Exempel, 5 Ellen durch 3 Thaler multipliciren, ob zwar dieses eine gar richtige Bedeutung haben und anzeigen würde, man soll aus 5 Ellen eine andere Zahl der Ellen eben so machen, wie man 3 Thaler durch die wiederhohlte Zusammensetzung eines einzelen Thalers heraus bringen kan. Es komt uns diese Redensart 5 Ellen durch 3 Thaler zu multipliciren, und andere dergleichen, wunderlich vor, und dieses aus keiner andern Ursache, als weil die Benennung der Einheiten in der multiplicirenden Zahl überflüssig ist, und man bloß hätte sagen sollen, man soll 5 Ellen durch die Zahl 3 multipliciren, oder dreymal nehmen, ohne anzuzeigen, was in dieser Zahl 3 vor Einheiten enthalten sind.

§. 89. Wenn demnach ein Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren ist, $\frac{5}{7}$ zum Exempel durch 4, so hat man bloß den Zehler des Bruchs durch die Zahl 4 zu multipliciren, durch welche der Bruch multipliciret werden soll, und das Product 20 an die Stelle des Zehlers in einen

Bruch

Bruch zu setzen, dessen Nenner der vorige 7 ist. Dieser Bruch $\frac{20}{7}$ ist das Product aus dem Bruch $\frac{5}{7}$ durch 4 multipliciret. Man siehet dieses aus der Figur ein, wenn man setzet, daß die Einheiten der Zahl AB siebentheile sind, und folgends die Zahl AB $\frac{5}{7}$ betrage. In dem Product ABEF sind 20 Einheiten, von der Grösse derjenigen, welche in AB enthalten sind, und folgends ebenfals siebentheile, es ist demnach allerdings das Product $\frac{20}{7}$. Oder man stelle sich vor, daß, wenn der Bruch $\frac{5}{7}$ durch 4 zu multiplicieren ist, man denselben viermal setzen, und so dann addiren müsse. Es ist demnach das Product $\frac{5}{7}+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}$. Will man die Addition würklich verrichten, so werden nur die Zehler addiret, der Nenner bleibt unverändert; I, 79. Nun ist diese Addition der Zehler $5+5+5+5$ nichts anders, als eine Multiplication des Zehlers 5 durch die Zahl 4, durch welche der Bruch solte multipliciret werden. Es ist nichts leichter als diese Betrachtungen auf alle ähnliche Fälle anzuwenden.

[*Fig. 8. & 9.*] §. 90. Multipliciret man die Zahl CD, welche vorher die multiplicirende Zahl war, durch AB, welche vorher multipliciret wurde, (wobey man sich aber vorstellen muß, daß AB aus ganzen Einheiten bestehe, um nicht ausser die Gränzen unserer gegenwärtigen Betrachtung zu kommen,) so wird das Product dasjenige werden, welches sich in der 9ten Figur CDEF darstellet. Die Einheiten dieses Products können von den Einheiten des vorigen ABEF in der 8ten Figur verschieden seyn, den sie sind von der Art der Einheiten in der Zahl CD, da die vorige von der Art der Einheiten in AB waren. Doch ist die Zahl der Einheiten in dem Product CDEF einerley mit der Zahl der Einheiten in dem Producte ABEF, wie man sehen kan, wenn man auf die Art, wie diese beyde Producte enstanden sind, etwas Acht haben will. Es können nemlich die Zahlen der Einheiten, dieser in Form der Vierecke geschriebenen Producte, deswegen unmöglich verschieden seyn, weil in beyden so wohl nach ihren Längen gleich viele Einheiten stehen, als auch nach ihren Breiten. Wenn man demnach bloß auf die Zahl siehet, und sich darum nicht bekümmert, von was Grösse die Einheiten sind, welche gezehlet werden, wie dieses bey den ganzen Zahlen gemeiniglich zu geschehen pfleget I, 5. so muß man überhaupt sagen, daß jede zwo ganze Zahlen, wenn man eine durch die andere multipliciret, einerley Product bringen, man mag die erste durch die andere, oder die andere durch die erste multipliciren. Also ist 2 mal 3 so viel als 3 mal 2, nemlich 6, und so in allen übrigen Fällen.

Bey der Multiplication gebräuchliche Zeichen und Wörter.

§. 91. Aus dieser Ursache unterscheidet man auch die zwo gegebene Zahlen, deren eine durch die andere zu multipliciren ist, in den meisten Fällen nicht einmal durch die Benennung, und giebt der einen so wohl als der andern den Namen eines Factors des herauszubringenden Products, welches man auch ein Factum nennet. Man pflegt wohl zuweilen die eine den ersten, und die andere den zweyten Factor zu nennen; allein es ist willkührlich, welche man zum ersten und welche man zum zweyten nehmen will, also werden sie auch durch diesen Zusatz nicht von einander unterschieden. So sind 2 und 3 die zween Factore des Products 6, und zwar 2 der erste, 3 der zweyte, oder 3 der erste und 2 der zweyte, nachdem man sie in dieser oder jener Ordnung geschrieben hat. Wir werden hernach sehen, daß dieser Satz auch von den Brüchen richtig ist, man kan also diese Benennung auch bey dieser Art Zahlen gebrauchen. Doch bis dieses wird können erwiesen werden, wollen wir, was gesagt worden ist, bloß von ganzen Zahlen verstanden haben.

§. 92. Aus eben der Ursache pflegt man auch ein Factum, dessen zween Factore die Zahlen 3 und 4 sind, ohne Unterscheid dergestalt zu bezeichnen 3×4 oder 4×3, und das geschriebene Creutz ist allezeit ein Zeichen der Multiplication, und des dadurch entstehenden Products. Man bedienet sich auch zuweilen eines blossen Puncts, und bezeichnet das Product der Factore 4 und 3 dergestalt 4. 3 oder 3. 4. Sind verschiedene Zahlen in einander zu multipliciren zum Exempel 3. 4. 5, 6, nemlich die erste derselben 3 durch die zweyte 4, und das hieraus entstehende Product 12 durch die dritte Zahl 5, und endlich das Product 60 welches nunmehro erhalten worden ist durch die vierte Zahl 6, wodurch 360 komt; so zeichnet man dieses Product dergestalt: $3 \times 4 \times 5 \times 6$, und so in allen übrigen Fällen, so viele Factore auch seyn mögen.

Verfolg der Gründe der Multiplication.

[*Fig. 10.*] §. 93. Wenn man den Factor AB, welchen wir als die zu multiplicirende Zahl ansehen, theilet wie man wil in C und D, und multipliciret denselben so dann nach der jetzt beschriebenen Art, so bekomt das Product AE eben so viele Theile AF, CG, DE, als man der zu multiplicirenden Zahl AB gegeben hat, und diese Theile des Products sind Pro-

ducte, welche aus den Theilen der Zahl AB entstanden sind, indem diese Theile durch eben die Zahl multipliciret worden, durch welche man die ganze AB multipliciret hat. AF nemlich ist das Product aus AC dem ersten Theil des Factors AB, und aus der multiplicirenden Zahl; CG ist das Product aus CD, dem zweyten Theil des Factors AB und der multiplicirenden Zahl, und DE das Product aus dem dritten Theil eben dieses Factors DB, und der multiplicirenden Zahl; die Summe aber dieser drey kleinern Producte AF + CG + DE ist dem ganzen Producte AE gleich. In der Figur deren wir uns hier bedienen, ist AB = 10, getheilet in die Theile 3, 5, 2, und es bestehet das Product aus 10 und der multiplicirenden Zahl 4, welches 40 ist, aus den Producten 4 mal 3 oder 12, 4 mal 5 oder 20, 4 mal 2 oder 8, so daß 40 der Summe dieser Zahlen 12+20 +8 gleich ist.

§. 94. Man kan demnach ein jedes Product einer jeden Zahl, so durch eine andere Zahl multipliciret werden soll, bekommen, wenn man jene in Theile zerfället, durch deren Addition sie heraus komt, hernach jedes dieser Theile durch die multiplicirende Zahl würklich multipliciret, und die also heraus gebrachte Producte zusammen setzet, oder addiret. Zum Exempel, ich soll sagen, wie viel komt, wenn man 598 durch 7 multipliciret, so zerfälle ich die erste Zahl 598 in Theile wie ich will, am bequemsten in diese 500, 90, 8. Nun ist 7 mal 500 = 3500, 7 mal 90 = 630, und 7 mal 8 = 56, demnach ist 7 mal 598 = 3500 + 630 + 56 oder 4186.

[*Fig. II.*] §. 95. Wenn man die Theile der zu multiplicirenden Zahl AB gleich annimt, wie in der 1sten Figur geschehen ist, da die Theile der zu multiplicirenden Zahl AB sind AC, CD, DB, so werden auch die kleinern Producte AF, CG, DE, aus welchen das grössere AE bestehet, alle gleich. Es komt demnach dieses AE, wenn man eins der kleinern Producte AF so oft nimt, als viele der Theile des getheilten Factors AB sind. Es ist AB in dieser Figur = 6, und diese Zahl ist in 3 gleiche Theile getheilet, deren jedes 2 Einheiten hat. Das Product aber aus 6 und 4, das ist 24, wird erhalten wenn man 2 durch 4, und das Product dieser Zahlen durch 3 multipliciret.

§. 96 Wenn man also die Helfte einer Zahl, durch eine andere Zahl multipliciret, so komt halb so viel heraus, als wenn man jene Zahl ganz genommen durch diese multipliciret hätte; multipliciret man den dritten Theil einer Zahl durch eine andere, so komt der dritte Theil desjenigen, so durch die Multiplication der ganzen Zahl entstanden wäre, und so immer fort. Im Gegentheil wenn man eine Zahl verdoppelt oder zweymal nimt, und

multipliciret so dann die also verdoppelte Zahl durch eine andere, so komt zweymal so viel, als wenn man nur die einfache Zahl multipliciret hätte, nimt man sie dreyfach, so komt auch dreymal so viel und so ferner. Zum Exempel, die Helfte von 8 ist 4, 8 mit 5 multipliciret bringt 40, und 4 mit 5 multipliciret giebt 20, welches die Hälfte ist von 40. Der dritte Theil von 12 ist wieder 4, 12 aber mit 10 multipliciret giebt 120, und 4 auch mit 10 multipliciret, giebt nur 40, welches ebenfals der dritte Theil von 120 ist.

§. 97. Ferner ist auch aus der Betrachtung eben der Figur klar, daß wenn man die Zahl AH durch eine andere AC multipliciret, und das dadurch entstehende Product wieder durch eine andere, als hier durch drey, eben die Zahl AE kommen müsse, welche gekommen wäre, wenn man die Zahl AH so gleich durch das Product aus AC und 3, das ist durch AB, multipliciret hätte. Oder deutlicher: wenn man eine Zahl durch eine andere, und das hieraus entstehende Product durch eine dritte multipliciret, so komt eben das Product, welches man erhält, wenn man die erste Zahl durch das Product der zweyten und der dritten Zahl multipliciret. Die Zahl 2 durch 4 multipliciret giebt 8, und dieses Product durch 3, bringt 24, aber eben die 24 entstehen, wenn man 2 durch 3 mal 4, das ist durch 12 multipliciret.

§. 98. Aus allen diesen Betrachtungen folget, daß wenn man verschiedene Zahlen 2, 3, 4 5 in einander zu multipliciren, und deren Product 2×3×4×5 machen soll, man sich an die Ordnung dieser Ziffer gar nicht kehren dörfe, weil eben diese Ziffer in einer jeden andern Ordnung, als 5×4×3×2, oder 4×2×3×5 in einander multipliciret, eben das Product bringen müssen. Das Exempel zeiget die Richtigkeit des Satzes bey den vorliegenden Ziffern. Daß er aber seine allgemeine Richtigkeit habe, kan auf nachfolgende Art erwiesen werden.

§. 99. Wenn noch die Zahlen 2, 3, 4, 5 in einander zu multipliciren sind, so setze man an die Stelle einer unter derselben, welche man nehmen will, die Einheit. Wir wollen an statt der ersten 2 die Einheit nehmen. Alsdenn schreibe man die Einheit nach und nach in die erste, in die zweite, in die dritte, und die folgenden Stellen, indem man die übrigen Ziffer in ihrer Ordnung läst, und bringe dadurch folgende Ordnungen heraus: 1×3×4×5; 3×1×4×5; 3×4×1×5; 3×4×5×1. Man siehet leicht, daß wenn man diese Zahlen, in der Ordnung, in welcher sie stehen, in einander multipliciret, überall einerley heraus kommen müsse, weil

weil die Einheit nichts ändert, und würklich überall nur die Zahlen 3, 4, 5, in eben der Ordnung, in einander multipliciret werden.

§. 100. Nun setze man in der ersten Ordnung 1×3×4×5 an statt der 1 die Zahl, welche vorher an ihrer Stelle gestanden 2, oder was sie sonst vor eine seyn mag: wir wollen aber bey der 2 bleiben, und müssen also nunmehro 2×3×4×5 setzen. Man fange an die Multiplication in beyden Ordnungen zu verrichten, so ist oben beym Anfang 1 durch 3 zu multipliciren, hier aber 2 durch eben die 3. Man siehet leicht, daß in diesem letztern Fall doppelt so viel kommen müsse I,96. Fähret man nun in beyden Ordnungen fort, so wird immer dasjenige, so in der erstern einfach genommen multipliciret wird, nehmlich 1×3; 1×3×4 und so fort wenn mehrere Zahlen da wären, in der zweiten doppelt genommen, durch eben die Zahl multipliciret, wie man am deutlichsten sehen wird, wenn man die Multiplication würklich verrichtet. Also ist gewiß 2×3×4×5 doppelt so viel als 1×3×4×5.

§. 101. Nimt man nun die zweyte der Ordnungen in welchen die 1 stehet vor sich, welche ist 3×1×4×5, und setzet an statt der 1 eben die Zahl 2, so siehet man eben so leicht daß 3×2×4×5 doppelt so viel geben müsse, als heraus komt, wenn man 3×1×4×5 multipliciret, weil wieder 3×2 doppelt so viel ist als 3×1, die folgenden Factore aber einerley sind, und in eben der Ordnung stehen. Mit der dritten Ordnung ist es nicht anderst, wenn man auch hier an statt der 1 die 2 herstellet. In den zwoen Ordnungen 3×4×1×5 und 3×4×2×5 ist 3×4×2 doppelt so groß als 3×4×1, und der nächste Factor 5, macht nothwendig aus dem erstern doppelt so viel als aus dem andern. Eben so ist es auch in der letzten Ordnung, und in allen übrigen, welche bey mehrern als vier Zahlen, mit welcher man eben so umgehet, vorkommen.

§. 102. Es verdoppelt also der Factor 2 das Product welches sonst gekommen wäre in dergleichen Fällen beständig, er mag in der ersten Stelle, oder in der zweiten, oder in einer jeden andern stehen. Und man siehet eben so leicht, daß die Zahl 3 das Product immer dreymal grösser machen müsse: mit einem Wort, daß ein jeder der Factore, welche in dieser Ordnung 2×3×4×5×7×9, in einander zu multipliciren sind, noch eben das leisten werden, wenn man ihn aus seiner Stelle wegnimt, und an einen jeden andern Ort setzet. Der Factor 5 wird das Product, welches sonst gekommen wäre, immer fünfmal grösser machen, man mag ihn am Anfang, oder in der Mitte oder am Ende brauchen. Es kan aber durch die Versetzung eines jeden Factors eine jede Ordnung derselben heraus gebracht werden, wie man leicht siehet. Es ist also an der Ordnung, in

welchen man einerley Factore in einander multipliciret, niemals etwas gelegen, sondern man kriegt endlich immer einerley Product heraus.

[*Fig. 12.*] §. 103. Es ist noch eine einzige Betrachtung zu machen übrig, ehe wir zur würklichen Ausübung der Multiplication übergehen, welche diese ist. AB und CD sind zwo Zahlen, welche man nehmen kan wie man will, nur müssen ihre Einheiten von einerley Grösse seyn. Man hat sie beyde durch einerley Zahl AE multipliciret, und dadurch sind die in Form der Vierecke, zwischen ABFE und CDGH geschriebene Producte gekommen. Wenn man diese betrachtet, so findet man, daß das Product ABFE aus dem Product CDGH eben so entstehen könne, wie die Zahl AB aus der Zahl CD entstehet. Jedes dieser Produete ABFE, CDGH bestehet aus verschiedenen Zahlen, deren Einheiten in Form der Säulen über einander stehen, dergleichen sind AE, BF, CH, DG. Diese Zahlen sind einander alle gleich. Und es sind derselben in dem Producte *ABFE* so viele als viele Einheiten in der multiplicirten Zahl *AB* sind, und in dem Product CDGH sind eben dieser Zahlen als CH, DG so viele, als viele Einheiten die Zahl CD enthält. Hieraus ist das gesagte von den Zahlen, welche die Figur darstellet, gar leicht einzusehen. Denn gleichwie die Zahl AB aus der Zahl CD werden kan, wenn man diese CD in ihre zwo einzelne Einheiten theilet, und dieser Einheiten fünf annimt, eben so wird die Zahl ABFE aus der Zahl CDGH, wenn man diese letztern in zwey Theile von der Grösse der multiplicirenden Zahl CH theilet, und dieser Theile fünfe zusammen setzet.

§. 104. Oder man stelle sich eine Säule als AE, CH als eine Einheit vor, so sichet man, daß gleichwie AB aus fünf Einheiten bestehet, deren zwo die Zahl CD ausmachen, eben so bestehe auch das Product ABFE aus fünf Einheiten von der Grösse AE, deren zwo das Product CDGH ausmachen. Es zweifelt aber niemand, daß fünf Einheiten aus zwo Einheiten immer auf einerley Art entstehen können, von was Grösse auch diese Einheiten seyn mögen. Der Satz ist allgemein, und auch in dem Fall richtig, wenn die . . . in AB Theile der Einheiten sind, und AB eine gebrochene Zahl bedeutet.

Nähere Gründe zur Ausübung der Multiplication.

§. 105. Die Ausübung der Multiplication durch ganze Zahlen, erfordert zwar, dem zu folge so wir I, 87. gesehen haben, nichts anders als eine wiederholte Addition. Man siehet aber auch leicht ein, daß, wenn die multiplicirende Zahl nur etwas groß ist, diese Addition viel zu weitläuftig fal-

fallen müste. Doch kan man dieselbe vermittelst eines leichten Vortheils gar sehr in die Enge ziehen, welchen wir zuforderst weisen wollen, weil er sehr geschickt ist, die Gründe der Ausübung dieser Rechnungsart, wie sie gemeiniglich bey etwas grossen Zahlen verrichtet wird, recht deutlich zu zeigen.

§. 106. Es gründet sich diese Sache auf das nachfolgende. Eine Zahl wird zehen mal grösser als sie war, oder sie wird durch Zehne multiplicirt, wenn man ihr am Ende ein o beyfüget. Denn dadurch werden aus den Einheiten Zehner, aus den Zehnern Hunderte, aus den Hunderten Tausende, mit einem Wort alle Einheiten aller Ordnungen werden zehen mal grösser als sie vorher waren: oder alle Theile der Zahl, (denn die Einheiten von verschiedenen Ordnungen sind ihre Theile) werden zehen mal grösser, und also auch die ganze Zahl. Man siehet leicht daß man aus eben dem Grunde sagen kan, eine Zahl werde hundert mal grösser als sie war, wenn man ihr am Ende zwey oo beyfüget, tausend mal, wenn man drey ooo ans Ende derselben setzet und so fort. Also ist 2360 zehen mal so groß als 236, und 23600 ist hundert mal, 236000 aber tausend mal so viel.

§. 107. Man kan eben dieses auch anders ausdrücken. Wenn man eine Zahl nimt, in welcher der Ort der einzeln Einheiten wie gewöhnlich, mit einem (,) bezeichnet ist, und welche hinter diesem Zeichen noch einige andere Ziffern, oder oo hat, dergleichen die nachstehenden sind:

3573,29514 ; 2753,00000

und man setzet das (,) um eine Ziffer weiter nach der rechten zu, dergestalt:

35732,9514 ; 27530,0000

so wird die Zahl zehen mal grösser, oder sie wird durch zehen multipliciret, L 39: setzet man in eben der Zahl das Zeichen (,) noch um eine Ziffer weiter, und also um zwey Ziffern nach der rechten, so wird die Zahl hundert mal grösser und so fort, wie diese Zahlen weisen:

a) 3573,29514 ; 2753,00000
b) 35732,9514 ; 27530,0000
c) 357329,514 ; 275300,000
d) 3573295,14 ; 2753000,00
e) 35732951,4 ; 27530000,0

deren erstere bey a, man als einfach ansiehet, die zweyten bey b sind zehen mal, die dritten bey c hundert mal, die vierten bey d tausend mal, endlich die fünften bey e zehen tausend mal so groß als jene.

§. 108. Kehret man aber dieses um, so siehet man, daß eine Zahl zehen

zehen mal kleiner zu machen, man nichts nöthig habe, als das Zeichen der einzeln Einheiten um eine Stelle weiter nach der linken Hand zu rücken; und daß, wenn man eine hundert mal kleinere Zahl haben will, man dieses Zeichen noch um eine Stelle, und also in allen um zwo Stellen weiter nach der linken Hand bringen müsse, und so weiter. Die Zahlen welche eben hingesetzt worden, zeigen dieses deutlich. Denn, ist eine jede derselben, zum Exempel, die bey d, welche unmittelbar unter der bey c stehet zehen mal grösser als diese Zahl: so muß nothwendig die obere bey c, in welcher das Zeichen der einzeln Einheiten (,) um eine Ziffer weiter nach der linken zu stehet, zehen mal kleiner seyn, als die bey d.

§. 109. Ist nunmehro die Zahl, 2753,00000, welche eigentlich keine Brüche bey sich hat, sondern eine ganze Zahl ist, durch diese ganze Zahl 4235 zu multipliciren; so setze man vor die 5 Einheiten, die in der multiplicirenden Zahl anzutreffen sind, die zu multiplicirende Zahl wie sie ist fünf mal hin; vor die 3 Zehner, welche in der multiplicirenden Zahl enthalten sind, setze man die zu multiplicirende Zahl, nachdem man sie zehen mal grösser gemacht hat, dreymal; vor die zwey hunderte schreibe man sie, hundert mal vergrössert, zwey mal, und vor die vier tausende der multiplicirenden Zahl setze man sie endlich, tausend mal vergrössert, vier mal, und eben so verfahre man auch mit der Zahl 3573,29514 welche durch eben die Zahl 4235 zu multipliciren ist. Man addire sodann die dergestalt unter einander geschriebene Zahlen, folgender gestalt;

F,	2753, 2753, 2753, 2753, 2753,	A	3573,29514 3573,29514 3573,29514 3573,29514 3573,29514	A
	27530, 27530, 27530,	B	35732,9514. 35732,9514. 35732,9514.	B
	275300, 275300,	C	357329,514.. 357329,514..	C
	2753000, 2753000, 2753000, 2753000,	D	3573295,14... 3573295,14... 3573295,14... 3573295,14...	D
	11658955		15132904,91790	

Die

Die Summen werden die Producte seyn, welche man suchte. Denn die Zahlen bey A sind die gegebene zu multiplicirende Zahlen F 5 mal. Alle Zahlen B enthalten eben die Zahlen F zehen mal genommen, drey mal, oder überhaupt dreyssig mal, I, 97. und die Zahlen bey C enthalten eben diese Zahlen F hundert mal genommen, zwey mal, das ist zwey hundert mal, endlich enthalten die Zahlen bey D eben diese Zahlen F tausend mal genommen, fünf mal, oder fünf tausend mal. Daß also, wenn man alle die Zahlen bey A, B, C, D, zusammen setzet, man in der That in die Summe die zu multiplicirende Zahl F 5 mal und 30 mal und 200 mal, und noch 4000 mal bringet, so oft nemlich als in der Zahl 5+30+200+4000 oder 4235 die Einheit enthalten ist. Demnach wird nach der gegebenen Anweisung allerdings die vorliegende Zahl 2753, oder 3573,29514 durch 4235 multipliciret.

§. 110. Eben diese Rechnungsart hat auch statt, wenn die multiplicirende Zahl zehentheilche Brüche bey sich hat, oder aus bloßen zehentheilchen Brüchen bestehet. Es seyn die Zahlen 2753 und 325,94 zu multipliciren durch 43,523, so setze ich vor die 3, welche in der multiplicirenden Zahl am Ende stehet, und Tausendtheile bedeutet, die zu multiplicirende Zahlen, tausendmal verkleinert, 3 mal; vor die nächst daran stehende 2, setze ich die zu multiplicirende Zahlen, hundert mal verkleinert, 2 mal; vor die darauf folgende 5 schreibe ich sie zehenmal verkleinert, 5 mal, und so fort nach Anweisung des vorigen.

Multiplicirende Zahl . . . . 43,523 = M

zu multiplicirende Zahlen

2753 = F	325,94 = F
2,753 } A	0,32594 } A
2,753	0,32594
2,753	0,32594
27,53 . } B	3,2594 . } B
27,53 .	3,2594 .
275,3 .. } C	32,594 .. } C
275,3 ..	32,594 ..
275,3 ..	32,594 ..
275,3 ..	32,594 ..
275,3 ..	32,594 ..
2753, ... } D	325,94 ... } D
2753, ...	325,94 ...
2753, ...	325,94 ...
2753 . ... } E	3259,4 .... } E
2753	3259,4 ....
2753	3259,4 ....
2753	3259,4 ....
119818,819	14185,88662

Nun mache ich wieder die Summen dieser Zahlen, so sind diese Summen die gesuchten Producte, wie aus den Betrachtungen folgt deren wir uns eben bedienet haben.

§. 111. Nemlich, gleichwie die multiplicirende Zahl 43,523 = M aus der Einheit gemacht wird, wenn man erstlich die Einheit in tausend gleiche Theile theilet, oder tausend mal verkleinert, und solcher Theile 3 annimt, so denn die Einheit hundert mal verkleinert und 2 solcher Theile zu den vorigen setzet, ferner aber eben die Einheit zehen mal verkleinert, und 5 solcher Theile noch zu den vorigen füget, endlich noch 3 ganze Einheiten, und die Einheit zehen mal vergrössert, vier mal hinzu thut: eben so hat man die zu multiplicirende Zahlen F bey A, tausend mal verkleinert, 3 mal, bey B, hundert mal verkleinert, 2 mal, bey C, zehen mal verkleinert, 5 mal, bey D die Zahlen F selbst 3 mal, und endlich eben die F, bey E zehen mal vergrössert, 4 mal gesetzet, u. s. w. alsdenn aber, durch die Zusammensetzung aller dieser Theile, die Summen heraus gebracht, welche demnach allerdings aus den Zahlen F eben so entstanden sind, wie die multiplicirende

Zahl

Zahl M aus der Einheit entstanden ist, und folgends die richtige Producte ausmachen, welche man suchte I, 83.

§. 112. Hieraus siehet man nun, daß die Multiplication auf einerley Art verrichtet werde, von was Ordnung auch die Einheiten seyn mögen, welche in den Zahlen vorkommen, die einander multipliciren. Man siehet leicht, daß das Zeichen der einfachen Einheiten in die Arbeit selbst nicht den geringsten Einfluß hat. Man mag es zwischen diese oder jene Ziffer der einander multiplicirenden Zahlen setzen, so werden die Ziffern des Products dadurch nicht geändert: nur komt dieses Zeichen in dem Product an andere und andere Stellen, nachdem es in den Zahlen, deren eine die andere multipliciret, da oder dort stehet.

Die Ordnungen der Einheiten in dem Product zu bestimmen.

§. 113. Diesen Ort aber der einzeln Einheiten in dem Product zu bestimmen, ist gar nicht schwerer, und man kan bloß aus dem letzten Exempel einsehen, wie mit der Sache zu verfahren sey. Die zu multiplicirende Zahl desselben war 325,94, und diejenige durch welche sie solte multiplicret werden, 43,523. Man muste, die Multiplication gehörig zu verrichten, von der erstern, gleich anfangs den tausenden Theil schaffen; dieses geschah, indem man das Zeichen der einzeln Einheiten um drey Stellen weiter nach der linken zurück brachte, dergestalt 0,32594, wodurch nunmehro hinter das Zeichen der einzeln Einheiten so viele Ziffern mehr kommen, als vorher daselbst gestanden, als viele Ziffer in der multiplicirenden Zahl hinter der Stelle der einzeln Einheiten stehen. Nemlich in der zu multiplicirenden Zahl stunden vorher zwo Ziffern hinter dieser Stelle, und in der multiplicirenden Zahl waren ihrer drey daselbst anzutreffen. In der Zahl aber welche dergestalt heraus gebracht worden ist, sind fünf Ziffern hinter dem Ort der einfachen Einheiten befindlich. Man sieht nach einer kleinen Ueberlegung, daß es immer so gehen müsse, und daß allezeit, indem man anfängt, nach der gegenwärtigen Anweisung zu multipliciren, in der ersten Ziffer hinter dem Ort der einzeln Einheiten so viele Ziffern zu stehen kommen werden, als in den beyden Factoren zusammen dergleichen Ziffer anzutreffen sind. So viele Ziffer aber in dieser ersten Zahl hinter dem Zeichen der einzeln Einheiten (,) stehen, so viele stehen auch in dem Product hinter diesem Zeichen, wie bloß aus Betrachtung des Exempels, und aus dem, so von der Addition I, 51. gesagt worden, zu ersehen ist.

Demnach stehen allezeit in dem Product so viele Ziffer hinter dem Ort der einzelnen Einheiten, als viele Ziffer in den beyden Factoren zusammen daselbst anzutreffen sind. Man kan also, so bald die Zahlen, deren eine die andere multipliciren sol, gegeben sind, wissen, wie viel Ziffer in dem Product hinter dem (,) Zeichen der einzelnen Einheiten zu stehen kommen werden, oder, wie hoch oder niedrig die Ordnung der Einheiten seyn werde, die von der letzten Ziffer des Products bedeutet wird.

§. 114. Es ist nemlich die Zahl, welche diese Ordnung angiebet, und anzeiget, ob sie die dritte, vierte, fünfte oder eine noch niedrigere Ordnung sey, die Summe der Zahlen, welche die Ordnungen der Einheiten anzeigen, welche von den letzten Ziffern der Factoren bedeutet werden. Nachstehende kleine Exempel können die Sache noch deutlicher machen, wenn man bey denselben etwas stille stehen und sie überdenken wil. Es sind in denselben die Zahlen 352; 35,2; 3,52; 0,352 erstlich durch 32, so dann durch 3,2 und ferner durch 0,32 multipliciret worden.

352	35,2	3,52	0,352
352	35,2	3,52	0,352
352	352	35,2	3,52
352	352	35,2	3,52
352	352	35,2	3,52
11264	1126,4	112,64	11,264

35,2	3,52	0,352	0,0352
35,2	3,52	0,352	0,0352
352,	35,2	3,52	0,352
352,	35,2	3,52	0,352
352,	35,2	3,52	0,352
1126,4	112,64	11,264	1,1264

3,52	0,352	0,0352	0,00352
3,52	0,352	0,0352	0,00352
35,2	3,52	0,352	0,0352
35,2	3,52	0,352	0,0352
35,2	3,52	0,352	0,0352
112,64	11,264	1,1264	0,11264

§. 115. Dieses ist schon eine Erleichterung der Arbeit bey solchen Mul-

Multiplicationen, bey welchen zehentheilichte Brüche vorkommen. Es ersparet uns das Nachdenken, wie das Zeichen der einzelnen Einheiten (,) zu setzen sey, und man kan, nachdem man dieses weiß, bey allen Multiplicationen, eben so wie bey der Multiplication ganzer Zahlen durch ganze Zahlen, verfahren, ohne sich ehe um den Ort dieses Zeichens zu bekümmern, als bis man das Product fertig hat, da denn das Zeichen leicht gehörig zu setzen, und dadurch die Ordnung der Einheit, welche von jeder Ziffer des Products bedeutet wird, zu bestimmen ist. Die übrige Erleichterung fliesset aus dem nachfolgenden.

Die Multiplication am bequemsten zu verrichten.

§. 116. Wenn man eins von den vorigen Exempeln, oder auch das nachstehende vor sich leget, in welchem 3572 multipliciret ist durch 432.

3572 } A	=	7144
3572 }		....
		....
3572. }		10716.
3572. } B	=	.....
3572. }		.....
		.....
3572.. }		.....
3572.. }		.....
3572.. } C	=	14288..
3572.. }		
1543104	=	1543104

so siehet man leicht, daß die Addition, welche bey der gegenwärtigen Art zu multipliciren erfordert wird, auch also verrichtet werden könne, daß man erstlich die Zahlen bey A zusammen setzet, hernach die bey B, ferner die bey C, und nachdem man dergestalt die Summen A, B, C gefunden hat, dieselben in eine einzige Summe zusammen ziehet, welche das gesuchte Product seyn wird. Diese Addition der Zahlen bey A, B und C ist leichte: denn die Ziffer, welche zusammen zu setzen sind, sind von einerley Grösse. Aber man kan sie noch mehr erleichtern, wenn man sich bekant machet, was die einzeln Zahlen bis auf 9, wenn sie zwey, drey, vier bis neunmal zusammen gesetzet, oder welches auf eben das hinaus komt, wenn sie durch 2, 3, 4 bis 9 multipliciret werden, vor Summen oder Producte geben. Denn

man siehet, daß die erste Summe der Zahlen bey A herausgebracht werde, wenn man jede Ziffer der bey A vorkommenden Zahlen, zwey mal nimt, oder sie durch die letzte Ziffer der multiplicirenden Zahl multipliciret. Eben so komt jede Ziffer der Summe bey B, wenn man jede Ziffer der Zahlen bey B dreymal nimt, oder wenn man sie durch die zweyte Ziffer von der letzten in der multiplicirenden Zahl, multipliciret; und jede Ziffer der Summe bey C, wenn man jede Ziffer der Zahlen bey eben dem C durch viere multipliciret, welches die dritte Ziffer von der letzten, in der multiplicirenden Zahl ist.

§. 117. Demnach kan man nunmehro, ohne der Weitläuftigkeit Addition, mit der Multiplication folgender gestalt verfahren. Man schreibet die zu multiplicirende Zahl, und setzet die multiplicirende dergestalt darunter, daß die letzten Ziffer dieser Zahlen gerade unter einander stehen, ohne sich um die Ordnung der Einheiten, die in diesen Ziffern gezehlet werden, zu bekümmern, nachhero multipliciret man alle Ziffer der obern Zahl durch alle Ziffer der untern, und schreibt die Producte welche heraus gebracht werden dergestalt, daß man jedes Product unter derjenigen Ziffer der multiplicirenden Zahl zu schreiben anfängt, durch welche man die zu multiplicirende Zahl würklich multipliciret hat, um dieses Product heraus zu bringen. Hat man mit allen Ziffern der multiplicirenden Zahl dergestalt verfahren, so addire man alle diese Producte zusammen: die Summe ist das gesuchte Product. Man fängt auch hier von den Ziffern an, welche die kleinsten Einheiten bedeuten: die Ursache davon ist theils bey der Addition gegeben worden, theils ist sie eine blosse Gewohnheit, welche eine Uebereinstimmung im Rechnen zum Grunde hat. Denn man könte eben so gut zu recht kommen, wenn die Ziffer der multiplicirenden Zahl in irgend einer andern Ordnung gebrauchen wolte.

§. 118. Es sey zum Exempel eben die Zahl 3572, welche wir letztens durch 432 multipliciret haben, durch eben die Zahl nach diesem kürzern Weg zu multipliciren, so stehet die Rechnung folgender gestalt:

3572
432

A . . 7144
B . 10716.
C . 14288 . .

1543104

Man halte diese Rechnungsart mit der letzten zusammen, oder verrichte sie

ſie lieber ſelbſt beyde zugleich mit einerley Exempel, ſo wird man gar leicht einſehen, das ſie im Grund einerley ſind, und alſo an der Richtigkeit derſelben nicht zweifeln können. Man wird aber auch finden, daß einerley Product herausgebracht worden wäre, wenn man mit der erſten Ziffer der multiplicirenden Zahl 4 den Anfang gemacht, und alſo die Zahl bey C zuerſt geſetzt hätte, ſo dann aber zu der zweyten Ziffer 3 der multiplicirenden Zahl, und folgends zur dritten 2 übergangen wäre. B hätte in dieſem Fall die zweyte, und A die dritte Stelle unter den Zahlen, welche zu addiren ſind, bekommen, welche Veränderung in die Summe nicht den geringſten Einfluß haben kan. Daß man dieſe Ordnung gemeiniglich nicht beobachtet, iſt dasjenige, ſo wir der Gewohnheit zugeſchrieben haben. Man kan demnach, ſo oft dieſe letztere oder eine andere Ordnung im Multipliciren erwehlen, als man Bequemlichkeit davon hat. Nur muß man ſich in Acht nehmen, daß die kleinern Producte, dergleichen die bey A, B und C ſind, gehörig unter einander geſchrieben, und die Ordnungen der Einheiten nicht verwirret werden.

Die Producte der Zahlen, welche nur mit einer Ziffer geſchrieben werden, zu finden.

§. 119. Die Producte nun welche kommen, wenn eine jede der Zahlen von 1 bis 9 durch eine andere Zahl, welche ebenfals die 9 nicht überſteiget, multipliciret wird, und welche bey der Multiplication bekant ſeyn müſſen, wenn dieſe leicht verrichtet werden ſol, I, 116. findet man nachfolgender maſſen. Man ſchreibe dieſe Zahlen vor ſich,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

wil man wiſſen wie viel jede derſelben zweymal genommen ausmachet, ſo addire man ſie zu ſich ſelbſt, und mache auf die Art eine neue Reihe, welche dieſe Producte enthalten wird,

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

und da jede Ziffer in dieſer Reihe diejenige, welche in der erſten Reihe gerade über derſelben ſtehet, zwey mal in ſich hält, ſo folget, daß wenn man die über einander ſtehende Ziffer dieſer zwo Reihen wieder zuſammen ſetzet, neun Zahlen kommen müſſen, welche die erſtern drey mal genommen enthalten. Dieſe ſind

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

wenn man zu dieſen Zahlen wieder die Zahlen der erſten Reihe ſetzet, wie

ſie

sie in der Ordnung auf einander folgen, bekomt man die Producte eben derselben Zahlen durch viere, welche sind,

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36.

und eben so machet man alle übrige Producte, welche man in eine Tafel verfassen, und diese so lang vor sich legen kan, bis man sie in dem Gedächtniß eingepräget hat. Diese Tafel hat folgende Gestalt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 120. Der Gebrauch dieser Tafel erhellet aus dem so gesagt worden ist gar deutlich. Ich will, zum Beyspiel, wissen wie viel 6 mal 7 beträgt. Weil in der sechsten Reihe, von welcher die erste Zahl 6 ist, die Producte jeder Zahl der ersten Reihe durch 6 multipliciret, enthalten sind, so sehe ich, daß das gesuchte Product in dieser Reihe stehen müsse. Es stehet aber auch gerade unter der 7 der obersten Reihe, denn man hat alle Producte dieser Ziffer 7 gerade unter dieselbe gesetzt. Demnach kan das gesuchte Product nirgends anders als in der sechsten Reihe gerade unter der 7 stehen, und ist demnach 42. Man hätte auch 6 in der obersten Reihe annehmen, und gerade bis an die siebende Reihe herunter fahren können, um eben dieses Product 42 zu finden. Und so kan man überhaupt den einen Factor in der obersten Reihe annehmen, und von demselben so lang gerade unter sich gehen, bis man an diejenige Reihe der Zahlen komt, zu deren Anfang der andere Factor stehet, so ist man an den gesuchten Product. Wie viel ist 8×6? Ich nehme 8 oben und gehe herunter bis an die sechste Reihe, deren erstes Ziffer 6 ist, so finde ich das gesuchte Product 48. Oder ich nehme 6 oben und gehe gerade herunter, bis an die Reihe, bey deren Anfang 8 stehet, so finde ich eben das Product.

Bestimmung der Ordnung der Einheiten des Products.

§. 121. Ob zwar diese Tafel dem Ansehen nach bloß auf die einfachen Einheiten gerichtet ist, so kan man doch aus derselben auch die Producte nehmen, welche heraus kommen, wenn man eine jede Zahl von Einheiten, die zu einer der höhern Ordnungen gehören, durch eine andere dergleichen Zahl von Einheiten, von eben der oder einer jeden andern Ordnung multipliciret. Die Sache ist leicht, und fließet aus dem vorhergehenden, I, 106. doch kan es nicht schaden, wenn wir sie auch von einer andern Seite vorstellen. 2 mal 3 ist 6, demnach ist 2 mal 30 nothwendig 60, denn der eine Factor ist zehen mal grösser als vorher. Eben so gibt 2 mal 300 das Product 600, und $2 \times 3000 = 6000$. Setzet man die Factore 2 und 30 noch mal, von welchen das Product 60 war, und nimt denn an statt des ersten 20, so wird das Product 600, denn der eine Factor ist wieder zehen mal grösser geworden, als er vorher war: und aus eben dem Grunde ist klar, daß 200 durch 30 multipliciret 6000 geben müsse, ja daß überhaupt vor eine jede o welche zu den einen oder den andern Factor hinzugesetzt wird, in das Product ebenfals eine o komme, wodurch der oo in dem Producte so viele werden, als viele deren in beyden Factoren zusammen anzutreffen sind. Es ist also bey der Multiplication aller solcher Zahlen als 6000×300 nichts nöthig, als daß man erstlich die Ziffer multiplicire $6 \times 3 = 18$, und diesem Product so dann so viele ooo zu zusetze, als viele deren in beyden Factoren vorkommen: wodurch das Product aus 6000×300 wird 1800000. Und also entsteht die Zahl, welche anzeigt, von welcher der höhern Ordnungen die Einheiten des Products sind, jederzeit, wenn man die Zahlen, welche die Ordnung der Einheiten derer Factoren anzeigen, zusammen addiret. Denn die Zahl, welche die Ordnung angiebt, ist allezeit der Zahl der oo gleich, welche hinten angehängt werden müssen, damit die vorstehende Ziffern Einheiten von dieser Ordnung ausdrücken I, 29.

§. 122. Wir haben oben I, 113. ausführlich gezeiget, daß eben dieses auch zutreffe, wenn in einer oder beyden der einander multiplicirenden Zahlen Einheiten von einer der niedrigern Ordnungen gezehlet werden; also ist dasjenige, so von der Ordnung der Einheiten in den Producten gesagt worden ist, allgemein. Hieraus schließet man in der Anwendung leicht, von was Ordnung die Einheiten des Products seyn werden, wenn in einem der Factoren dieselben von einer der höhern, in dem andern aber von einer der niedrigern Ordnung sind. Denn gesetzt, es sey 3000 zu multipliciren durch 0,2 so ist das Product $600{,}0 = 600$, und wenn 3000 durch 0,02

multipliciret wird, so ist das Product 60,00=60, und wenn man eben die 3000 durch 0,002 multipliciret, so bekomt man 6,000=6. In diesen Fällen war die Ordnung der höhern Einheiten in dem Factor 3000, die dritte, und in dem andern Factor war die Ordnung der niedrigern Einheiten, die erste in 0,2, die zweyte in 0,02, die dritte in 0,003, in den Producten aber kamen allezeit Einheiten von einer der höhern Ordnung, und zwar von derjenigen, welche durch die Zahl angezeiget wird, die übrig bleibet, wenn man die Zahl, welche die Ordnung der niedrigern Einheiten des einen Factors angiebet, von der Zahl abziehet, durch welche die Ordnung der höhern Einheiten des andern Factors ausgedrückt wird. Und dadurch bekomt man jederzeit die Ordnung der Einheiten des Products, wenn die Zahl, welche die Einheiten der höhern Ordnung anzeigt, die in einem der Factore vorkommen, grösser oder doch nicht kleiner ist, als die Zahl, welche die niedrigere Ordnung der Einheiten des andern Factors angiebt.

§. 123. Behält man aber noch den Factor 3000, fähret aber fort die Ordnung der Einheiten des andern Factors zu vermindern, und setzet erstlich, derselbe sey 0,0002, so wird das Product, wie bekant ist, 0,6000=0,6, und wenn man ferner vor dem zweyten Factor 0,00002 annimt, so wird das Product 0,06000=0,06, und das Product welches entstehet, wenn der zweyte Factor 0,000002 ist, wird 0,006000=0,006. Denn man muß wie I, 113. gewiesen worden ist, jedes mal die Zahl 3000 durch 2 multipliciren, und von dem Product so viele Ziffern vermittelst des (,) Zeichens der einfachen Einheiten abschneiden, als viele deren in den beyden Factoren zusammen hinter diesen Zeichen stehen. Hieraus aber folget diese Regel: Wenn die Zahl, welche die Ordnung der niedrigen Einheiten des einen Factors anzeiget, grösser ist, als die Zahl, welche die Ordnung der höhern Einheiten in dem andern Factor anzeiget, so kommen in dem Product Einheiten von derjenigen niedrigern Ordnung, welche durch die Zahl ausgedrücket wird, die übrig bleibt, wenn man die Zahl, welche die Ordnung der höhern Einheiten des einen Factors anzeiget, von der Zahl abziehet, welche die Ordnung der niedrigern Einheiten in dem andern Factor angiebt. Es ist gut wenn man diese Regeln weiß, doch ist es nicht schlechterdings nothwendig. Denn man kan immer auf die Gründe derselben zurückgehen.

Fernere Erläuterung der Ausübung der Multiplication.

§. 124. Bey derjenigen Einsicht, welche wir bis anhero beyzubringen bemühet gewesen sind, kan nun wohl kein Exempel der Multiplication mit ganzen Zahlen oder zehentheilichten Brüchen vorkommen, welches man nicht mit gewissem Grund berechnen könte. Es sey 4387 durch 6 zu multipliciren, so wird die Rechnung folgender gestalt zu verrichten seyn:

4387
6

26322

Das Product ist 26322, und man kan dieses nicht allein einsehen, wenn man die Multiplication als eine wiederholte Addition der Zahl 4387 betrachtet, sondern auch wenn man erweget, daß man alle Theile der Zahl 4387 nemlich 4000 + 300 + 80 + 7 durch 6 multipliciret, und auf diese Art das Product heraus gebracht habe, und sich erinnert, daß die Multiplication aller Theile einer Zahl, und die Multiplication der ganzen Zahlen einerley sey I, 93. Demnach wird man auch diese Exempel ohne Schwierigkeit übersehen:

438700	438700	43,87	4387
6	60	6	0,6
2632200	26322000	263,22	2632,2

43,87	0,4387	438700	438700
0,6	0,6	0,06	0,006
26,322	0,26322	26322,00	2632,200

und sich dadurch je mehr und mehr überzeugen, daß man überall erstlich bloß die Zahlen zu multipliciren habe, welche durch die Ziffer ausgedrücket werden, die in den Factoren vorkommen, und so dann in dem Product die Ordnung der Einheiten, welche durch dessen Ziffer bedeutet worden, nach den gegebenen Regeln leicht bestimmen könne.

§. 125. Eben so ist es auch, wenn die Zahl 48723 durch 647 multipliciret werden soll. Die Rechnung stehet also:

48723
647

A	341061
B	194892.
C	292338..
E	31523781

Die Zahl bey A ist das Product aus der zu multiplicirenden Zahl 48723, und der 7, oder es ist $A = 48723 \times 7$. Die Zahl bey B, welche dergestalt geschrieben ist, daß ihre letzte Ziffer Zehner bedeutet, ist das Product aus 48723 und 40, oder $B = 48723 \times 40$, und endlich die bey C, deren letzte Ziffer Hunderte bedeutet, ist das Product aus 48723 durch 600, oder $C = 48723 \times 600$. Alles dieses siehet man ein, wenn man darauf Acht hat, wie diese Zahlen A, B, C heraus gebracht worden sind I, 124. Demnach ist die Summe aller dieser Zahlen $A+B+C$, das ist, die Zahl $E = 48723 \times 7 + 48723 \times 40 + 48723 \times 600$. Setzet man die Zahlen $7+40+600$ zusammen, und multipliciret die Summe derselben 647 durch die Zahl 48723, durch welche diese Zahlen einzeln multipliciret worden sind, so bekomt man eben das Product, I, 93; also ist auch $E = 48723 \times 647$, welches dasjenige Product ist, so man machen solte.

§. 126. Und nunmehro wird man auch bey nachstehenden Exempeln keine Schwierigkeit finden:

4872300	48,723
6470	6,47
341061	341061
194892.	194892
292338..	292338
31523781000	315,23781

48723000
6,47

341061
194892
292338
315237810,00

und

und leicht einsehen, daß alles vollkommen nach einerley Gesetzen gemacht werde.

Begriffe zur Division.

§. 127. Die nächste Rechnungsart ist die **Division**, welche eine besondere Verwandschaft mit der Multiplication hat, und ihre Grundsätze von jener borget. Denn gleichwie man bey der Multiplication das Product aus der zu multiplicirenden Zahl dergestalt machet, wie die multiplicirende Zahl aus der Einheit entstehet; also heisset dividiren im allgemeinen Verstand, aus einer vorgegebenen Zahl eine andere dergestalt machen, wie aus einer andern ebenfals gegebenen Zahl die Einheit entstehet. Zum Exempel, aus der 3 wird die Einheit, wenn man sie in drey gleiche Theile theilet. Theile ich demnach auch 12 in drey gleiche Theile, deren eins 4 ist, so ist 4 aus den 12 eben so entstanden, als wie aus der 3 die Einheit werden kan, und demnach ist 12 durch 3 dividiret worden.

§. 128. Dieses ist eine wahrhafte und eigentliche Theilung: und eine dergleichen Theiluna geschiehet allezeit, wenn die Zahl, durch welche eine andere dividiret werden soll, als hier die 3, eine ganze Zahl ist. Aus einer ganzen Zahl kan die Einheit nicht anders werden, als wenn man die Zahl theilet, weil jede ganze Zahl grösser ist als die Einheit. Wenn man demnach aus einer Zahl, was sie vor eine seyn mag, 12 oder $\frac{1}{2}$, eine neue eben so machen will, wie aus einer andern ganzen Zahl, als 3, die Einheit entspringet, so muß man diese Zahl 12 oder $\frac{1}{2}$ nothwendig theilen.

§. 129. Setzet man aber, daß die Zahl 12 durch $\frac{1}{2}$ dividiret werden soll, so soll nach dem gegebenen Begrif aus der 12 eine neue Zahl eben so gemacht werden, wie aus $\frac{1}{2}$ die 1 wird. Nun ist 1 mehr als $\frac{1}{2}$, und die Einheit entstehet, indem man zwey Helften oder $\frac{1}{2}$ gedoppelt nimt: also wird auch die gesuchte Zahl gedoppelt so viel werden müssen, als 12 ist, und demnach herauskommen, wenn man 12 durch 2 multipliciret, und 24 seyn. Also ist dasjenige, so eine Division genennet wird, eigentlich eine Vervielfältigung, wenn die Zahl, durch welche eine andere dividiret werden soll, ein ächter Bruch, und dessen Zehler 1 ist. Denn da ein dergleichen Bruch kleiner ist als die Einheit, und die Einheit aus demselben nicht anders entstehen kan, als indem man ihn etliche mal nimt, so wird auch die Zahl, welche man durch die Division suchet, aus der Zahl welche man dividiren soll, hier nicht anders werden können, als wenn man jene etliche mal zu sich selbst setzet. Ist der Zehler eines ächten Bruchs, durch welchen man dividiren sol nicht 1, so wird zwar auch die Zahl, welche durch

die Division heraus komt, grösser als diejenige, welche man dividiret hat: es ist aber die Division in diesem Fall keine eigentliche Vervielfältigung.

§. 130. Also ist die Division etwas sehr verschiedenes, nachdem man entweder mit einer ganzen oder mit einer gebrochenen Zahl dividiret, eben wie die Multiplication durch eine ganze Zahl ganz was anders ist, als die Multiplication mit einen Bruch I,85. Doch wird überhaupt die Zahl, welche dividiret werden soll, **die zu dividirende Zahl**, diejenige durch welche man dividiren soll, **der Theiler**, und die Zahl, welche durch die Division komt, der **Quotiente** genennet, ob sich zwar diese Wörter nicht allezeit so genau schicken.

§. 131. Wir haben wieder zuerst diejenige Division zu betrachten, bey welcher der Theiler eine ganze Zahl ist. Es mag nun die zu dividirende Zahl ganz oder gebrochen seyn, denn dieses macht in der Division keine hauptsächliche Verschiedenheit. Wir könten, wie bereits erwehnet worden ist, die Gründe hievon aus demjenigen herleiten, so von der Multiplication gesagt worden: Doch wollen wir grösserer Deutlichkeit halben von forne anfangen, und uns des bereits erklärten nicht weiter bedienen, als es unumgänglich nothwendig seyn wird.

Gründe der Division.

[*Fig. 13.*] §. 132. Es sey die Zahl AB durch den Theiler CD zu dividiren. Die Einheiten der erstern dieser Zahlen können nach Belieben genommen werden, und sie können auch Theilchen einer ganzen Einheit seyn. Die Einheiten der Zahl CD aber stellen wir uns hier als ganze Einheiten vor. Man setze zwischen EF so viele Einheiten der Zahl AB, als viele Einheiten in CD enthalten sind, und wiederhohle dieses so oft, bis die ganze Zahl AB in Form des Vierecks EFGH geschrieben worden ist, wenn anders dieses geschehen kan, wie es denn würklich bey der angenommenen Zahl AB geschiehet; so ist der Quotiente die Zahl der Reihen von der Grösse EF, welche in EFGH anzutreffen sind, oder die Zahl der Einheiten, welche die Säule EH ausmachen. Der Augenschein giebt es, daß aus der zu dividirenden Zahl AB, das ist, aus der in Form eines Vierecks geschriebenen Zahl EFGH, der angegebene Quotiente EH auf eben die Art entstehe, wie aus dem Theiler CD, welcher darüber stehet, die Einheit entstehet I,127.

§. 133. Man siehet aber auch aus eben der Vorstellung, daß die Einheiten der zu dividirenden Zahl AB und des Quotienten EH von einerley Art sind, die Einheiten aber des Theilers CD von jenen verschieden seyn mö-

mögen, wie sie wollen: daß einerley Quotiente durch die Division eben der Zahl herauskomme, man mag die Einheiten des Theilers verändern, wie man will: und daß demnach gar nicht nöthig sey darauf Acht zu haben, aus was vor Einheiten der Theiler bestehe. Wie man denn auch nicht zu sagen pflegt, man sol 12 Pferde, zum Exempel, durch 4 Ellen dividiren, sondern nur aufgiebt 12 Pferde durch 4 zu dividiren, ob zwar der Begrif der Division es allerdings leidet, daß man sage, man dividire 12 Pferde durch 4 Ellen, oder etwas dergleichen. Denn dieses soll nichts anders ausdrücken, als man bringe aus 12 Pferden eine andere Zahl von Pferden eben so heraus, wie aus 4 Ellen 1 Elle wird.

§. 134. Ist aber dem also, daß die Einheiten des Quotienten mit den Einheiten der zu dividirenden Zahl immer einerley sind, und es sind die Einheiten der zu dividirenden Zahl gewisse Theile des Ganzen, so werden in dem Quotienten eben dergleichen Theile der ganzen Einheit gezehlet: und wenn demnach in dem gegebenen Exempel jedes (·) ein dreyssigstes Theil des Ganzen, und folgends die zu dividirende Zahl $\frac{12}{30}$ bedeutet, so ist der Quotiente $\frac{3}{30}$, und wird gefunden, wenn man nur den Zehler des Bruchs durch den gegebenen Theiler 4 dividiret, den Nenner 30 aber stehen läst.

[*Fig. 14.*] §. 135. Solte aber, indem man nach der angewiesenen Art dividiren will, die zu dividirende Zahl das Viereck, dergleichen EFGH in der 13 Figur ist, nicht vollmachen, wie zum öftern geschiehet: so kan man folgendergestalt verfahren. Es sey die Zahl $AB = 14$ durch $CD = 4$ zu dividiren, so setze man EFIK wieder wie vorher; weil aber auf die Art zwo Einheiten · · übrig bleiben, welche keine volle Reihe ausmachen; so theile man eine jede dieser Einheiten in so viele gleiche Theile, als viele Einheiten in dem Theiler CD sind, und nehme folgends hier $\frac{1}{4}$, welches $\frac{1}{4}$ wir in der Figur durch das Zeichen (,) andeuten, so wird man noch andere zwo Reihen aussetzen können. Denn weil eine jede Einheit der zu dividirenden Zahl vier Viertheil giebt, so wird vor jede der übergebliebenen Einheiten eben eine ganze Reihe von Viertheilen kommen, und demnach ein Viereck EFGH wie vorhin können vollgemacht werden. Der Quotiente ist hier wieder eine Säule von über einander gesetzten Einheiten EK und Theilen derselben KH. Denn auch hier entstehet die ganze ins Viereck geschriebene Zahl EFGH, das ist, die zu dividirende Zahl AB, aus einer solchen Säule EH eben so, wie der darüber geschriebene Theiler CD aus seiner Einheit entstehet I, 127. Es ist also in dem vorliegenden Exempel der Quotiente $3\frac{2}{4}$.

§. 136. Hieraus erhellet, daß bey dergleichen Zahlen der Quotiente aus einer ganzen und aus einer gebrochenen Zahl bestehe; daß die ganze Zahl (3)

die-

diejenige sey, welche durch die Theiler (4) multipliciret ein Product 12 giebt, so unmittelbar kleiner ist als die Zahl, welche man dividiret hat, (14,) und also von der gedachten Zahl (14) abgezogen, einen Unterscheid lässt, welcher kleiner ist als der Theiler: Der Bruch aber entstehet, wenn man den Theiler 4 zum Nenner setzet, und zum Zehler den Ueberschuß der Zahl, welche dividiret werden solte 14, über das gedachte Factum 12, welcher Ueberschuß hier 2 ist. Auch dieses ist richtig, man mag die Einheiten der zu dividirenden Zahl nehmen wie man will.

[*Fig. 15.*] §. 137. Nach eben diesen Begriffen muß auch dividiret werden, wenn die zu dividirende Zahl kleiner ist, als der Theiler. Es sey AB = 3 zu dividiren durch den Theiler CD = 5, so theile man jede Einheit der Zahl AB in 5 gleiche Theile, nemlich wieder in so viele, als viele Einheiten der Theiler CD enthält. Ein solcher Theil sey (,). So dann setze man auch hier diese Theile, wie oben, in Form eines Vierecks EFGH. Alle 3 Einheiten der zu dividirenden Zahl enthalten der Theile 3 mal fünfe, also werden alle Reihen gewiß voll, wie in der Figur zwischen EFGH zu sehen ist. Demnach ist auch hier der Quotiente eine Säule der über einander gesetzten Theile (,), das ist, der Quotiente ist ein Bruch $\frac{3}{5}$, dessen Zehler die zu dividirende Zahl 3, und den Nenner, der Theiler 5 abgibt. Denn so viele Einheiten in dem Zehler 3 sind, so viele Reihen sind in EFGH, und so viele (,) stehen in einer Säule EH über einander.

[*Fig. 16.*] §. 138. Man siehet leicht, daß, was eben gesagt worden ist, nicht auf die Zahlen, welche kleiner sind als ihre Theiler, allein zu ziehen sey. Man kan diese Art der Division, wenn man will, auch mit Zahlen vornehmen, welche nach der erstern Art I, 132. 135. können dividiret werden, und deren Quotienten entweder ganze oder doch zum Theil ganze Zahlen sind. Es sey AB = 4 durch CD = 3 zu dividiren. Man theile jede der Einheiten der Zahl AB in drey gleiche Theile, und mache also aus denselben Drittel; so kan man diese Zahl wie oben in Form eines Vierecks EFGH bringen, und der Quotiente wird EH = $\frac{4}{3}$, welcher ebenfals entstehet, indem man die zu dividirende Zahl 4 zum Zehler, und den Theiler 3 zum Nenner des Bruchs nimt. Es wird aber hier der Bruch unächt.

§. 139. Man siehet aus diesen allen, was auch aus den gemeinsten Begriffen bekant genug ist, daß eine gegebene Zahl durch Zwey dividiren nichts anders heisse, als ihre Helfte machen, daß sie durch 3 dividiren so viel sey, als ihren dritten Theil darstellen, und so ferner: und daß, wenn man den durch die Division heraus gebrachten Quotienten EH durch die Zahl CD multipliciret, durch welche man dividiret hatte, hinwiederum die

Zahl

Zahl EFGH oder AB kommen müsse, welche dividiret worden ist. Die Figuren zeigen dieses ohne vieles Nachsinnen; es ist aber auch vor sich klar, daß, wenn man die Helfte eines Dinges gedoppelt, oder den dritten Theil desselben dreymal nimt, dieses Ding wieder heraus kommen müsse.

§. 140. Da nun also der Quotiente, wenn man ihn durch den Theiler multipliciret, die dividirte Zahl wieder heraus bringt, so kan man die zu dividirende Zahl sich als ein Product vorstellen, welches durch die Multiplication des Quotienten durch den Theiler entstanden ist: und nach diesen Begrif ist die Division eine Rechnungsart, vermittelst welcher man aus einem Product, bey welchem der eine Factor gegeben ist, den andern Factor findet.

§. 141. Wenn man einerley Zahl durch einerley Theiler dividiret, so können die Quotienten nicht verschieden seyn, denn eine Zahl kan nicht verschiedene Helften, Drittel, Vierthel, und so weiter haben, deren eines nemlich grösser wäre als das andere. Wenn man demnach eine Zahl 7 durch eine andere 3, nach den zween verschiedenen Wegen I, 135. 137. dividiret, und dadurch die Quotienten $2\frac{1}{3}$, und $\frac{7}{3}$ heraus bringt, oder wenn man sich auch noch anderer, aus beyden vorigen zusammen gesetzter, Arten zu dividiren bedienet, so müssen diese und dergleichen Quotienten einerley bedeuten.

§. 142. Und hieraus folgt, daß man einen unächten Bruch $\frac{12}{4}$ entweder ganz oder zum Theil durch eine ganze Zahl ausdrücken könne, wenn man den Zehler durch den Nenner nach der ersten Anweisung I, 135. dividiret. Denn ein solcher Bruch kan als der Quotiente einer Division angesehen werden, in welcher der Zehler durch den Nenner dividiret worden ist. Findet man nun diesen Quotienten auch durch eine andere Division, welche ganze Zahlen bringt, so muß derselbe nothwendig mit dem gegebenen Bruch gleiches Werths seyn. Also ist $\frac{12}{4}$ so viel als 3, und aus eben dem Grunde ist $\frac{14}{3}$ so viel als $4\frac{2}{3}$, und so in allen übrigen Fällen.

§. 143. Was nun insbesondere die gebrochene Zahlen anlangt, welche durch ganze Zahlen getheilet werden sollen, so kan man sich bey denselben derjenigen Anweisung bedienen, welche oben I, 134. gegeben worden ist, und den Zehler des zu dividirenden Bruchs, 12 zum Exempel, in den Bruch $\frac{12}{17}$, durch die dividirende Zahl 3 dividiren, so oft dieses ohne Brüche geschehen kan und dadurch den Quotienten $\frac{4}{17}$ heraus bringen.

§. 144. Und da jede gebrochene Zahl als der Quotiente anzusehen ist, welcher komt, wenn man den Zehler desselben durch den Nenner dividiret, und jeder Quotiente durch einen solchen Bruch ausgedrückt werden kan I, 138. so folget hieraus und aus dem, so oben I, 89. gezeigt worden ist, daß wenn

man die Zahl, welche dividiret werden soll, zwey, drey, zehen, hundert oder mehr mal grösser oder kleiner macht, den Theiler aber läst wie er ist, auch der Quotiente, welcher aus der Division, der also vermehrten oder verminderten Zahl, durch den unveränderten Theiler, komt, eben so vermehret oder vermindert werden müsse, und ebenfals zwey, drey, zehen, hundert oder mehr mal grösser oder kleiner sey, als derjenige Quotient war, welcher aus der Division der einfachen Zahl durch eben den Theiler entsprungen ist.

§. 145. Solte aber durch die Division des Zehlers durch den Theiler, welcher nunmehro 5 seyn mag, wieder ein Bruch $2\frac{2}{5}$ kommen, und folgends der Quotiente werden $2\frac{2}{5}$; so thut man besser, wenn man sich der andern Art zu dividiren I, 137. bedienet, und eine jede Einheit des Nenners, das ist, ein jedes der Theilchen, die den Bruch ausmachen, wieder in so viele gleiche Theile theilet, als viele Einheiten in dem Theiler sind, und im übrigen so verfähret, wie gewiesen worden ist. Denn dergleichen Brüche, als $2\frac{2}{5}$, deren Zehler ebenfals Brüche sind, lassen sich etwas schwerer übersehen als andere. Der gegenwärtige will, man soll das Ganze in 17 gleiche Theile theilen, und solcher Theile 2 und noch $\frac{2}{5}$ eines Theils annehmen, um den Werth des Bruchs zu erhalten. Eine dergestalt wiederhohlte Theilung der Theile kan man sich nicht ohne einige Mühe vorstellen, welcher man überhoben bleibt, wenn das Ganze ein vor allemal getheilet wird.

[*Fig. 17.*] §. 146. Stellet man sich nun vor, daß jede Einheit der Zahl AB, welche durch die CD zu dividiren ist, einen Theil der ganzen Einheit IK bedeute, welche bey L, M, N, O in fünf gleiche Theile getheilet ist, und daß folgends AB, $\frac{4}{5}$ der ganzen IK, oder das Stück IO, ausdrücke; so wird nach der gegebenen Anweisung, jede Einheit der Zahl AB, das ist, jeder Theil IL, LM und so weiter, wieder in so viele Theile zu zertheilen seyn, als viele Einheiten der Theiler CD in sich hält, und folgends in gegenwärtigem Exempel in dreye, und der Quotiente EH wird vier dergleichen Theile betragen, nemlich so viele, als viele Einheiten in der Zahl der Theile AB enthalten sind. Indem jedes der Theilchen IL in drey getheilet wird, werden derselben in der ganzen IK dreymal mehr. Es erfordert also die Division eines Bruchs $\frac{4}{5}$ durch die ganze Zahl 3 nichts anders, als daß man den Nenner desselben 5 durch diejenige Zahl multiplicire, durch welche der Bruch dividiret werden soll, und den Zehler lasse wie er ist. Der Quotiente ist der Bruch, welcher aus dem vorigen Zehler, und den dergestalt

stalt herausgebrachten neuen Nenner gemacht wird, und folgends in unserm Fall $\frac{4}{15}$.

§. 147. Die Sache ist auch vor sich klar. Wenn man in dem Bruch IO = $\frac{4}{5}$ die Zahl der Theile, in welche das ganze IK getheilet ist, dreymal grösser machet, und an statt $\frac{4}{5}$ schreibet $\frac{4}{15}$, so wird jedes Theilchen des ganzen IK dreymal kleiner. Denn es kan die Zahl der gleichen Theile in IK nicht dreymal grösser werden, wenn man nicht jedes Theil derselben IL, LM, MN und so weiter, wieder in drey gleiche Theile theilet, deren jedes folgends nicht mehr als ein Drittel des vorigen IL oder LM betragen wird. Nun ist es an sich klar, daß, wenn man eine gewisse Zahl 4, solcher Dinge als IL, LM sind, annimmet, und auf der andern Seite eben die Zahl 4 drey mal kleinerer Dinge, man in dem letzten Fall nur den dritten Theil dessen habe, so man in dem ersten gehabt hat I, 15. gleichwie derjenige, welcher drey 8 gute Groschen Stücke hat, nur den dritten Theil des Vermögens desjenigen besitzet, welcher 3 Thaler hat. Es ist also richtig, daß $\frac{4}{15}$ der dritte Theil von $\frac{4}{5}$ sey, oder daß $\frac{4}{13}$ komme, wenn man $\frac{4}{5}$ durch 3 dividiret, und daß überhaupt, wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren ist, man nur den Nenner des Bruchs durch diese ganze Zahl multiplicirен, und den Zehler stehen lassen könne.

§. 148. Wenn wir uns nun wiederum einen Bruch als $\frac{17}{5}$ als den Quotienten vorstellen, welcher aus der Division des Zehlers durch den Nenner entstanden ist, so folget hieraus, daß, wenn man die zu dividirende Zahl 17 läst wie sie ist, verdoppelt aber den Theiler 5, der Quotiente ebenfals zwey mal kleiner werden müsse. Wenn man also 17 durch 5 wie man will dividiret, und einen Quotienten, welcher dem $\frac{17}{5}$ gleich ist, heraus gebracht hat, so kan man den Quotienten, welcher kommen muß, wenn man eben die Zahl 17 durch 2 mal 5 oder 10 dividiret, erhalten, wenn man den vorigen $\frac{17}{5}$ zweymal kleiner machet. Aus eben dem Grund wird der Quotiente dreymal kleiner, wenn der Theiler dreymal grösser genommen wird, und zehen, hundert, tausend mal kleiner, wenn man den Theiler zehen, hundert, tausend mal grösser nimt.

§. 149. Hieraus folget ferner, daß, wenn man den Theiler zur Helfte vermindert, die zu theilende Zahl aber läst, wie sie vorher war, der Quotiente nunmehro zwey mal grösser werden müsse. Also giebt 12, wenn sie durch 3 getheilet wird, 4, und wenn man sie durch 2 mal 3 oder 6 dividiret nur 2, welches die Helfte des vorigen ist. Machet man demnach einen Theiler drey, zehen, hundert mal kleiner als er vorher war, und dividiret einerley Zahl durch die dergestalt verminderte Theiler, so wird der

Quotiente, drey, zehen, hundert mal grösser, als derjenige ist, welcher komt, wenn man eben die Zahl durch den ganzen Theiler dividiret.

§. 150. Wenn man einen Bruch, von was Art er auch seyn mag, durch seinen Nenner multipliciret, so ist das Product allezeit der Zehler. Denn ein jeder Bruch $\frac{1}{5}$ ist der Quotient, welcher komt, wenn man den Zehler durch den Nenner dividiret. Multipliciret man also den Bruch durch den Nenner 5, so multipliciret man den Quotienten durch den Theiler, und dadurch kan nichts anders als diejenige Zahl kommen, welche dividiret worden war, das ist, der Zehler, wie wir oben I, 139. gesehen haben.

§. 151. Dieses sind die Gründe, welche wir voraussetzen musten, ehe wir uns zur Division einer Zahl, welche verschiedene Einheiten von höhern oder niedrigern Ordnungen, oder von beyden zugleich, enthält, durch eine eben dergleichen Zahl wenden konten. Nunmehro kan diese Division verständlich gezeiget werden. Es sey erstlich 97583 zu dividiren durch 287, das ist, es sey eine Zahl zu finden, welche durch die letztere der vorgegebenen zwo Zahlen multipliciret, die erstere herausbringet. Denn diesen Begrif haben wir oben I, 140. von der Division beygebracht, und er ist hier vor andern bequem.

Vorbereitung zur Ausübung der Division.

§. 152. Ich schreibe den Theiler 287 vor die Zahl, welche zu dividiren ist 97583, in einer Zeile, und sondere jene von dieser nur durch einen Bogen oder Strich ab:

287)	97583	300 A
B.	86100	40 D
C.	11483	$\frac{3}{287}$ G
E.	11480	
F.	3	340 $\frac{3}{287}$ Q

Nach der zu dividirenden Zahl setze ich wieder eine Linie, an welche zur Rechten der Quotiente kommen sol, um diesen von der zu dividirenden Zahl abzusondern. So dann nehme ich eine Zahl, welche, wenn man bequem rechnen wil, nur aus einer einzigen Ziffer bestehen muß, und von welcher ich zum voraus sehe, daß, wenn man sie durch den Theiler multipliciret, ein Product heraus kommen werde, so nicht gröss r ist als die Zahl, welche zu dividiren ist. Diese ist hier die Zahl 300, bey welcher A stehet. Ich mul-

multiplicire diese Zahl bey A durch den Theiler, und setze das Product bey B unter die Zahl welche zu dividiren ist, dergestalt, daß die Einheiten von einerley Ordnungen richtig unter einander zu stehen kommen. So dann ziehe ich diese Zahl B von der zu dividirenden Zahl ab, und setze den Ueberschuß darunter bey C. Nun nehme ich wieder eine Zahl, welche durch den Theiler multipliciret, ein Product giebet, so kleiner ist als der gefundene Ueberschuß bey C; diese Zahl stehet bey D, und das Product derselben durch den Theiler bey E. Dieses Product bey E wird wieder von der über ihr bey C stehenden Zahl weggenommen, und der Ueberschuß bey F angemerket. Ist dieser, wie hier, kleiner als der Theiler, so ist die Arbeit am Ende, und man hat nichts weiter zu thun als vor den Quotienten die Summa der Zahlen bey A und D zu nehmen, und dieser einen Bruch G beyzusetzen, dessen Zehler der letzte Ueberschuß ist, welchen wir mit F bezeichnet haben, und der Nenner der Theiler. Demnach ist in unserm Exempel der Quotiente $340\frac{3}{287}$, welche Zahl bey Q stehet.

§. 153. Daß dem also sey, und daß nach der angewiesenen Art der Quotient richtig heraus gebracht werde, ist nachfolgender massen zu erweisen. Es ist von der zu dividirenden Zahl erstlich B weggenommen worden, und C übrig geblieben, von diesem C ist ferner E weggenommen worden und F übrig geblieben. Alles was weggenommen worden ist, zusamt demjenigen so am Ende übrig geblieben, ist gewiß so viel als dasjenige, so im Anfang da gewesen; derowegen ist B+E+F so viel als die Zahl, welche man dividiren solte.

§. 154. Ferner ist B das Product aus 300×287, E ist das Product aus 40×287, und F ist das Product aus dem Bruch $\frac{3}{287}$, durch eben die 287, I, 150. oder $F=\frac{3}{287}\times 287$. Diese drey Producte aber zusammen gesetzt, sind einem einzigen Product gleich, welches durch die Multiplication der Summe $300+40+\frac{3}{287}$, oder $340\frac{3}{287}$, durch die Zahl 287 heraus gebracht wird I, 93. Es ist demnach auch B+E+F diesem Producte $340\frac{3}{287}$ ×287, das ist, dem Producte aus der Zahl Q und dem Theiler, gleich. Und weil die Summe der Zahlen B+E+F der zu dividirenden Zahl gleich ist; so muß auch diese dem Producte aus der Zahl Q und dem Theiler gleich seyn: also ist die Zahl Q nothwendig der richtige Quotient welchen man suchte I, 140.

§. 155. Damit wir Gelegenheit bekommen noch ein und das andere bey dieser Sache zu erläutern, wollen wir noch ein Exempel auf die Art rechnen, und den Beweiß kurz verfassen. Die zu dividirende Zahl sey 97357, und der Theiler 274, welche Zahlen wie oben gesetzt sind:

274)	97357	200 A
B	54800	100 D
C	42557	50 G
E	27400	4 K
F	15157	1 N
H	13700	$\frac{87}{274}$ R
I	1457	
L	1096	355 $\frac{87}{274}$ Q
M	361	
O	274.	
P	87	

Es ist alles gerechnet wie vorhin, und

$$B = 274 \times 200$$
$$E = 274 \times 100$$
$$H = 274 \times 50$$
$$L = 274 \times 4$$
$$O = 274 \times 1$$
$$P = 274 \times \tfrac{87}{274}$$

Demnach ist B+E+H+L+O+P, oder die Summe aller dieser Producte, gleich dem Producte $274 \times 355\,\frac{87}{274}$ oder $B+E+H+L+O+P = 274 \times Q$. Aus der Arbeit bey der Rechnung ist klar, daß die Producte B+E+H+L+O+P der zu dividirenden Zahl gleich sind. Derowegen ist auch, wenn man an die Stelle derselben B+E+H+L+O+P das ihnen gleiche Product $274 \times Q$ setzet, die zu dividirende Zahl $= 274 \times Q$, und also Q der richtige Quotiente.

§. 156. Man siehet aber auch hieraus, daß nicht viel daran gelegen sey, wenn man einen oder den andern Theil des Quotienten kleiner annimt, als man ihn hätte annehmen können, wie dieses bey A und K würklich geschehen ist. Es wird die Rechnung dadurch weitläuftiger aber nicht fehlerhaft. Man hätte gleich vor den ersten Theil des Quotienten 300 nehmen können, so wäre man auf einmal mit dieser Ordnung von Einheiten fertig worden. Man pflegt dieses gemeiniglich zu beobachten, und nimt eine jede Ziffer der Factoren A, D, G, K, N so groß, als man nur kan. Wie groß man sie aber nehmen könne, findet man durch das Probiren, welches also bey der gegenwärtigen Art zu rechnen, so sehr nöthig nicht ist. Nachste-

hen-

hende Berechnung eben dieses Exempels, wird, wenn man sie mit der eben gegebenen vergleichen wil, deutlich zeigen, wie dieses zusammen hängt:

```
274) 97357 | 300
     82200 |  50
     -----
     15157    5
     13700   ---
     -----   355 87/274
      1457
      1370
      ----
        87
```

§. 157. Das Probiren, wodurch man, die grösten Theile des Quotienten, die nur zu haben sind, findet, machet hiebey einige Schwierigkeit. Damit man dieses erleichtern und etwas haben möge, woran man sich halten kan, indem man versucht, wie groß die Ziffer derer besondern Theile des Quotienten als hier 3, 3 in der Zahl 300, 5 in der Zahl 50 zu nehmen seyn: vergleichet man den Theiler mit den ersten Ziffern der zu dividirenden Zahl, deren man so viele nimt, als viele der Theiler hat, wenn diese Zahl der erstern Ziffer nicht weniger bedeuten als der Theiler: denn sonst muß man um eine Ziffer der zu dividirenden Zahl weiter fortrücken. Als hier vergleichet man den Theiler 274 erstlich mit den drey ersten Ziffern der zu dividirenden Zahl 973, weil diese mehr als jene bedeuten, sonst, wenn der Theiler gröss'r gewesen wäre als diese Ziffer der zu dividirenden Zahl, hätte man ihn mit den vier erstern Ziffern derselben 9735 vergleichen müssen. Eben dieses beobachtet man hernach beständig. Ferner setzet man, daß der Theiler so oft in diesen Ziffern der zu dividirenden Zahl enthalten sey, als oft die erste Ziffer desselben in der ersten Ziffer von diesem, (2 in 9) enthalten ist, welches zwar nicht allezeit eintrist, aber nicht eben sonderlich fehlet, und wenn es fehlet, allezeit zu vieles giebt: als wie eben hier 2 in 9 vier mal enthalten ist, aber 274 in 973 nur dreymal. Die Ursach ist, weil, wenn man 274 durch 4 multiplicirt, verschiedene Einheiten in das Product 2×4 herüber gehen, welche dieses vergrössern, wie man leicht siehet, wenn man 274 würklich durch 4 multiplicirt. Allein die auf die Art gemachte Fehler verbessern sich leicht. Denn das würklich gemachte Product weiset alsbald, ob man den Factor zu groß angenommen habe oder nicht. Man kan auch dabey auf die nachfolgende Ziffer des Quotienten sehen, und in einem Exempel wie das gegenwärtige ist, erwegen, das die zwo ersten Ziffer des Theilers 27 fast 30 geben, und daß der ganze Theiler der Zahl 300 ziemlich nahe komme. Es ist aber 300 in 973 nicht viermal, sondern nur dreymal enthalten.

§. 158.

§. 158. Indessen ist nicht zu leugnen, daß dieses Probiren bey dem allen die Division sehr verdrießlich mache, und überhaupt wil es sich nicht recht schicken, daß bey einer Anweisung zu dieser oder jener Ausübung man etwas dem Probiren überlasse, wenn man es vermeiden kan. Es ist aber das Probiren bey der Division auf zweyerley Art gänzlich zu vermeiden, und die Division in eine blosse wiederholte Subtraction zu verwandeln. Die erstere ist leichter, aber weitläuftiger, die zweyte kürzer, aber sie erfordert etwas mehr Arbeit, und diese Arbeit ist zuweilen, wenigstens zum Theil, überflüssig.

§. 159. Die erste dieser Arten zu dividiren gründet sich auf dasjenige, so von der Multiplication gewiesen worden ist, wie nemlich diese durch eine blosse, aber doch nicht allzuweitläuftige Addition zu verrichten sey. Es ist auf die Art I, 116. die Zahl 3572 durch 432 multipliciret, und das Product 1543104 heraus gebracht worden. Gesetzt, es sey dieses Product hinwiederum durch 3572 zu dividiren, so ist zum voraus bekant, daß 432 der Quotient werden müsse. Es wird aber dieser Quotient durch eine blosse wiederhohlte Subtraction also gefunden:

1543104	.. A
357200	.. B
1185904	
357200	
828704	
357200	
471504	
357200	
114304	.. C
35720	.. D
78584	
35720	
42864	
35720	
7144	.. E
3572	.. F
3572	
3572	
00	

Nach-

Nachdem nemlich die zu dividirende Zahl bey A geschrieben worden, hat man dem Theiler 3572 so viele oo zugesetzt, als nur geschehen können, ohne daß er grösser würde, als die Zahl bey A. Der also vermehrte Theiler stehet bey B, denn man konte ihm in dem gegenwärtigen Fall nicht mehr als zwo oo beysetzen. Er wäre gröſſer worden als A, wenn man ihm derer dreye angefüget hätte. Die Zahl B wird von der A abgezogeu, und der Ueberschuß unter derselben bemerket. Von diesem Ueberschuß wird wieder eben die B abgezogen, und dieses wird so oft wiederhohlet bis endlich bey C ein Ueberschuß bleibet, der kleiner ist, als die Zahl B. Nachdem man dieses erhalten, ist von der B eine o am Ende weggethan, und dadurch die Zahl D heraus gebracht worden, diese hat man wieder von der C so oft abgezogen, als es hat geschehen können, das ist, bis eine Zahl übrig geblieben ist, die kleiner ist als D, welche bey E stehet. Nunmehro hat man von der D wieder ein o am Ende weggethan, und dadurch die Zahl bey F heraus gebracht, welche eben diejenige ist, mit welcher solte dividiret werden. Diese ist von der Zahl bey E zwey mal abgezogen worden: und nachdem dieses geschehen, ist am Ende nichts übrig geblieben. So bald dieses geschehen, ist der Quotiente leicht zu haben, wenn man ihn nicht schon wärender Arbeit angemerket hat.

§. 160. So oft nemlich der mit oo vermehrte Theiler B von der Zahl A abgezogen worden ist, so viele Hunderte sind in dem Quotienten enthalten, und also in dem gegenwärtigen Falle, 4. So oft der mit einer o vermehrte Theiler D abgezogen werden konte, so viele Zehner enthält der Quotiente, und also bey unserer gegenwärtigen Rechnung 3; endlich, so oft der Theiler selbst abgezogen werden konte, so viele einfache Einheiten sind in dem Quotienten. Daß also in dem Falle, welchen wir vor uns haben, der Quotiente ist 432. Eben diese Bewandniß hat es auch mit den Einheiten der noch höhern Ordnungen, wenn deren welche in dem Quotienten vorkommen.

§. 161. Der Grund lieget, wie gesaget worden ist, in der Multiplication, und man darf nur die gegenwärtige Rechnung mit der vorigen I, 116. zusammen halten, wenn man alles deutlich einsehen will. Wenn man nemlich die Zahl B, I, 159. vier mal, und die Zahl D drey mal, F aber zwey mal setzet, und alles addiret, so erhält man ohne Zweifel das Product aus der Zahl F = 3572 durch welche dividiret worden ist, und 432. Es kan aber durch diese Addition nichts anders als die Zahl A heraus kommen. Also ist A dieses Product, und folgends 432 der Quotiente, welcher kommet, wenn man A durch 3572 theilet. Wenn bey dieser Art zu

dividiren nach allen Subtractionen noch etwas übrig bleibet, so verfähret man damit wie gewöhnlich.

§. 162. Die zweyte Art das Probieren zu vermeiden, und die Division in eine blosse Subtraction zu verwandeln, bestehet darinne, daß man gleich Anfangs den Theiler durch alle Zahlen von 1 bis auf 9 multipliciret, und alle diese Producte unter demselben bemerket. Ist dieses geschehen, so siehet man leicht, welches das gröste dieser Producte sey, so man noch von der zu dividirenden Zahl abziehen kan, nachdem man demselben eine oder etliche ooo zugesetzet hat; und die Theile des Quotienten fallen so gleich in die Augen. Ein Exempel kan die Sache klar machen.

	A	B	C
1)	532	45417904	
2)	1064	42560000	80000
3)	1596	2857904	
4)	2128	2660000	5000
5)	2660	197904	
6)	3192	159600	300
7)	3724	38304	
8)	4256	37240	70
9)	4788	1064	
		1064	2
		0	85372

§. 163. Es ist die Zahl 45417904 durch 532 zu dividiren. Man hat gleich Anfangs diese Zahl 532 durch 1, 2, 3 und so fort, bis 9 multipliciret, und diese Producte in der ersten Säule unter A geschrieben, auch die einfachen Ziffer, durch welche jedes dieser Producte heraus gebracht worden, darneben verzeichnet. Unter B stehet die Zahl, welche dividiret werden soll. Man siehet leicht, daß wenn man dem Producte unter A, vor welchem 8 stehet, vier oooo anfüget, die Zahl, welche dadurch heraus gebracht wird 42560000 noch von der zu dividirenden Zahl abgezogen werden könne, und daß dieses keinesweges angehen würde, wenn man dem Product unter A, vor welchem 9 stehet, eben so viele oo beysetzen wolte. Man setzet derowegen das erstere dieser Producte an den gehörigen Ort unter die zu dividirende Zahl, und ziehet sie ab. Dadurch erhält man den ersten Theil des Quotienten 80000. Nunmehro ist das Product unter A, vor wel-

welchem 5 stehet, das gröste unter denjenigen, welche mit dem Zusatz dreyer ooo noch von dem Ueberbleibsel von der vorigen Subtraction können abgezogen werden. Man setzet es derowegen an den gehörigen Ort, und bemerket den zweyten Theil des Quotienten 5000. Man verrichtet die Subtraction, und gehet auf eben die Art weiter, so erlanget man endlich den ganzen Quotienten 85372. Die Sache hat keine Schwierigkeit, wenn man sich nur die Mühe geben will, die Rechnung selbst zu verrichten. Es ist würklich ein grosser Vortheil bey dieser Art zu dividiren, wenn der Quotiente aus vielen Ziffern bestehet: denn ausser dem geschiehet es öfters, daß die meisten der Producte unter A nicht gebrauchet werden. Sonst aber ist der Grund derselben aus demjenigen, so bisher gesaget worden ist, gar leicht einzusehen.

Die kürzeste Art zu Dividiren.

§. 164. Wenn man nun immer die grösten Zahlen zu den Theilen des Quotienten annimt, die zu haben sind; so kan man die Division mit einiger Ersparung des Abschreibens der Ziffer verrichten, und ohne die oo zu schreiben. Wir wollen das letzte Exempel nach der Art rechnen, in Hofnung, daß selbst die Zusammenhaltung dieser beyden Rechnungsarten das übrige alles deutlich machen werde:

```
532)  45417904  |  85372
      4256::::  |
      -------   |
       2857::.  |
       2660.:.
       -------
        1979..
        1596::
        ------
         3830:
         3724.
         -----
          1064
          1064
          ----
             0
```

Wenn man nemlich allezeit die grösten Ziffern vor die Theile des Quotienten annimt, die man nehmen kan, so ist klar, daß unmöglich mehr als eine Ziffer vor jede Ordnung der Einheiten kommen könne. Als hier können ausser den 8 Zehentausenden nicht mehr Zehentausende in den Quotien-

ten kommen, weil man gleich Anfangs die gröste Zahl der Zehentausende genommen hat, die man nur nehmen konte. Eben so können nicht mehr als 5 Tausende, nicht mehr als 3 Hunderte kommen, und so weiter. Demnach bekommen die Ziffern in dem Quotienten ihre richtige Bedeutung von selbst, wenn man sie nur in der Ordnung hinter einander setzet, in welcher sie nach und nach heraus gebracht werden.

§. 165. Nur müssen hier die 00 nicht vergessen werden, welche kommen, wenn diejenige Zahl, welche man dividiren soll, kleiner ist als der Theiler, und man folgends weiter fortzurücken genöthiget wird, wie in dem nächstfolgenden Exempel:

```
29) 89384 | 3082 6/29
    87::.
    ----
     23::
     00..
     ----
     238:
     232.
     ----
      64
      58
     ----
       6
```

§. 166. Vielleicht wird alles dieses noch deutlicher, wenn es noch auf einer andern Seite angesehen wird. Ich soll eine gegebene Zahl, als 39573 durch 12 theilen, das ist, ich soll den zwölften Theil dieser Zahl schaffen. Indem ich nun rechne wie eben gelehret worden ist:

```
12)  39573 | 3297 9/12
   A 36:::
     -----
      35::
   B  24::
      ----
      117:
   C  108:
      ----
       93
   D   84
       --
   E    9
```

so theile ich die vorgegebene Zahl durch die beständige Subtraction in 36 Einheiten von der dritten Ordnung oder Tausende, in 24 Einheiten von der zwey-

zweyten Ordnung oder Hunderte, in 108 Einheiten der ersten Ordnung oder Zehner, und in 84, und noch über das in 9 einfache Einheiten. Dieses sind die Zahlen, bey welchen die Buchstaben A, B, C, D, E stehen, welche zusammen genommen allerdings der zu dividirenden Zahl gleich sind, und derowegen als ihre Theile angesehen werden können I,153. Nun ist der erste Theil des Quotienten, nemlich die 3 so Tausende bedeutet, der zwölfte Theil der 36 Tausenden, die in der zu dividirenden Zahl enthalten sind, weil 3 mal 12 die Zahl 36 ausbringet, wie dieses gleich Anfangs durch die Multiplication gefunden worden ist, und eben so ist die nächste 2 in dem Quotienten, so Hunderte bedeutet, der zwölfte Theil der 24 Hunderte der zu dividirenden Zahl; der darauf folgende Theil 9, welches Zehner sind, ist der zwölfte Theil der 108 Zehner, und so fort; endlich ist der Bruch $\frac{9}{12}$ der zwölfte Theil der noch übrigen 9 Einheiten. Es enthält also der Quotiente die zwölften Theile aller Theile der zu dividirenden Zahl. Da nun alle Theile hier wieder das Ganze ausmachen, so ist klar, daß eben dieser Quotiente auch der zwölfte Theil der ganzen Zahl sey, welche man dividiren solte, und daß also die Division durch 12 richtig verrichtet worden I,139.

§. 167. Es ist nach diesen allen bey der Division selbst nichts mehr zu erinnern, als dieses einzige, daß wenn der Theiler nur aus einer Ziffer bestehe, man so viele Weitläuftigkeiten, als bis anhero gebraucht worden sind, nicht nöthig habe. Man kan die Producte aus den Theilen des Quotienten im Gedächtniß behalten, und abziehen, ohne daß man sie schreibe; das überbleibende aber so gleich über oder unter die Ziffer der zu dividirenden Zahl anzeichnen, ohne die Ziffer der zu dividirenden Zahl von neuen zu schreiben. Ein Exempel

6) 395728 | 65954 $\frac{4}{6}$.
35324

Ich sage 6 in 39 ist 6 mal enthalten, aber 6 × 6 ist nur 36, und dieses Product von 39 weggenommen, läst 3, welche ich unter die 9 schreibe, und darauf zur nächsten 5 der zu dividirenden Zahl bringe, mit welcher sie 35 machet. Nun ist 6 in 35 enthalten 5 mal, aber 5 × 6 ist nur 30, und diese von den 35 abgezogen, lassen 5 übrig, welche Ziffer wieder unten angemerket, und zu der nächstfolgenden 7 gebracht werden muß, mit welcher sie 57 macht. Mit diesen 57 verfähret man eben so, und auf die Art ferner bis man ans Ende komt, da dann die letzt übergelassene 4 mit dem Theiler den Bruch $\frac{4}{6}$ giebt.

Die Ordnung der Einheiten in dem Quotienten zu bestimmen.

§. 168. Auf diese Art nun werden jederzeit die Ziffer des Quotienten heraus gebracht, und man siehet gar leicht, daß im Fall die letzten Ziffer, so wohl des Theilers als der zu dividirenden Zahl, ganze und einfache Einheiten bedeuten, auch in dem Quotienten die letzte Ziffer dergleichen Einheiten bedeuten werden, wodurch zugleich die Ordnung der Einheiten aller übrigen Ziffer bestimmet wird. Als in dem Exempel I, 156. da wir die Zahl 97357 durch 274 dividiret, und den Quotienten $355\frac{87}{274}$ heraus gebracht haben, bedeutet die letzte Ziffer 5 einfache und ganze Einheiten, die vorhergehende Zehner, und so weiter; der Bruch aber bezieht sich ebenfals auf einfache Einheiten, deren eine man in 274 Theile zertheilen, und 87 dergleichen Theile nehmen muß, um den Werth des Bruchs heraus zu bringen.

§. 169. Ist aber 973,57 durch die Zahl 274, oder 97357 durch 2,74, oder 973,57 durch 27,4 oder etwas dergleichen, zu theilen, so findet man zwar die Ziffer des Quotienten vollkommen wie vorher $355\frac{87}{274}$, aber die letzte 5 bedeutet nicht nothwendig ganze und einfache Einheiten, sondern sie kan auch Zehentheile oder Hundertheile, oder Zehner, oder Hunderte, mit einem Wort, eine Einheit von einer jeden der höhern oder niedrigern Ordnungen bedeuten, und bekomt diese Bedeutung, nach dem das Zeichen der einfachen Einheiten, in den Zahlen, deren eine durch die andere dividiret werden soll, so oder anders stehet. Es ist übrig, daß wir betrachten nach was vor Gesetzen dieses geschehe.

§. 170. Gesetzt, man soll an statt der Zahl 97357 die Zahl 9735,7 durch 274 dividiren. Da die letztere der beyden zu dividirenden Zahlen zehen mal kleiner ist, als die erstere, so kan der Quotiente nun nicht mehr $355\frac{87}{274}$ seyn, sondern er muß zehen mal kleiner gemacht werden, demjenigen zufolge, so wir oben I, 144. gesehen haben. Diese Verkleinerung geschiehet, wenn man das Zeichen der einfachen Einheiten um eine Ziffer weiter nach der linken setzet, und an statt $355\frac{87}{274}$ schreibet $35,5\frac{87}{274}$, I, 108: dieses ist also nunmehro der richtige Quotient, und der Bruch desselben beziehet sich auf Zehentheile der einfachen Einheiten, oder auf eine Einheit der ersten niedrigern Ordnung, welche man in 274 Theile theilen, und dieser Theile 87 nehmen muß, um den Werth des Bruchs zu erhalten. Man siehet auf eben die Art, daß, wenn man 973,57 noch durch eben den Theiler 274 dividiret, der Quotient $3,55\frac{87}{274}$ seyn, und der Bruch sich auf eine

Ein-

Einheit der zweyten niedrigern Ordnung beziehen werde. Denn weil die zu dividirende Zahl nun wieder zehen mal kleiner genommen worden ist als vorher, so muß auch der Quotient zehen mal kleiner werden. Aus eben dem Grunde folget, daß aus der Division der Zahl 97,357 durch eben den Theiler 274 der Quotient $0,355\frac{87}{274}$ kommen werde, und daß überhaupt vor jede Ziffer der zu dividirenden Zahl, um welche das Zeichen der einfachen Einheiten zurück nach der linken gesetzt wird, dieses Zeichen auch in dem Quotienten um eine Ziffer nach der linken gerücket werden müsse. Woraus ferner folget, daß, wenn die letzte Ziffer des Theilers einfache Einheiten bedeutet, jederzeit in dem Quotienten eben so viele Ziffern hinter dem (,) Zeichen der einfachen Einheiten stehen müssen, als viele derer in der zu theilenden Zahl daselbst stehen.

§. 171. Bleibt aber die zu dividirende Zahl einerley, und der Theiler wird zehen mal kleiner gemacht, das ist, dividiret man eben die Zahl 97357 durch 27,4 an statt 274, so muß der Quotient zehen mal grösser werden als er vorher war I,149. und demnach seyn 355 Zehner, und noch über dieses $\frac{87}{274}$ eines Zehners, oder $3550+\frac{870}{274}$; und wird der Theiler noch zehen mal kleiner genommen, und folgends 2,74, so wird der Quotiente wieder zehen mal grösser: es bedeutet demnach die letzte Ziffer 5 des vorigen Quotienten $355\frac{87}{274}$ Hunderte, oder Einheiten von der zweyten höhern Ordnung, und der angehängte Bruch beziehet sich ebenfals auf solche Einheiten, deren eine man also in 274 Theile zu zertheilen und deren 87 anzunehmen hat, um seinen Werth zu bestimmen.

§. 172. Eben so ist es auch, wenn man die Zahl 9735,7 welche wir vorher durch 274 dividiret haben, nunmehro durch 27,4 dividiret. Der Theiler ist zehen mal kleiner worden: da also der vorige Quotient war $35,5\frac{87}{274}$, so muß derjenige, welcher nunmehro komt, zehen mal grösser seyn, folgends ist er dieser $355\frac{87}{274}$, I,107. Dividiret man 9735,7 durch 274, so wird der Quotiente wieder zehen mal grösser, und es wird überhaupt das Zeichen der einfachen Einheiten (,) vor jede Ziffer, um welche es in dem Theiler nach der linken zurück gesetzt wird, in dem Quotienten um eine Ziffer nach der rechten vorwärts gebracht. Nachstehende Zahlen können dieses in einem Blick zeigen, da beständig die zu dividirende Zahl oben, den Theiler darunter, und der Quotienten unter diesen unter eine Linie gesetzt ist. Es sind dabey die Brüche weggelassen worden.

97357

97357	9735,7	973,57	97,357
274	274	274	274
355	35,5	3,55	0,355
97357	9735,7	973,57	97,357
27,4	27,4	27,4	27,4
3550	355	35,5	3,55
97357	9735,7	973,57	97,357
2,74	2,74	2,74	2,74
35500	3550	355	35,5
97357	9735,7	973,57	97,357
0,274	0,274	0,274	0,274
355000	35500	3550	355

§. 173. Aus diesem allen folget nun, das in dem Quotienten das Zeichen der einfachen Einheiten (,) jederzeit so weit von der letzten Ziffer des Quotienten abstehen müsse, als viele Ziffer in einer der zwo gegebenen Zahlen, deren erstere durch die zweyte zu theilen war, mehr als in der andern hinter diesem Zeichen (,) stehen: daß aber, wenn in der zu dividirenden Zahl mehr Ziffer hinter dem Ort der einfachen Einheiten stehen, als in dem Theiler, das Zeichen der einfachen Einheiten vor die letzte Ziffer des Quotienten gesetzt werden müsse, und hinter dieselbe, mit Anfügung so vieler oo als nöthig sind, wenn die Zahl dieser Ziffer in dem Theiler, die Zahl derselben in der zu dividirenden Zahl übersteiget.

Den Quotienten in zehentheilichen Brüchen darzustellen.

§. 174. Die Brüche, dergleichen in unserm Exempel $\frac{87}{274}$ war, werden meistentheils weggelassen, wenn in dem Quotienten Einheiten von einer der niedrigen Ordnungen vorkommen; und dieses deswegen, weil diese Brüche entweder an sich Kleinigkeiten bedeuten, auf welche man in der Anwendung nicht Acht haben kan, oder doch auf solche Kleinigkeiten können gebracht werden. Der zehentausendste Theil einer Meile ist an sich gar merklich, er beträgt ohngefehr 2 Schuh, und wenn ein Ort von einen andern

um

um $7\frac{2}{10000}$ Meilen entfernet ist, so fehlet man in der That, wenn man diese Entfernung gerade auf 7 Meilen setzet, um vier Schuhe. Aber wem ist an diesem Fehler etwas gelegen, und was ändert derselbe in der Anwendung? Ja, würde man nicht denjenigen vor eigensinnig halten, welcher niemals um solche Kleinigkeiten fehlen, und wenn er um die Entfernung eines Orts von einem andern gefraget wird, dieselbe bis auf ein Haar breit bestimmen wolte; gesetzt nemlich, daß dieses in seiner Gewalt wäre? Man komt allezeit durch die wiederhohlte Theilung auf dergleichen Kleinigkeiten, und vermittelst der zehentheilichten Brüche kan man immer den Quotienten dergestalt heraus bringen, daß, ob zwar derselbe nicht eigentlich der wahre ist, er dennoch nicht mehr als um etliche Einheiten von derjenigen niedrigen Ordnung, welche man nur annehmen will, von dem wahren abgehet. Das ist, man kan vermittelst der Division, und indem man den Quotienten bloß in zehentheilichen Brüchen darstellet, machen, daß derselbe von dem wahren nicht mehr als um einige zehentausendtheilchen, oder wenn man will, um einige hundert oder tausend mal tausendste, oder noch kleinere Theilchen, abweichet. Demnach kan man, wenn man bloß um den Nutzen bey der Anwendung bekümmert ist, die Brüche, welche ausser den zehentheilichen noch in den Quotienten kommen, allezeit weglassen I,42.

§. 175. Um aber den Quotienten in zehentheilichen Brüchen so genau als man nur will heraus zu bringen, verfähret man folgender gestalt. Man hängt an die Zahl, welche man dividiren soll, so viele oo an, als man nöthig findet, nachdem man vorher den Ort der einfachen Einheiten, falls es nicht bereits geschehen ist, bezeichnet hat. Nach der Zahl dieser oo richtet sich die Ordnung der Einheiten der letzten Ziffer des Quotienten I,173. man kan also ermessen, wie viel man derselben anzuhängen habe, damit die Fehler vermieden werden, welche nach Beschaffenheit der Sache zu vermeiden nöthig sind. Doch ein Exempel kan diese Sache deutlicher machen als viele Worte. Es sey die Zahl 3 durch 7 zu theilen, und der Quotient in zehentheilichen Brüchen so genau zu schaffen, daß man um kein hundert tausendstes Theilchen fehle, so hänge ich an die zu dividirende Zahl fünf oo, bezeichne den Ort der einfachen Einheiten, und dividire so dann die Zahl 3,00000, welche nichts mehr als 3 bedeutet, durch 7.

7)	3,00000	0,42857
	2645	

Der Quotient 0,42857 ist der gesuchte, und eben so verfähret man auch, wenn in der einen oder den beyden zur Division gegebenen Zahlen zehentheiliche

liche Brüche vorkommen. Es ist zwar nicht schwer einzusehen, wie viel oo man am Ende anhängen müsse, damit man in dem Quotienten Einheiten von einer beliebigen Ordnung erlange: doch kan man auch dieses Nachdenken ersparen, wenn man folgender gestalt verfähret.

§. 176. Wenn in der Zahl, welche zu dividiren ist, eben so viele oder mehrere Ziffern hinter dem Ort der einfachen Einheiten stehen, als in dem Theiler, so hat man nicht nöthig gleich Anfangs oo an dieselbe zu setzen. Man dividire ordentlich bis man ans Ende komt, und bestimme so dann die Einheiten des Quotienten nach den gegebenen Regeln, indem man nemlich so viel Ziffern von der rechten vermittelst des (,) Zeichens der einfachen Einheiten abschneidet, als viele dergleichen Ziffern in der zu dividirenden Zahl mehr sind, als in dem Theiler. Kan man den dergestalt erhaltenen Quotienten noch nicht ohne merkliche Fehler vor richtig annehmen, so verfolge man die Division, indem man an dasjenige, so von der vorigen Division übrig geblieben ist, eine o anfüget, und wiederhohle dieses so oft bis man seinen Zweck erreichet hat, wie in den nachstehenden Exempeln:

35)	3,972	0,11348	241)	79,234	32,877
	35 ::			723 ::	
	47:			693:	
	35:			482	
	122			2114	
	105			1928	
	170			1860	
	140			1687	
	300			1730	
	280			1687	
	20			43	

§. 177. Stehen aber in der zu dividirenden Zahl wenigere Ziffern, welche zehentheiliche Brüche bedeuten, als in dem Theiler, so setze man zum Anfang nur so viele oo an die erstere dieser Zahlen, als erfordert werden, damit die Zahl aller Ziffer hinter dem Zeichen der einfachen Einheiten in dieser zu dividirenden Zahl eben so groß werde, als die Zahl solcher Ziffer in dem Theiler. Man dividire bis man ans Ende komt, und bestimme so dann den Ort der einfachen Einheiten. Es wird aber in diesem Fall die letzte Ziffer des Quotienten selbst einfache Einheiten bedeuten, wie dieses

ses sich allezeit begiebt, wenn die letzte Ziffer der zu dividirenden Zahl Einheiten von eben der Ordnung bedeutet, welche von der letzten Ziffer des Theilers bedeutet wird I, 173. Nachdem man auf die Art den Ort der einfachen Einheiten bestimmet hat, kan man nach und nach oo an die überbleibende Zahlen fügen, und die Division, wie eben gezeiget worden ist, verfolgen. Die Berechnung der nachstehenden Beyspiele wird hoffentlich alles vollkommen klar machen:

```
2,84) 7,50 | 2,64      0,235) 7,000 | 29,7      5,72) 0,30 | 0,052
      568  |                   470  |                   0300 |
      1820                     2300                   03000
      1704                     2115                    2860
      1160                     1850                    1400
      1136                     1645                    1144
        24                      205                     256
```

§. 178. Man komt mit einer dergleichen Division zuweilen ans Ende, und bekomt den Quotienten vollkommen genau, aber dieses geschiehet nicht allzeit; denn man kan nicht alle Brüche in zehentheilichte verwandeln, und durch diese richtig und dergestalt darstellen, daß gar nichts fehlte. Nachstehende Exempel weisen beydes:

```
3) 7,10000 | 2,36666      2,3) 17,25 | 7,5
   1 2222  |                    161  |
                                 115
                                 115
                                   0
```

Es ist leicht zu sehen, daß in dem ersten Fall man niemals ans Ende kommen könne, weil im Verfolg immer 20 durch 3 zu dividiren ist, welches niemals genau geschehen kan. Es bleibt hier immer eine dergleichen Zahl zu dividiren übrig, als diejenige ist, welche unmittelbar vorher dividiret worden ist. Wie ist es also möglich, daß man jemals fertig werde? Es gehet demnach der Quotiente 2,36666 ohne Ende fort, und wird niemals vollkommen so groß als $2,3\frac{2}{3}$, welches der eigentliche Quotiente ist, der in der Division der Zahl 7,1 durch 3 herausgebracht wird.

Einige Vortheile bey der Multiplication und Division.

§. 179. Was bis anhero gesagt worden ist, setzt uns in den Stand eine jede Zahl, welche durch Einheiten von verschiedenen höhern und niedrigern Ordnungen ausgedrückt wird, durch eine andere dergleichen Zahl, zu multipliciren oder zu dividiren. Doch ist noch etwas zu sagen übrig, so zur bequemlichen Verrichtung dieser beyden Rechnungsarten dienen kan. Dasjenige so bey den Gründen der Multiplication I, 93. angemerket, und nachdem so oft gebraucht worden ist, daß nemlich die Summe der Producte verschiedener Theile einer Zahl, die man sämtlich durch einerley Zahl multipliciret hat, mit dem Product das heraus komt, wenn man die ganze Zahl durch eben dieselbe Zahl multipliciret, einerley sey: und daß demnach, wenn eine Zahl durch 6 multipliciret werden sol, man dieselbe erstlich durch 3 multipliciren, und hernach dieses Product zwey mal nehmen könne, weil 6 zwey mal drey ist; dieses sage ich wird uns den Grund von allen diesen Bequemlichkeiten geben, welche uns so wohl bey der Multiplication, als auch bey der Division, die Multiplication mit grössern Ziffern zum öftern ersparen werden.

§. 180. Es sey die Zahl 372, durch 7 zu multipliciren: Ich habe sie aber bereits durch 4 multipliciret, und das Factum ist 1488, ich habe sie auch durch 3 multipliciret, und es ist hier heraus kommen 1116, so setze ich diese zwey Producte zusammen, die Summa derselben 2604 ist 372×7: Oder ich habe eben diese Zahl 372 durch 3 multipliciret, und das Product ist 1116, ich nehme dieses gedoppelt 2232, so habe ich die vorgegebene Zahl sechs fach, ferner setze ich sie noch einmal zu dem auf die Art gefundenen Product, so ist $2232+372=2604$ wieder das Factum aus derselben Zahl 372 und 7. Und so kan man ein Factum auf gar verschiedene Arten machen.

§. 181. Ja man kan sich auch der Division bedienen, dergleichen Producte einer Zahl aus andern Producten derselben, die schon vorhero bekant waren, bequem zu machen, wie auch der Subtraction. Die Gründe sind einerley mit dem vorigen, und ein paar Exempel können die Sache klar machen. Es sey eben die Zahl, welche vorhero da war 372 bereits durch 6 multipliciret, und das Factum sey 2232, ich soll sie durch 3 multipliciren. Weil nun eine Zahl sechs mal genommen doppelt so viel giebt, als wenn man sie nur dreymal nimt, I, 96. so muß das gesuchte Product die Helfte des bereits gefundenen seyn, und demnach heraus kommen, wenn man jenes durch 2 dividiret, folgends ist $372\times3=1116$.

§. 182. Wiederum wenn eben die Zahl 372 durch 7 multipliciret, das

Fa-

Factum 2604 bringt, und man soll sie durch 6 multipliciren, so kan man nur die einfache Zahl 372 von dem Product derselben durch 7, welches 2604 ist, abziehen. Es bleibt, wenn dieses gethan wird, die Zahl 2232, welches das Product aus 372 durch 6 ist, so zu finden war.

§. 183. Man hat mit einem Wort nur immer darauf zu sehen, wie der Factor, durch welchen multipliciret werden soll, aus denjenigen Factoren, durch welche bereits multipliciret worden ist, entstanden sey, und das gesuchte Factum aus den vorigen eben so zu machen. Es sey 372 durch 7 zu multipliciren, aber allbereits durch 3 multipliciret, wovon das Factum ist 1116, und durch viere, und hievon sey das Factum 1488. Der Factor durch welchen multipliciret werden soll, 7, entstehet, indem man die zwey Factoren, durch welche bereits multipliciret worden ist, zusammen setzet: also entstehet auch das Factum der gegebenen Zahl 372 durch 7, indem man die zwey vorige Producte addiret. Es ist demnach dieses Factum = 1116 + 1488 = 2604.

§. 184. Nun sey 372 durch 7 multipliciret, und das Factum sey 2604. Ferner sey eben die Zahl durch 3 multipliciret, und das Factum 1116, man soll finden, wie viel komme, wenn man eben die Zahl 372 durch 4 multipliciret. Es entstehet 4 aus den Zahlen 7 und 3, wenn man 3 von 7 abziehet; also wird auch das Factum aus 372 durch 4 entstehen, wenn man das Factum 372×3 von dem Producte 372×7, das ist 1116 von 2604 abziehet, und demnach seyn 2604 — 1116 = 1488.

§. 185. Ferner sey 372 durch 3 multipliciret; und das Factum sey 1116, man soll eben die Zahl durch 6 multipliciren. Der Factor 6 ist der vorige Factor 3 zweymal genommen: also ist auch das gesuchte Factum zweymal so groß, als das gefundene, und entsteht, indem man jenes zweymal nimmet, demnach ist 372×6 = 1116×2 = 2232.

§. 186. Eben so ist es auch in dem nächstfolgenden Fall, da gesetzt wird, es sey noch die Zahl 372 durch 6 multipliciret, und also das Factum 2232 entstanden, man soll aber dieselbe durch 2 multipliciren. Der Factor 2 entstehet aus dem vorigen 6, wenn man jenen durch 3 dividiret; eben so entstehet auch das Factum aus dem vorigen so allbereit gefunden ist, wenn man jenes durch eben die Zahl 3 theilet, und ist demnach 744.

§. 187. Es wird vielleicht nicht undienlich seyn, wenn wir uns diese Sache nochmals von forne vorstellen, weil sie von wichtigen Nutzen ist. Man schreibe die Einheit vor sich, und neben derselben eine andere Zahl nach Belieben als 7, wie diese bey A stehet:

1	7	A
3	21	B
4	28	C
8	56	D
5	35	E
$2\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{2}$	F

Man mache so dann aus der 1, wie man will, eine andere Zahl, und aus der 7 ebenfals eine neue, eben so wie man die 3 aus der 1 gemacht hat. Diese Zahl ist 21 und steht neben der 3 bey B. Aus diesen Zahlen bey A und B mache man ferner neue Zahlen, indem man sie beyderseits zusammen addiret, wie die bey C entstanden sind, oder die kleinern von der grössern wegnimmet, oder sie beyderseits durch einerley Zahl multipliciret oder dividiret: und auf eben die Art mache man aus den Zahlen bey C und den vorigen noch andere. Wie denn die bey D entstanden sind, indem man die Zahlen bey C durch 2 multipliciret hat, und aus diesen die Zahlen bey E worden sind, indem man von den Zahlen bey D die bey B abgezogen: die Zahlen bey F aber sind die Helften der bey E. Es ist klar, daß wenn man dergestalt verfähret, jede Zahl unter der 7, als die bey D, aus der 7 so entstehe, wie die Zahl, die bey eben dem D unter der 1 stehet, aus der Einheit entstanden ist: denn es wird eben die Weise gebraucht, die Zahl unter der 7 bey D aus der 7 zu machen, nach welcher man die Zahl unter der 1 bey eben dem D aus der Einheit machet I, 103.

§. 188. Da demnach die bey D unter der 7 stehende Zahl 56 aus der 7 eben so entstanden ist, wie die ebenfals bey D unter der 1 stehende Zahl 8 aus der 1, so ist die Zahl 56 das Product aus 7 und 8. I, 82. Es kan also dieses Product auf gar verschiedene Arten herausgebracht werden, nachdem man aus denen ersten 1 und 7, andere Zahlen nach Belieben machet, und von diesen wieder auf andere komt, bis endlich die bey D stehende Zahlen heraus gebracht werden.

§. 189. Will man also überhaupt eine Zahl, als hier 7, durch eine jede andere als 8 multipliciren: so darf man sich nur, wie I, 183. gesaget worden ist, überhaupt vorstellen, wie die 8 aus der Einheit werden kan, und so dann aus 7 andere Zahlen, und aus diesen wieder andere auf eben die Art heraus bringen.

§. 190. Dieses nun weiter anzuwenden, wollen wir uns vorstellen, es sey die Zahl, der wir uns bis anhero immer bedienet haben 372 zu multipliciren durch 642, da man, dem zufolge, so bereits bekant ist, sie erstlich

lich durch 2 zu multipliciren hat, hernach durch 4, so dann durch 6. Man kan das zweyte Product heraus bringen, wenn man das erste gedoppelt nimt, und das dritte, wenn man die zwey erstern addiret. Nemlich $372 \times 2 = 744$, so dann $372 \times 4 = 744 \times 2 = 1488$. Ferner $372 \times 6 = 372 \times 2 + 372 \times 4 = 744 + 1488 = 2232$; durch diesen Weg erhält man die Producte, welche in der Rechnung erfordert werden, etwas leichter als durch die unmittelbare Multiplication. Man hat nunmehro nichts zu thun, als, was dergestalt gefunden worden ist, gehörig in Ordnung zu setzen, und so dann zu addiren;

also	372	oder also	372
	642		642
	744		744
	1488		744 :
	2232		744 :
	238824		744 ::
			744 ::
			744 ::
			744 ::
			238824

Hätte man eben die Zahl 372 durch 264 multipliciren sollen, so wäre eben der Vortheil anzuwenden gewesen, und man kan in allen solchen Fällen die herausgebrachte Producte in der Ordnung setzen, in welcher sie nach und nach kommen, wie nachstehende Rechnung ausweiset:

372
264
744..
1488
2232.
98208

Hiedurch achten wir gnugsam gezeigt zu haben, wie man sich des angewiesenen Vortheils in allen übrigen Fällen bedienen könne.

§. 191. Bey der Division kommen diese Vortheile fast noch besser zu statten. Es sey eine gegebene Zahl 7953847 durch eben die 372 zu dividiren;

```
D 372)  7953847 | 21381
      A 744::::
        -------
          513:::
      B   372:::
        -------
          1418::
      C   1116::
        -------
          3024:
      E   2976:
        -------
           487
      F    372
        -------
           115
```

Hier ist das Product bey A, der Theiler D doppelt genommen: B ist so groß als D; C ist = 3 D, und folgends A + B. Es wird also diese Zahl aus dem A und B leicht gefunden. E ist = 8 D, und folgends = 4 A, oder = 2 C + A, und kan ebenfals ohne grosse Schwierigkeit gefunden werden: man muß aber jederzeit auf die Bedeutung der Ziffer wohl Acht haben, indem man die Producte auf die Art heraus bringet.

Gebrauch dieser Vortheile bey der Probe der Multiplication.

§. 192. Wil man sich dieser Bequemlichkeit nicht bedienen, die Rechnung selbst zu erleichtern, so kan man sie wenigstens mit grossem Nutzen gebrauchen, die gemachte Rechnung zu probieren, ob sie richtig sey. Es ist kein Zweifel, daß, wenn die Regeln gehörig angewendet werden, jederzeit die gesuchte Zahl ohne Irthum heraus komme. Aber man kan in dieser Anwendung fehlen, und es ist gut, daß man etwas habe, wodurch man sich mit aller Wahrscheinlichkeit versichern kan, daß man nicht gefehlet habe. Die gewiesene Arten einerley Product heraus zu bringen, geben uns dieses Mittel an die Hand; denn wenn man einerley Product auf verschiedene Art rechnet und würklich einerley heraus bringt, so ist die gröste Wahrscheinlichkeit da, daß man nicht gefehlet habe.

§. 193. Wir haben I, 67. gesehen, wie diese Untersuchung, ob man gefehlet habe oder nicht, bey der Addition und Subtraction anzubringen sey. Die Division probiret die Multiplication. Der Quotiente durch den Theiler multipliciret, giebt allezeit die Zahl, welche dividiret worden ist I, 139. Man kan also diese Multiplication verrichten und sehen, ob der gefundene Quo-

tient

tient dadurch der dividirten Zahl gleich wird. Man muß den ganzen Quotienten nehmen, wie er meistentheils aus einer ganzen Zahl und aus einem Bruche bestehet. Oder wenn man nur die ganze Zahl nehmen will, so muß man derselben so dann die zuletzt übrig gebliebene Zahl, das ist den Zehler des Bruchs, zusetzen. Diese Summe muß, wenn richtig gerechnet worden ist, der dividirten Zahl gleich seyn. In dem letzten Exempel der Division I, 191. war

der Quotient in ganzen Zahlen		21381,
der Divisor - - =	=	372
		42762
		149667
		64143
das Factum von diesen ist		7953732
das Uebergebliebene war		115
die Summe hievon		7953847 ist die dividirte Zahl.

§. 194. Es ist aber hiebey verdrießlich, daß man erstlich selbst in der Multiplication fehlen kan, welche man, die etwan begangene Fehler zu entdecken, anstellet, zweytens aber, daß, wenn auch ein Fehler wahrhaftig entdecket worden ist, man nicht wissen kan, wo er stecke, und sich dadurch gezwungen siehet, die ganze Rechnung wieder von forne vorzunehmen. Es ist also wohl am besten, wenn man, so bald in dem Quotienten eine neue Ziffer gefunden ist, probiret, ob dieselbe richtig gesetzet, und alles übrige, so noch ferner dabey zu verrichten war, wohl in Acht genommen worden sey, das ist, ob man wohl multipliciret und subtrahiret habe. Wie das letztere geschehen soll, ist I, 67. gewiesen worden, das erstere ist nichts anders als die Probe der Multiplication.

§. 195. Man kan zu dem Ende, wie I, 190. ist gezeiget worden, jedes Product auf zwey oder mehrere Arten machen. Ich soll eine gegebene Zahl 79 durch 6 multipliciren; ich thue dieses und bringe 474 heraus. Will ich wissen ob ich hierinnen nicht gefehlet habe, so multiplicire ich eben die Zahl durch 3, das Product wird 237, welches gedoppelt genommen 474 giebt wie vorher. Diese Uebereinstimmung läst mich nicht anders glauben, als, ich habe weder das erste noch das zweyte mal gefehlet.

Eine andere Probe der einfachen Rechnungsarten.

§. 196. Man hat noch eine andere Probe, welche sich zwar bey allen Rechnungsarten anwenden läst, aber nirgends mit grösserer Bequemlichkeit als bey der Multiplication: ich meine diejenige, welche durch Wegwerfung der 9 geschieht. Der Grund davon ist dieser. Gesetzt, man habe nachfolgende Zahlen zu addiren

5987
543
625
92
7247

man lasse aber in denselben die Ziffer schlechterdings Einheiten bedeuten, ohne darauf Acht zu haben, von welcher Ordnung diese Einheiten sind; so wird man finden, daß, indem man die erste Säule von Ziffern zusammen setzet, und 17 Einheiten heraus bringt, oder 10+7, man zwar die letztern 7 anmerket, an statt der 10 aber nur 1 schreibet, nemlich eine Einheit von der ersten höhern Ordnung, welche hier von den übrigen nicht unterschieden wird. Demnach läst man 9 Einheiten weg, welche in den Ziffern nicht geschrieben werden. So ist es auch in der zweyten Säule, da durch die Addition 24, oder 20+4 oder 10+10+4 heraus gebracht wird; man schreibet die 4, und die übrigen 20 Einheiten, die in eben dieser Säule enthalten sind, zeiget man bloß durch eine 2 an, welche in die nächste Stelle gebracht wird. Es werden also wieder von jeden 10 Einheiten, die hier vorkommen, deren Neune ausgelassen, die nicht geschrieben werden, weil die Gesetze die Zahlen zu schreiben, auf eine ganz andere Art die vollen Zehen ausdrücken. Eben so verfähret man mit den übrigen Säulen: Daß also in der Addition, wenn man sie von dieser Seite ansiehet, nichts anders gethan wird, als daß man in den gegebenen Ziffern die 9 verschiedene mal wegwirft, und den Ueberrest über die weggeworfene 9 in der Summe anmerket.

§. 197. Man werfe nunmehro von der Summe wieder die 9 so oft weg

weg als man kan, ohne auch hier auf die Ordnungen der Einheiten, die von den Ziffern bedeutet werden, Acht zu haben, so bleiben in unserm Exempel 2 übrig, welche man also erhalten hat, indem man von allen Ziffern derer Zahlen, die zu addiren waren, 9 so oft weggeworfen, als nur möglich gewesen ist. Denn erstlich hat man derselben verschiedene weggethan, indem man die Summe geschrieben, und hernach sind die übrigen, welche in der Summe noch da geblieben waren, ebenfals weggeworfen worden. Es folget hieraus, daß wenn in eben den Ziffern der Zahlen, welche zu addiren vorgegeben worden, alle 9 welche darin angetroffen worden, oder aus der Addition derselben entstehen, nochmals weggeworfen werden, nunmehro ebenfals die Zahl 2 und keine andere übrig bleiben müsse, ob man gleich einer ganzen andern Ordnung folget, die Ziffer zusammen zu setzen, und aus denselben die 9 heraus zu bringen. Wie denn in dem Exempel, so vor uns stehet, allerdings geschiehet, wenn man in den Reihen der Zahlen von der linken zur rechten fortgehet. Es ist der Ueberschuß über die 9 aller Ziffer der ersten Reihe 2, in der zweyten ist dieser Ueberschuß 3, in der dritten 4, und in der vierten wieder 2, welche Zahlen zusammen genommen 11 geben. Wenn man also von diesen Ueberbleibseln wieder 9 so oft wegwirft, als man kan, so bleibt, wie in der Summe, 2 übrig, und dergleichen muß allzeit erfolgen, wenn richtig gerechnet worden ist.

§. 198. Erfolgt es also, und bleibt in der Summe nach Wegwerfung aller 9, welche man durch die Addition der Ziffer derselben heraus bringt, eben so viel als in den addirten Zahlen nach ebenmäßiger Wegwerfung der 9 übrig bleibt, so kan man glauben, daß richtig gerechnet worden sey. Ich sage man kan es glauben, denn es folgt nicht untrüglich. Es sind viele Zahlen, welche, wenn man auf die Art verfähret, einerley übrig lassen. Man versetze in unserer Summe die Ziffer, und schreibe an statt 7247 zum Exempel 7742, so bleibt ebenfals nach Abzug der 9 die Zahl 2 übrig. Man nehme der einen Ziffer etwas ab, und setze es einer andern zu, oder vertheile es unter verschiedene andere, als von der ersten Ziffer nehme man 2, und setze 1 zu der zweyten, und 1 zur dritten, und schreibe also an statt 7247, die Zahl 5357 so bleiben nach Abzug aller 9, nach wie vor 2 übrig.

§. 199. Hiedurch, und weil wegen der Menge der Ziffer, die meistentheils bey der Addition vorkommen, die Probe fast schwerer wird, als die Rechnung selbst, wird dieselbe bey der Addition fast unbrauchbar. Bey der Multiplication aber fällt ein grosser Theil dieser Unbequemlichkeit weg. Es sey 7532 durch 4 zu multipliciren.

7532	8
7532	8
7532	8
7532	8
30128	5

Wir haben hier die Multiplication durch eine wiederhohlte Addition verrichtet, und dasjenige so übrig bleibt, wenn man von einer jeden der zu addirenden Zahl, das ist, von dem Factor 7532 die 9 so oft als es sich thun läst, abziehet, darneben gesetzt, und eben dieses ist auch bey der Summe oder dem Product geschehen, um die Verknüpfungen des gegenwärtigen mit demjenigen, so von der Addition eben I, 197. gesagt worden ist, desto besser zu zeigen. Nemlich bey der Zahl welche zu multipliciren war, bleiben 8, und bey dem Product 5. Nun soll man von diesen vier 8 welche übrig geblieben sind, wieder die 9 so oft wegwerfen als man kan. Dieses Wegwerfen aber geschiehet überhaupt, wenn man die Zahlen, von welchen 9 wegzuwerfen ist, dergestalt zusammen setzet, daß man in der Summe alle Ziffer wieder nur einfache Einheiten gelten läst, indem man vor 12 zum Exempel 3 annimt, vor 32 aber 5, und so ferner I, 196. Man wird also auch in dem gegenwärtigen Exempel alle übrig gebliebene 8 zusammen setzen, oder welches eben das ist, die 8 so bey dem 7532 stehet, durch die Zahl derselben, oder durch den Factor 4 multipliciren müssen. Die Summe oder das Product 8×4 das ist 32, wird wenn richtig gerechnet ist, 5 Einheiten enthalten, eben so viel als das Factum.

§. 200. Und so ist es allezeit. Die Zahl der Einheiten welche in dem einen Factor nach Wegwerfung der 9 übrig bleibt, durch den andern Factor multipliciret, giebt eine Zahl, in welcher, nach ebenmässigem Abzug aller 9, eben so viel übrig bleibt, als in dem Producte, wenn man aus die-

diesem ebenfals jede 9 Einheiten von welcherley Ordnung sie auch seyn mögen, weglässet. Wenn demnach eine Zahl durch eine andere multipliciret worden ist, und man findet nach dieser Wegwerfung der 9 des einen Factors, daß der Ueberschuß, durch den andern Factor multipliciret, eine Zahl heraus bringe, deren Ueberschuß über die 9 eben so groß ist, als der Ueberschuß über die 9 des Products, so ist zu glauben, daß das Product richtig sey. Ich sage wieder, es ist zu glauben. Denn es kan aus dieser Probe die Richtigkeit des Products eben so wenig mit einer vollkommenen Gewißheit geschlossen werden, als wenig bey der Addition die Richtigkeit der Summe aus eben der Probe ohne Widerspruch folget. Doch muß man auch dieses sagen, daß sich hier nicht so leicht ein Fehler einschleichen werde als bey der Addition.

§ 201. Wie nun diese Probe geschickt anzuwenden sey, kan das nachstehende Exempel weisen:

A	3597348	3
	974	
B	14389392	3
C	25181436	3
D	32376132	0
E	35038169 52	6

Nachdem man von der Zahl bey A, welche solte multipliciret werden, alle 9 weggelassen hat, welche in den Ziffern derselben enthalten sind, ist die darneben stehende 3 übrig geblieben. Die Zahl bey A durch 4 multipliciret, giebt das Product B. Wenn man von diesem B wieder Neune so oft wegläst als man kan, bleibet die darneben stehende 3 übrig. Und wenn die bey A stehende 3 ebenfals durch 4 multipliciret wird, komt 12, so hier eben so viel als als 3. Dieses ist ein Zeichen, daß die Reihe B richtig sey. Wiederum wenn A durch 7 multipliciret wird, komt C. Der Ueberschuß der Ziffer dieser Zahl über 9 ist die nebenstehende 3. Multipliciret man aber den Ueberschuß bey A ebenfals mit 7, so komt 21, das ist wieder 3, zum Zeichen, daß auch diese Reihe richtig sey. In der Reihe D ist der Ueberschuß 0, und 3 durch 9 multipliciret giebt 27, das ist ebenfals 9 oder 0. Die Summe der also gefundenen Zahlen 3, 3, 0 ist 6, so viel muß auch in der Summe der Producte B+C+D, oder in dem gesuch-

ten Product E übrig bleiben, wenn die Rechnung richtig ist, wie dieses sich in dem Exempel ergiebet.

§. 202. Auf diese Art probiret man jeden Absatz bey der Multiplication, ehe man weiter gehet, und man versichert sich, so viel geschehen kan, daß in dem vorhergehenden kein Fehler zurück geblieben sey, welcher in das folgende einen Einfluß haben könte. Eben so kan auch untersuchet werden, ob die Producte, deren man bey der Division benöthigt ist, richtig gefunden sind, so bald man sie gemacht hat, und ehe man sie anwendet; und auf diese Producte komt es hauptsächlich an. Denn die bey der Division ferner vorzunehmende Subtraction braucht selten einer Probe; findet man aber eine nöthig, so ist schon gezeiget worden, daß keine bequemer und richtiger sey, als die Addition.

Zweyter Abschnitt.

Von der Berechnung der Brüche.

Gründe der Bruchrechnung.

§. 1.

Nunmehro können wir uns zu den gebrochenen Zahlen wenden, und die Rechnungsarten welche mit denselben vorzunehmen sind, etwas vollständiger erklären. Es ist verschiedenes von denselben bereits angebracht worden, so sich aus den allgemeinen Gründen, welche wir betrachtet haben, unmittelbar herleiten ließ. Wir haben gesehen, daß die Summe zweyer oder mehrerer Brüche von gleicher Benennung gefunden werde, wenn man ihre Zehler zusammen addiret, den Nenner aber stehen lässet: und daß, den Unterschied zweyer Brüche, welche wieder einerley Benennung haben, zu finden, man nur den kleinern Zehler von dem grössern abziehen, und den Ueberschuß an die Stelle des Zehlers eines Bruchs setzen müsse, dessen Nenner der vorige ist, welcher Bruch der gesuchte Unterschied seyn wird. I, 79. Es ist übrig, daß wir weisen, wie die Addition und Subtraction bey solchen Brüchen zu verrichten sey, welche verschiedene Benennungen haben.

§. 2. Ferner haben wir gesehen, wie ein jeder Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren sey, und es sind zwo Arten dieses zu verrichten angegeben worden. Entweder multipliciret man den Zehler des Bruchs $\frac{4}{9}$ durch die multiplicirende ganze Zahl 3, und läst den Nenner stehen: I, 89. oder man dividiret den Nenner des Bruchs durch die gedachte Zahl, durch welche man den Bruch multipliciren soll, und verändert den Zehler nicht, I, 149. Die auf die Art heraus gebrachte Brüche $\frac{12}{9}$ und $\frac{4}{3}$ sind das Product, welches man suchte: sie sind einander gleich, und es bedeutet einer eben so viel als der andere, wenn die ganze Einheit, auf welche sie sich beziehen, einerley ist, wie dieses allezeit bey allen gleichen Zahlen zum Grunde gesetzt werden muß.

§. 3. Eben so haben wir auch zwo Arten gesehen, nach welchen ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiret werden kan. Man dividiret entwe-

der

der den Zehler des Bruchs $\frac{6}{7}$ durch die Zahl 3, durch welche der Bruch dividiret werden soll, und läst den Nenner unverändert, I, 143. oder man multipliciret den Nenner desselben durch eben die Zahl 3 ohne den Zehler zu ändern, I, 145. Die dergestalt heraus gebrachte Brüche $\frac{2}{7}$, oder $\frac{6}{21}$ sind der Quotient welchen man suchte. Alles dieses ist gezeigt worden, und wir können hier voraus setzen, daß es bekannt sey, und uns zu dem wenden, so noch rückständig ist, wie man nemlich eine jede ganze oder gebrochene Zahl durch einen Bruch multipliciren oder dividiren soll.

§. 4. Der Grundsatz auf welchen wir hiebey bauen werden, ist ebenfals bereits angemerket worden. Er ist dieser: Wenn man eine Zahl, sie mag ganz oder gebrochen seyn, durch eine andere ganze Zahl erst multipliciret, und hernach dividiret, oder erst dividiret und hernach multipliciret, so wird die Zahl nicht verändert. I, 139. Es ist derselbe auch in dem Fall richtig, wenn man eine Zahl durch einen Bruch multipliciret, und hernach das Product durch eben den Bruch dividiret, oder wenn man sie erst durch den Bruch dividiret und hernach multipliciret. Die Zahl wird dadurch eben so wenig verändert, als wenn man diese Rechnungsarten mit einer ganzen Zahl verrichtet. Allein wir haben von der Multiplication und Division vermittelst gebrochener Zahlen noch keinen vollkommen deutlichen Begrif beygebracht, und aus der Ursach uns enthalten müssen, den Satz in seinem vollkommenen Inbegrif vorzutragen. Er ist übrigens an sich selbst klar. Denn was ist deutlicher, als daß, wenn ich ein Ding verdoppele oder dreyfach nehme, und, was dergestalt heraus gebracht worden ist, wieder in zwey oder drey gleiche Theile theile, ein solcher Theil eben dasjenige seyn müsse, so ich vorher verdoppelt oder drey mal grösser gemacht habe? Eben so klar ist es, daß wenn man ein Ding erstlich in drey oder fünf gleiche Theile theilet, dieser Theile aber hernach drey oder fünfe nimt, man dasjenige Ganze wieder erhalte, so im Anfang da gewesen ist.

§. 5. Man nehme diese Begriffe zusammen, und wende sie auf die Brüche an. Es sey der Bruch $\frac{2}{12}$ gegeben. Man multiplicire ihn durch 2, welches man thun kan, indem man den Zehler mit 2 multipliciret, wodurch $\frac{4}{12}$ kommt, oder indem man den Nenner durch 2 dividiret, wodurch man $\frac{2}{6}$ erhält. Jedweden dieser Brüche dividire man wieder durch 2, so wird aus dem ersten welcher $\frac{4}{12}$ war, wenn man die Division des Bruchs durch die Division des Zehlers verrichtet $\frac{2}{12}$, und aus dem zweyten wird, wenn man nach eben der Art dividiret, $\frac{1}{6}$. Bedienet man sich aber zur Division der Brüche der Multiplication des Nenners, so wird aus dem erstern Product $\frac{4}{12}$ nunmehro $\frac{4}{24}$, und aus dem zweyten $\frac{2}{6}$ wird $\frac{2}{12}$.

Die-

Diese vier Brüche demnach $\frac{2}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{24}$, $\frac{2}{12}$ bedeuten einerley. Allein der erste und der letzte ist von dem gegebenen gar nicht unterschieden, wohl aber sind der zweyte und der dritte durch ganz andere Zahlen ausgedrückt.

§. 6. Es entstunde der zweyte dieser Brüche $\frac{1}{6}$ aus der Division des Zehlers und des Nenners des zuerst gegebenen Bruchs $\frac{2}{12}$ durch die ganze Zahl 2, und der dritte $\frac{4}{24}$ kam durch die Multiplication des Zehlers und des Nenners eben desselben Bruchs $\frac{2}{12}$, durch eben die Zahl 2. Wenn man demnach den Zehler und den Nenner eines gegebenen Bruchs durch einerley ganze Zahl multipliciret oder dividiret, und die Producte oder die Quotienten vor die Zehler und Nenner neuer Brüche annimt, so haben diese Brüche eben die Bedeutung, welche der gegebene hatte, ob sie zwar grössere Zahlen zu Zehlern und Nennern haben, wenn man sich der Multiplication bedienet, und kleinere, wenn die Division gebraucht worden.

[*Fig. 18.*] §. 7. Zu grösserer Deutlichkeit haben wir einerley Stück der ganzen Linie AB, welches die Brüche $\frac{4}{12}$, $\frac{2}{6}$ und $\frac{1}{3}$ ausdrücken sollen, dreymal vorgestellet. Dieses Stück ist AC: in der ersten Linie ist AC $\frac{4}{12}$, in der zweyten $\frac{2}{6}$, in der dritten $\frac{1}{3}$: Und man siehet, daß $\frac{2}{6}$ so viel sey als $\frac{4}{12}$, weil in dem letztern Bruch die Theile zwar nur halb so groß sind, als in dem erstern, derselben aber im Gegentheil zwey mal mehr angenommen worden, das Stück AC auszumachen. Eben so sind die Theile des Bruchs $\frac{1}{3}$ wieder zwey mal grösser als die Theile des Bruchs $\frac{2}{6}$, aber im Gegentheil hat man derer bey dem letzten Bruch $\frac{2}{6}$, zwey mal so viele, als bey dem ersten $\frac{1}{3}$, welche Verminderung der Grösse der Theile, bey der Vermehrung ihrer Zahl, eben machet, daß man einmal so viel als das andere bekömt, nemlich AC. I, 15.

Das Aufheben der Brüche.

§. 8. Nun kan das so genannte Aufheben der Brüche, da man nemlich eben das Stück des Ganzen, so durch eine gebrochene Zahl ausgedrücket wird, durch eine andere ausdrücken soll, welche kleinere Zahlen zum Zehler und Nenner hat, nicht die geringste Schwierigkeit haben. Es sey der Bruch $\frac{12}{15}$ durch kleinere Zahlen auszudrücken. Man suche eine Zahl welche den Zehler 12 und den Nenner 15 zugleich genau theilet. Diese ist hier 3. Man dividire so dann diese zwo Zahlen durch die gefundene 3, und setze den Quotienten von der Division des Zehlers, welcher 4 ist, zum Zehler, und den Quotienten von der Division des Nenners 5 zum Nenner des neuen Bruchs $\frac{4}{5}$, welcher dem gegebenen $\frac{12}{15}$ gleich seyn, II, 6.

und weil die Division gebraucht worden ist, aus kleinern Zahlen bestehen wird.

§. 9. Es werden hier solche Zahlen genommen, welche den Zehler und den Nenner ohne neue Brüche theilen, nicht als ob man nothwendig dergleichen wehlen müste, sondern weil auf diese Art Brüche kommen, deren Nenner und Zehler ganze Zahlen sind, welche sich am leichtesten übersehen lassen. Denn daß man einen Bruch leichter übersehen, und von seinem Werth sich einen desto vollkommenern Begrif machen möge, ist der Zweck der Arbeit, welche wir hier lehren, weil man die Grösse des Bruchs leichter einsiehet, wenn die Zahlen, durch welche er ausgedrücket wird, klein, als wenn sie groß sind. Wenn man dieses nicht achtet, oder wenn sich besondere Umstände hervor thun, kan man auch den Zehler und Nenner durch solche Zahlen theilen, welche bey einer oder der andern dieser Zahlen einen neuen Bruch lassen. Will man bey dem Bruch $\frac{9}{12}$ zur Theilung die Zahl 4 gebrauchen, so bekömt man den mit kleinern Zahlen geschriebenen Bruch $\frac{2\frac{1}{4}}{3}$ und dieser bedeutet, wie bereits I, 145. angezeiget worden ist, daß man die ganze Einheit in drey gleiche Theile theilen müsse, und solcher Theile 2, und über dieses noch $\frac{1}{4}$ eines solchen Theils annehmen, um dasjenige zu erhalten, so der Bruch $\frac{2\frac{1}{4}}{3}$ ausdrücket.

[*Fig. 19.*] §. 10. Eben so kan man es auch bey dem Bruch $\frac{4}{9}$ machen; man kan den Nenner und den Zehler durch 4 dividiren, komt der Bruch $\frac{1}{2\frac{1}{4}}$, welcher anzeiget, daß man die Einheit so theilen müsse, daß in dieselbe zwey gleiche Theile, und über das $\frac{1}{4}$ eines solchen Theils, kommen, und daß eins von diesen Theilen dasjenige sey, so die gebrochene Zahl ausdrücket. Die Linie AB in der 19 Figur, welche die Einheit seyn sol, ist so getheilet. AC ist ein Theil, CD = AC der andere, und DB ist $\frac{1}{4}$ von AC. Demnach ist AC eins von den Theilen, deren zwey und $\frac{1}{4}$ auf AB gehen, das ist, AC ist derjenige Theil der ganzen AB, welchen der Bruch $\frac{1}{2\frac{1}{4}}$ ausdrücket. Man kan sich also solcher Zahlen, welche den Zehler oder den Nenner nicht genau theilen, bedienen, aber man muß sich derselben nicht anders bedienen, als wenn man Bequemlichkeit davon hat. Dieses aber kommt auf die Einsicht eines jeden an, und man kan davon keine allgemeine Regeln geben.

§. 11. Indessen siehet man auch hieraus, wie die gebrochene Zahlen aus den Nennern und Zehler der Brüche wegzubringen sind, wenn welche

in

in denselben vorkommen. Man hat zu dem Ende nichts zu thun, als so wohl den Nenner als den Zehler des Bruchs durch den Nenner desjenigen Bruchs zu multipliciren, welcher in demselben vorkomt. Es sey, zum Exempel, aus dem Nenner des Bruchs $\frac{2\frac{2}{3}}{5}$ der Bruch $\frac{2}{3}$ wegzuschaffen: so multiplicire ich so wohl den Zehler desselben $2\frac{2}{3}$ durch 3, den Nenner des Bruchs $\frac{2}{3}$, welcher in dem Zehler vorkomt; als auch den Nenner 5: dadurch komt vor den Zehler 6+2 oder 8, I, 149. und vor den Nenner 15, und der Bruch, welcher dem gegebenen $\frac{2\frac{2}{3}}{5}$ gleich ist, ist $\frac{8}{15}$.

§. 12. Eben so wird auch der Bruch aus dem Nenner des Bruchs $\frac{2}{3\frac{4}{5}}$ weggebracht. Ich multiplicire so wohl den Zehler 2 als den Nenner $3\frac{4}{5}$ dieses Bruchs durch 5, den Nenner, welcher in dem Bruch $\frac{4}{5}$ befindlich ist. Da denn durch die Multiplication des Zehlers 10 und durch die Multiplication des Nenners 15+4, das ist 19 komt. Demnach ist der Bruch, welcher dem gegebenen $\frac{2}{3\frac{4}{5}}$ gleich ist, $\frac{10}{19}$. Solten so wohl in dem Zehler als in dem Nenner dergleichen Brüche vorkommen, wie zwar sehr selten geschiehet: so würde man nach dieser Anweisung erst denjenigen, welcher in dem Zehler enthalten ist, und so dann auch denjenigen, welcher sich in dem Nenner befindet, fortschaffen müssen. Das nachstehende Exempel kan weisen, wie dieses geschiehet. Der gegebene Bruch sey $\frac{2\frac{1}{3}}{7\frac{2}{5}}$. Multipliciret man nun die beyden Glieder desselben durch 3, so komt der Bruch $\frac{7}{21\frac{6}{5}}$, welcher dem vorigen gleich ist, und aus welchem der noch rückständige Bruch $\frac{6}{5}$ weggebracht werden kan, wenn man die Glieder desselben mit 5 multipliciret, wodurch man den verlangten Bruch $\frac{35}{111}$ erhält.

§. 13. Was aber diejenige Zahlen anlanget, welche die Zehler und Nenner der Brüche genau theilen, so wird hernach gewiesen werden, wie sie zu finden sind; sie fallen einem aber auch ohne diesen Regeln meistentheils ohne sonderliche Schwierigkeit bey. Man thut am besten, wenn man unter allen gemeinschaftlichen Theilern des Zehlers und Nenners eines Bruchs den grösten nimt, denn dadurch bekomt man gleich Anfangs die kleinsten Zahlen, durch welche ein Bruch ausgedrücket werden kan. Man kan aber auch durch eine wiederhohlte Division endlich zu der kleinsten Benennung gelangen, wenn sich der Zehler und der Nenner des Bruchs durch mehr als

eine Zahl genau dividiren lassen. Also wird $\frac{12}{36}$, wenn man den Zehler und den Nenner durch 3 dividiret, mit kleinern Zahlen ausgedrücket in dem Bruch $\frac{4}{12}$, wenn man hier nochmals den Zehler und Nenner durch 2 theilet, bekomt man einen Bruch, der eben so viel als der vorige bedeutet, und noch kleinere Zahlen hat $\frac{2}{6}$, die Zahlen dieses Bruchs aber wieder durch 2 dividiret, geben die allerkleinste Benennung, welche eben das ausdrücken kan, so in dem Bruch $\frac{12}{36}$ enthalten ist, man bekomt nemlich durch diese Division $\frac{1}{3}$, welches man auf einmal erhalten hätte, wenn gleich Anfangs der Zehler und der Nenner des gegebenen Bruchs durch 12 getheilet worden wäre.

§. 14. Dieses wäre überflüssig genug, dasjenige einzusehen, welches wir gegenwärtig insonderheit zu zeigen vorgenommen haben, wie man nemlich einen jeden Bruch zu kleinern Benennungen bringen könne. Denn wir behalten uns vor, diese Dinge noch besser aus einander zu setzen, und bündiger zu beweisen; allein einige Anwendungen, welche wir von dieser Sache ins künftige machen werden, erfordern, daß wir uns noch etwas weniges dabey aufhalten. Wir bemerken, daß eben durch diese Regel sich ein unächter Bruch in ganze Zahlen verwandeln lasse, so oft dieses geschehen kan. Denn $\frac{3}{1}$ ist nichts anders als drey ganze Einheiten, 1, 35. und so viel als 3; $\frac{5}{1}$ ist so viel als 5, und überhaupt ein jeder Bruch dessen Nenner 1 ist, ist einer ganzen Zahl, nemlich seinem eigenen Zehler, gleich.

§. 15. Demnach heisset einen unächten Bruch auf den Nenner 1 bringen, oder an die Stelle eines Bruchs einen andern schaffen, dessen Nenner 1 ist, so viel, als eine ganze Zahl finden, welche dem unächten Bruch gleich ist. Denn mit ächten Brüchen gehet dieses niemals an. Zum Exempel, wenn man in dem Bruch $\frac{6}{3}$ den Zehler und den Nenner durch 3 dividiret, so bekomt man $\frac{2}{1}$, welches so viel ist als $\frac{6}{3}$, und auch so viel als 2, und man hat an die Stelle des unächten Bruchs eine ganze Zahl gefunden, welche ihm gleich ist.

§. 16. Man siehet, daß dieses allezeit erfolget, wenn man zum gemeinschaftlichen Theiler des Zehlers und des Nenners den Nenner selbst annimt, und daß es auf eine andere Art nicht geschehen könne: Daß demnach ein Bruch, dessen Zehler sich durch den Nenner nicht genau theilen läst, auch nicht in eine ganze Zahl verwandelt werden kan, welche keinen Bruch bey sich hat. So kan man die Zahl $\frac{21}{7}$ in die ganze Zahl $\frac{3}{1}=3$ verwandeln, wenn man den Zehler so wohl als den Nenner durch den Nenner 7 theilet, aber $\frac{24}{7}$ läst sich nicht in eine dergleichen Zahl verwandeln, sondern man bekomt, wenn man die Regel hier anwenden wil, nichts anders

als

als $\frac{3\frac{3}{7}}{1}$ das ist $3\frac{3}{7}$ von der Einheit. Ein sehr geringes Nachdenken wird uns beybringen, daß diese Anweisung, einen unächten Bruch in eine ganze Zahl zu verwandeln, eben die sey, welche bereits ist gezeiget worden I, 142.

§. 17. Wir schließen hieraus: wenn ein Bruch sich nicht zu kleinern Benennungen bringen läst, so ist es auch nicht möglich, daß er einer ganzen Zahl gleich sey. Denn wenn ein Bruch einer ganzen Zahl gleich seyn sol, so muß er sich auf die allerkleineste Benennung, welche 1 ist, bringen lassen. Kan aber ein Bruch gar nicht zu kleinerer Benennung gebracht werden, so läst er sich noch viel weniger auf die kleinste Benennung 1 bringen.

§. 18. Kehret man nun alles, was bisher gesagt worden ist, um, so siehet man, wie hinwiederum eine jede ganze Zahl in einen Bruch von einer gegebenen Benennung verwandelt werde, und wie ein einziger unächter Bruch zu schaffen sey, der einer ganzen Zahl, so einen ächten Bruch bey sich hat, gleich ist. Ist eine ganze Zahl in einen Bruch zu verwandeln, zu welchem der Nenner gegeben ist, so multipliciret man die ganze Zahl durch den gegebenen Nenner, und nimt das Product zum Zehler an. Die Zahl 5 soll in einen Bruch verwandelt werden, in welchem 3 der Nenner ist, so ist $\frac{5\cdot 3}{3} = \frac{15}{3}$ dieser Bruch. Ist aber $5\frac{2}{3}$ ganz in einen Bruch zu verwandeln, so multipliciret man so wol die ganze Zahl 5 als den Bruch $\frac{2}{3}$ durch den Nenner dieses Bruchs 3. Dadurch erhält man $15+2=17$, den Nenner des gesuchten Bruchs, welcher folgends $\frac{17}{3}$ ist. Denn $5+\frac{2}{3}$ ist so viel als $\frac{15}{3}+\frac{2}{3}$, und die Summe dieser Brüche macht $\frac{17}{3}$.

Zween Brüche zu einerley Benennung zu bringen.

§. 19. Wenn man zwey Brüche mit einander vergleichen und sagen soll, welcher unter beyden grösser oder kleiner sey als der andere, so gehet dieses zum öftern schwer an, wenn sie verschiedene Nenner haben, wie man befinden wird, wenn man sich vornimt zu sagen, welcher von den beyden Brüchen $\frac{5}{13}$ oder $\frac{11}{27}$ grösser oder kleiner sey, als der andere. Dergleichen Brüche kan man auch nicht wohl zusammen setzen, oder einen derselben von dem andern abziehen, so lang die Nenner verschieden sind. Wenigstens kan dieses nach der bisherigen Anweisung keines weges geschehen. Denn wenn die Nenner verschieden sind, so sind die Theile, deren Anzahl die Zehler ausdrücken, von verschiedener Grösse, und lassen sich, so lang sie diese verschiedene Grössen behalten, nicht zusammen setzen, oder von einander abziehen I, 69. Ich kan zwar leicht sagen wie viel 5 und 11 ist, nem-

lich 16, aber wie viel ist $\frac{5}{13}$ und $\frac{11}{27}$ zusammen gesetzt, vielleicht $\frac{16}{13}$? aber warum nicht lieber $\frac{16}{27}$, oder vielmehr keines von beyden? Denn in der That kan $\frac{5}{13} + \frac{11}{27}$ eben so wenig $\frac{16}{13}$ oder $\frac{16}{27}$ seyn, als 5 Thaler und 11 Gulden, 16 Thaler oder 16 Gulden ausmachen können.

§. 20. Es ist demnach nicht allein von grosser Bequemlichkeit, sondern auch nothwendig, daß wir zween Brüche zu gleichen Benennungen zu bringen, das ist, an die Stelle zweener Brüche zween andere zu schaffen wissen, welche jenen gleich, und deren Nenner Zahlen von einerley Grösse sind. Die Sache ist leicht. Man multipliciret so wohl den Zehler als den Nenner eines jeden der gegebenen Brüche durch den Nenner des andern. Oder, damit man sich desto weniger verwirre, so setzet man zu jedem der gegebenen Brüche den Nenner des andern, und multipliciret so dann so wohl den Zehler als den Nenner desselben Bruchs durch die Zahl, die man ihm beygesetzet hat. Zum Exempel: ich soll zwey Brüche $\frac{4}{5}$ und $\frac{2}{3}$ unter einerley Benennung bringen: so multiplicire ich den Zehler so wohl als den Nenner des ersten Bruchs $\frac{4}{5}$ durch 3, welches der Nenner des andern Bruchs ist, es kommt dadurch $\frac{12}{15}$: und wiederum multiplicire ich so wohl den Zehler als den Nenner des andern Bruchs $\frac{2}{3}$ durch den Nenner des ersten 5, wodurch $\frac{10}{15}$ erhalten wird. Diese zwey Brüche sind die gesuchten. Sie sind den gegebenen zweenen gleich, nemlich $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, und $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, sie haben aber auch einerley Benennung. Der Grund dieser Arbeit ist ohne Schwierigkeit einzusehen.

§. 21. Die Brüche nemlich, welche man suchte, solten erstlich den gegebenen Brüchen gleich seyn. Es ist leicht einzusehen, daß diejenige Brüche, welche nach unserer Anweisung gemacht werden, diese Eigenschaft haben. $\frac{12}{15}$ ist dem Bruch $\frac{4}{5}$ gleich, weil jener aus diesem entstanden ist, indem so wohl der Zehler desselben als auch der Nenner durch die Zahl 3 multipliciret worden. Aus eben dem Grund ist auch der an statt des zweyten Bruchs $\frac{2}{3}$ gefundene neue $\frac{10}{15}$ diesem gleich, weil er ebenfals entstanden ist, indem man so wohl den Zehler als den Nenner desselben durch einerley Zahl, nemlich durch 5, multipliciret hat. Denn wir haben gesehen, daß durch solche Multiplicationen der Werth der Brüche, oder dasjenige so sie bedeuten, nicht verändert wird, man mag zur Multiplication eine Zahl annehmen was man vor eine wil. II,6. Zweytens solten die gesuchte Brüche auch einerley Benennung haben. Auch dieses wird durch eben die Multiplicationen erhalten. Vermöge derselben entstund der Nenner des Bruchs $\frac{12}{15}$, welcher zuerst gefunden worden ist, indem man den Nenner des ersten der gegebenen Brüche 5 durch den Nenner des andern 3 multiplicirte. Also ist der

Nen-

Nenner dieses Bruchs 15 das Product aus 5 und 3, den zween Nennern der gegebenen Brüche $\frac{4}{5}$ und $\frac{2}{3}$: der Nenner aber des zweyten gefundenen Bruchs $\frac{10}{15}$ kam, indem man den Nenner des zweyten der gegebenen Brüche durch den Nenner des ersten multiplicirte, und ist demnach wieder das Factum aus den zween Nennern der gegebenen Brüche. Da nun einerley Factore niemals verschiedene Producte bringen können, so können auch die Nenner, welche man dergestalt herausbringt, unmöglich verschieden werden.

§. 22. Eben so ist es in allen übrigen Fällen. Sol man die zwey Brüche $\frac{5}{6}$ und $\frac{8}{9}$ unter einerley Benennung bringen, so müssen die Multiplicationen ihrer Zahlen vorgenommen werden, welche nachfolgende Zeichen ausdrücken: $\frac{9\times5}{9\times6}$ und $\frac{6\times8}{6\times9}$, aus welchen alles was gesagt worden ist, daß nemlich die Brüche, welche man heraus bringet, denen gegebenen gleich seyn und einerley Benennung haben werden, leicht und kurz einzusehen ist. Die Brüche selbst werden demnach folgende seyn $\frac{45}{54}$ und $\frac{48}{54}$. Und nunmehro sind die gegebenen Brüche $\frac{5}{6}$ und $\frac{8}{9}$ leicht mit einander zu vergleichen, und man kan ohne Schwierigkeit sagen, welcher von beyden der grössere sey. $\frac{5}{6}$ ist so viel als $\frac{45}{54}$, und $\frac{8}{9}$ ist dem Bruch $\frac{48}{54}$ gleich, nun ist dieser Bruch $\frac{48}{54}$ ohnstreitig grösser als $\frac{45}{54}$, derowegen muß auch $\frac{8}{9}$ mehr seyn als $\frac{5}{6}$.

Brüche von verschiedenen Benennungen zu vereinigen.

§. 23. Man kan aber auch nunmehro einen Bruch finden, welcher so groß ist als die Summe der zween gegebenen Brüche $\frac{5}{6}$ und $\frac{8}{9}$. Denn weil $\frac{5}{6}=\frac{45}{54}$
und $\frac{8}{9}=\frac{48}{54}$, so muß auch die Summe der zween erstern Brüche $\frac{5}{6}+\frac{8}{9}$ der Summe der zween letztern $\frac{45}{54}+\frac{48}{54}$, gleich seyn, weil, wenn man gleiches zu gleichen hinzu thut, unmöglich ungleiche Summen kommen können. Diese letztere Summe aber kan durch einen einzigen Bruch ausgedrücket werden, wenn man die Zehler derselben zusammen setzet, und den Nenner stehen lässet, dergestalt $\frac{45+48}{54}$, oder $\frac{93}{54}$, wie oben I, 79. gelehret worden ist. Dieser Bruch $\frac{93}{54}$ ist also die Summe der gegebenen Brüche $\frac{5}{6}+\frac{8}{9}$. Und so verfähret man allezeit, wenn man zwey Brüche, welche verschiedene Benennungen haben, addiren, und ihre Summe durch einen einzigen Bruch ausdrücken sol. Man bringt sie erstlich unter einerley Benen-

nennung, und addiret so dann die also gefundene Brüche. Auch hieraus folget, daß $5\frac{2}{3}$ so viel sey als $\frac{15+2}{3} = \frac{17}{3}$, und man kan nach diesem Exempel jede Zahl, welche aus einer ganzen und aus einem Bruch bestehet, in einen unächten Bruch verwandeln.

§. 24. Von der Subtraction eines Bruchs von einem andern ist eben dergleichen zu sagen. Sol man den kleinern Bruch $\frac{5}{6}$ von dem grössern $\frac{8}{9}$ wegnehmen: so bringe man sie wieder beyde zu einerley Benennung, und schreibe an statt $\frac{5}{6}$ nach der gegebenen Anweisung $\frac{45}{54}$, und an statt $\frac{8}{9}$ setze man $\frac{48}{54}$. Alsdenn ziehe man den ersten dieser Brüche von dem letztern ab: welches, weil sie einerley Benennung haben, gar leicht geschehen kan, I, 79. Denn man darf nur den kleinern Zehler von dem grössern wegnehmen, und den Nenner stehen lassen. Dadurch wird der Unterscheid $\frac{48-45}{54}$, oder $\frac{3}{54}$ richtig gefunden.

§. 25. Man schliesset hieraus leicht, daß der Unterscheid von 5 und $\frac{2}{3}$ sey $\frac{15}{3} - \frac{2}{3} = \frac{15-2}{3} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$. Doch kan man, wenn der abzuziehende Bruch, ächt ist, diese Arbeit etwas geschwinder verrichten, wenn man betrachtet, daß $5 - \frac{2}{3}$ so viel sey, als $4 + 1 - \frac{2}{3}$. Nun ist $1 = \frac{3}{3}$, also $4 + 1 - \frac{3}{3} = 4 + \frac{3}{3} - \frac{2}{3}$, welches wieder, so viel ist als $4 + \frac{3-2}{3}$, oder $4\frac{1}{3}$. Man verwandelt nemlich nur eine Einheit der ganzen Zahl in einen Bruch, und ziehet von diesem Bruch den ächten Bruch ab, welcher von der ganzen Zahl abgezogen werden solte. Das Ueberbleibsel wird alsdann zu der um 1 verminderten ganzen Zahl gesetzt.

§. 26. Man braucht auch nichts mehrers zu wissen, als wie zween Brüche unter einerley Benennung zu bringen sind, wenn man so viele Brüche von verschiedenen Benennungen, als vorkommen mögen, mit einander **vereinigen** soll, welches geschiehet, in dem man unter verschiedenen gegebenen Brüchen diejenige addiret, die zu addiren sind, und diejenige von der Summe abzuziehen, welche man abziehen sol. Zum Exempel, man sol einen Bruch schaffen, welcher so viel beträgt als die nachstehende Reihe von Brüchen, nach Anweisung der ihnen vorgesetzten Zeichen + und —

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{7} - \frac{3}{8}$$

so mache man erstlich $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$. Man bringe nemlich diese Brüche unter einerley Benennung, so wird $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, und $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, und demnach $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$. Folgends ist auch $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$ so viel als $\frac{1}{6} + \frac{2}{5}$. Man darf also nur, um die erstern drey Brüche zu vereinigen, die zween letztern vereinigen. Unter einerley Benennung ist $\frac{1}{6} = \frac{5}{30}$, und $\frac{2}{5} = \frac{12}{30}$, demnach ist

auch

auch $\frac{1}{6}+\frac{2}{5}$ so viel als $\frac{5+12}{30}$, oder $\frac{17}{30}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$. Also ist ferner $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{1}{7}$ so viel als $\frac{17}{30}+\frac{1}{7}$. Diese Brüche aber sind unter einerley Benennung so viel als $\frac{119}{210}$ und $\frac{30}{210}$ und also machen unsere vier Brüche zusammen $\frac{149}{210}$. Eben so verfähret man auch, wenn man endlich die dergestalt vereinigten vier erstern Brüche mit dem allerletzten vereinigen will. Wir haben gefunden, daß jene zusammen so viel bringen als $\frac{149}{210}$, der letzte Bruch ist $\frac{3}{8}$ und sol abgezogen werden. Man bringet wieder diese Brüche unter einerley Benennung, so werden sie $\frac{1192}{1680}$ und $\frac{630}{1680}$, und wenn man den letztern dieser Brüche von dem erstern abziehet, so bleibt der Ueberschuß $\frac{562}{1680}$. Dieses ist nunmehro der Bruch, welcher allen gegebenen, wie sie mit ihren Zeichen verknüpft stunden, $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{1}{7}-\frac{3}{8}$, gleich ist, welchen man ferner zu kleinern Benennungen bringen kan, wenn man den Zehler und den Nenner durch 2 dividiret. Es wird dadurch $\frac{562}{1680}=\frac{281}{840}$, und diese Benennung ist die kleinste zu welcher dieser Bruch kan gebracht werden.

§. 27. Eben so verfähret man bey der Vereinigung nachstehender Brüche: $\frac{2}{3}-\frac{4}{5}-\frac{1}{2}+\frac{3}{7}$. Die erstern zween unter einerley Benennung sind $\frac{10}{15}-\frac{12}{15}$, und betragen zusammen $-\frac{2}{15}$. Dieser Bruch wird mit dem dritten der gegebenen $-\frac{1}{2}$ unter einerley Benennung $-\frac{4}{30}-\frac{15}{30}$, folgends geben beyde zusammen $-\frac{19}{30}$. Und wenn man den dergestalt herausgebrachten Bruch mit dem vierten der gegebenen $\frac{3}{7}$ unter einerley Benennung bringet, so bekommt man $-\frac{133}{210}+\frac{90}{210}$, welches so viel ist als $-\frac{43}{210}$. Nemlich die Summe der Brüche, vor welchen das Zeichen — stehet, ist hier grösser als die Summe der Brüche, welche mit + bezeichnet sind, also ist der Ueberschuß von der Art der erstern. I, 73.

§. 28. Dergestalt werden so viele verschiedene Brüche, als ihrer seyn mögen, vereiniget, wenn man nur weiß, wie zween Brüche unter einerley Benennung zu bringen sind. Es geschiehet aber auch auf die angewiesene Art diese Vereinigung fast am allergeschwindesten und leichtesten, insonderheit wenn man in Acht nimt, daß, so bald man durch die Addition oder Subtraction zweyer andern einen neuen Bruch gefunden hat, man denselben erst zu den kleinsten Benennungen bringe, ehe man weiter fortgehet. Denn auf die Art bekommt man niemals mit überflüssig grossen Zahlen zu thun. Ich halte vor unnöthig, diese leichte Anmerkung mit einem Exempel zu erläutern.

Drey oder mehrere Brüche unter eine Benennung zu bringen.

§. 29. Doch ob zwar zum Behuf der Addition und Subtraction nicht nothwendig erfordert wird, daß man mehr als zween Brüche unter einerley Benennung zu bringen wisse, so kan doch dieses bey andern Rechnungen zuweilen erfordert werden. Es ist aber auch diese Sache nicht sonderlich schwer einzusehen. Sind die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{9}$ alle unter einerley Benennung zu bringen: So multiplicire man erstlich alle Nenner durch einander, ausser dem Nenner des ersten Bruchs, und setze das Product, um sich desto weniger zu verwirren, und den Grund dieser Arbeit desto deutlicher einzusehen, dem ersten Bruch an die Seite, nemlich $4\times7\times9$ ist $=252$, und dieses Product wird neben den ersten Bruch dergestalt geschrieben 252) $\frac{2}{3}$. Eben so multiplicire man alle Nenner aller Brüche, ausser dem zweyten, in einander, und setze das Product aus denselben $3\times7\times9$, das ist 189 neben dem zweyten Bruch dergestalt 189) $\frac{3}{4}$. Auch multiplicire man alle Nenner, ausser dem Nenner des dritten Bruchs, in einander, und setze das Product $3\times4\times9$ oder 108 neben diesem dritten Bruch 108) $\frac{5}{7}$. Und endlich mache man das Product aus den Nennern aller Brüche ausser dem letzten, welches ist $3\times4\times7$, oder 84, und setze dieses Product dem letzten Bruch zur Seite 84) $\frac{4}{9}$. Nachdem dieses alles geschehen, ist nichts übrig, als daß man die Zahlen eines jeden Bruchs durch das neben ihm gesetzte Product multiplicire.

§. 30. Es wird dadurch an die Stelle des ersten Bruchs $\frac{2}{3}$ gefunden $\frac{504}{756}$, und es ist klar, daß dieser Bruch dem ersten $\frac{2}{3}$ gleich sey. Was aber seinen Nenner anlangt, so ist derselbe ein Factum aus allen Nennern aller gegebenen Brüche. Denn die demselben beygesetzte Zahl 252 war $4\times7\times9$, ein Factum aus allen Nennern aller Brüche, ausser dem ersten. Und indem man den Nenner des Bruchs $\frac{504}{756}$ heraus gebracht hat, ist dieses Factum ferner durch den Nenner des ersten Bruchs multipliciret worden: demnach ist dieser Nenner allerdings $4\times7\times9\times3$. An die Stelle des zweyten Bruchs $\frac{3}{4}$ wird durch eine gleichmässige Multiplication gefunden $\frac{567}{756}$, dessen Gleichheit mit dem gegebenen zweyten eben so leicht einzusehen ist. Sein Nenner kommt, indem man das dem Bruch beygesetzte Factum aus allen Nennern aller übrigen Brüche $3\times7\times9$ ferner durch seinen Nenner 4 multipliciret. Es wird demnach wiederum dieser Nenner das Factum $3\times7\times9\times4$ aus allen Nennern der vier gegebenen Brüche. Da

nun

nun also einerley Zahlen, in was Ordnung man sie auch multiplicirt mag, immer einerley Product bringen, I, 98. so ist dieser Nenner des zweyten Bruchs dem Nenner des ersten nicht bloß von ohngefehr gleich geworden. Eben so ist es auch mit dem Bruch, welchen man an die Stelle des dritten setzet, und welchen man findet, wenn man die Zahlen des dritten Bruchs durch die ihm beygesetzte Zahl multipliciret. Dieser Bruch ist $\frac{540}{756}$: sein Nenner kommt, wenn man die dem Bruch beygeschriebene Zahl 108, welche ein Factum ist aus dem Nenner des ersten, zweyten und vierten Bruchs, $3\times4\times9$, durch den Nenner des dritten Bruchs multiplicirt, und wird also wieder $3\times4\times9\times7$. Mit dem letzten Bruch $\frac{336}{756}$, hat es eben die Bewandtniß.

§. 31. Man siehet auch leicht, daß so bald man einen einzigen Nenner gefunden hat, man sodann nicht nöthig habe die übrigen ins besondere zu machen, weil derjenige, so zu dem ersten Bruch gefunden worden ist, auch die richtigen Nenner vor die übrigen alle abgiebet. Sind nun aber dergestalt verschiedene Brüche unter einerley Benennung gebracht, so kan man sie hernach auf einmal, nach Anleitung der ihnen vorgesetzten Zeichen + und —, vereinigen. I, 79.

Multiplication durch Brüche.

§. 32. Nun haben wir noch die Multiplication und die Division ganzer oder gebrochener Zahlen durch Brüche vor uns, und es ist zu zeigen, wie eine jede gegebene Zahl durch einen Bruch zu multipliciren und zu dividiren sey. Eine genaue Achtsamkeit auf den allgemeinen Begrif der Multiplication, kan uns die Sache gar leicht machen, denn es ist hier in der That nichts anders zu thun, als nur dasjenige anzuwenden, so schon zum öftern wiederhohlet worden ist.

§. 33. Gesetzt, wir sollen eine Zahl 4 oder $\frac{4}{5}$ durch den Bruch $\frac{1}{2}$ multipliciren, so wird erfordert, daß man aus der Zahl 4 oder $\frac{4}{5}$ eine neue Zahl dergestalt mache, wie der multiplicirende Bruch $\frac{1}{2}$ aus der Einheit entstehen kan. I, 82. Es entstehet aber dieser Bruch aus der Einheit, wenn man sie in zwey gleiche Theile theilet I, 85: also wird auch die gegebene Zahl 4 oder $\frac{4}{5}$ in zwey gleiche Theile zu theilen seyn, um das Product zu erhalten; und die Multiplication der Zahl 4 oder $\frac{4}{5}$ durch den Bruch $\frac{1}{2}$ erfordert eigentlich eine Division dieser Zahl durch den Nenner des gegebenen Bruchs 2. Auf eben die Art schliesset man, daß eine ganze oder gebrochene Zahl durch den Bruch $\frac{1}{3}$ multipliciren nichts anders heisse, als dieselbe

Zahl durch 3 dividiren, und so ferner. So daß überhaupt die Multiplication einer Zahl, sie mag ganz oder gebrochen seyn, durch einen Bruch, dessen Zehler 1 ist, nichts anders erfordert, als daß man die gedachte Zahl durch den Nenner des Bruchs dividire.

§. 34. Nun aber kan man diese Division durch den Nenner des multiplicirenden Bruchs auf zweyerley Art verrichten, weil dieser Nenner eine ganze Zahl ist. Man dividire durch denselben den Zehler des Bruchs, welcher dividiret werden sol, oder man multiplicire seinen Nenner, so erlanget man auf beyde Arten den Quotienten. II, 3. Demnach wird die Multiplication eines Bruchs durch einen andern, dessen Zehler 1 ist, durch eben diese zwo Rechnungsarten verrichtet. Und es ist das Product aus $\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$, oder $= \frac{4}{10}$, und 4 durch $\frac{1}{2}$ multipliciret giebt 2 oder $\frac{4}{2}$. Denn man kan sich 4 als einen Bruch, dessen Nenner 1 ist, vorstellen, und auf diesen Bruch $\frac{4}{1}$, was eben gesagt worden ist, anwenden.

§. 35. Und zwar hat die Multiplication durch einen dergleichen Bruch, welche vermittelst der Division durch den Nenner verrichtet wird, und da man, zum Exempel, durch die Multiplication der Zahl $\frac{4}{5}$ durch $\frac{1}{2}$ das Product $\frac{2}{5}$ heraus bringet, so oft sie sich geschickt verrichten lässet, diese Bequemlichkeit, daß sie das Product in kleinern Zahlen darstellet, als diejenige sind, welche durch die Multiplication kommen. Weil aber die genaue Division nicht bey allen Zahlen statt hat, so kan man auch diese Bequemlichkeit nicht überall haben. Es sey $\frac{9}{14}$ durch $\frac{1}{3}$ zu multiplicieren, so wird das Factum $\frac{3}{14}$ oder $\frac{9}{42}$, und man hat hier einigen Vortheil, wenn man die Multiplication durch die Division des Zehlers verrichtet. Hat man aber eben die $\frac{9}{14}$ durch $\frac{1}{5}$ zu multipliciren, das ist, durch 5 zu dividiren, so giebt die Division des Zehlers 9 durch 5 den unbequemen Bruch $1\frac{4}{5}$. Man thut also in diesem und dergleichen Fällen besser, wenn $\overline{14}$

man den Nenner multipliciret, wodurch hier der Bruch $\frac{9}{70}$ kommt. Und man siehet hieraus, daß wenn man eine Regel stellen wil, so sich in allen Fällen anbringen lässet, dieselbe so lauten müsse: Um einen jeden Bruch $\frac{5}{7}$ durch einen andern $\frac{1}{3}$, dessen Zehler 1 ist, zu multipliciren, multiplicire man nur die Nenner in einander, und lasse den Zehler stehen. Oder: man multiplicire so wohl die Zehler als auch die Nenner in einander; denn dieses kommt hier auf eben das hinaus, weil 1 nicht multipliciret. Demnach ist

$$\frac{1}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{1 \times 5}{3 \times 7} = \frac{5}{21}.$$

§. 36.

§. 36. Wie ist es aber mit den Brüchen beschaffen, deren Zehler grösser sind als die Einheit, und wie entstehen die Producte, wenn man andere Zahlen durch solche Brüche multipliciret? Wir dürfen nur um etwas weniges weiter nachdenken, auch dieses heraus zu bringen. Wir wollen setzen, daß der Bruch $\frac{4}{5}$ durch $\frac{2}{3}$ zu multipliciren sey: so wird $\frac{2}{3}$ aus der Einheit, wenn man diese erstlich in drey gleiche Theile theilet, und so dann dieser Theile zween annimt. Eben so muß auch nach dem Begrif der Multiplication I, 82. auch das Product aus $\frac{4}{5}$ entstehen. Man muß erstlich $\frac{4}{5}$ in drey gleiche Theile theilen, oder durch drey dividiren, I, 85. und hernach muß man dieses Drittel des Bruchs $\frac{4}{5}$ zwey mal nehmen oder durch 2 multipliciren. Dieses ist alles, so wir hier zu thun haben.

§. 37. Und auf diese Art verfähret man in allen Fällen. Eine jede Zahl wird durch einen Bruch multipliciret, von was Art dieser auch seyn mag, wenn man sie durch den Nenner des Bruchs dividiret und durch dessen Zehler multiplicirt. Dieses kan auf vielerley Art geschehen, wie öfters wiederhohlet worden ist, II, 2. 3. und es ist im Grunde eins, wie man diese Multiplication und Division verrichtet. Wir stellen uns hier wieder die ganze Zahlen als Brüche vor, deren Nenner die Einheit ist, und setzen, daß ein dergleichen oder ein anderer Bruch $\frac{10}{21}$ durch den Bruch $\frac{3}{5}$ zu multipliciren sey. So ist der Bruch $\frac{10}{21}$ durch 3 zu multipliciren, und durch 5 zu dividiren. Man verrichte erstlich die Multiplication durch die Multiplication des Zehlers 10, und die Division durch die Multiplication des Nenners, so wird das Product $\frac{30}{105}$. Man verrichte zweytens die Multiplication noch durch die Multiplication des Zehlers, die Division aber verrichte man nunmehro durch die Division des Zehlers, so wird das Product $\frac{6}{21}$. Man verrichte drittens die Multiplication durch die Division des Nenners, und die Division durch die Division des Zehlers, so entstehet nunmehro das Product $\frac{2}{7}$, und endlich verrichte man die Multiplication durch die Division des Nenners, und die Division durch die Multiplication desselben, so kommt $\frac{10}{35}$, welches ebenfals das richtige Factum ist. Und es sind in der That die dergestalt gefundene vier Brüche $\frac{30}{105}$, $\frac{6}{21}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{10}{35}$ dem Werthe nach gar nicht von einander verschieden, sondern sie bedeuten einerley, wie man leicht sehen kan, wenn man den ersten durch die Division seiner Zahlen, des Zehlers und Nenners, durch 15; den zweyten durch eine gleichmässige Division durch die Zahl 3, und den vierten vermittelst der Division seiner Glieder durch 5 auf die kleinste Benennung bringet, welche er haben kan.

§. 38. Ich habe mit Fleiß zwey Brüche erwehlet, bey welchen sich

alle mögliche Arten eine Zahl durch einen Bruch zu multipliciren, anbringen ließen. Es gehet aber dieses nicht bey allen Brüchen mit eben der Bequemlichkeit an, weil nicht jede ganze Zahl durch eine jede andere sich ohne Bruch theilen läst. Soll man den Bruch $\frac{3}{7}$ durch $\frac{2}{5}$ multipliciren, so kan man sich weder bey der Multiplication durch 2, den Zehler des multiplicirenden Bruchs, noch bey der Division durch 5 den Nenner desselben, der Division bedienen. Doch läst sich diese Division des einen oder des andern Gliedes zum öftern verrichten, und man thut wohl, wenn in diesen Fällen man sich derselben bedienet, weil dadurch das Product durch kleinere Zahlen ausgedrücket wird, und man sich die Mühe ersparet, oder doch erleichtert, den Bruch auf eine kleinere Benennung zu bringen.

§. 39. Will man dem gewöhnlichen Weg folgen, wenn der Bruch $\frac{4}{3}$ durch $\frac{2}{5}$ zu multipliciren ist, so multipliciret man so wohl die Zehler als die Nenner der zween gegebenen Brüche $\frac{4}{3}$ und $\frac{2}{5}$ in einander, der Bruch $\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$ ist das gesuchte Product, und nach dieser Art Brüche durch Brüche zu multipliciren kan man beständig verfahren, weil sich eine jede ganze Zahl durch eine jede andere multipliciren läst ohne daß dadurch Brüche kommen. Dieses ist ohne Zweifel die Ursach, warum man diese Art Brüche durch Brüche zu multipliciren zur Regel gemacht hat. Es lassen sich aber die vollständigen Regeln II, 37. eben so leicht einsehen und anwenden, als diese.

§. 40. Indessen ist aus dieser Art Brüche durch Brüche zu multipliciren am leichtesten einzusehen, daß auch bey diesen Zahlen es einerley sey, in was Ordnung man sie in einander multipliciret, wenn drey, vier, oder mehrere derselben nach und nach in einander zu multipliciren sind. Ja man kan hier so gar die Zehler mit einander verwechseln, wie auch die Nenner, ohne in dem Product etwas zu ändern. Gesetzt, es sey der Bruch $\frac{2}{3}$ durch den Bruch $\frac{5}{7}$, und das hieraus entstehende Product durch $\frac{4}{5}$ zu multiplicirn, so ist das Product aus allen $\frac{2 \times 5 \times 4}{3 \times 7 \times 5}$; aber eben dieses Product kommt, wenn man $\frac{5}{3}$ durch $\frac{2}{5}$ multipliciret, und das hieraus entstehende Factum ferner durch $\frac{4}{7}$. Man siehet ein, daß das aus dieser Multiplication entstehende Factum $\frac{5 \times 2 \times 4}{3 \times 5 \times 7}$ mit dem vorigen $\frac{2 \times 5 \times 4}{3 \times 7 \times 5}$ einerley sey, wenn man erweget, daß die Zehler dieser zwey Brüche einerley sind, weil sie beyde

aus

aus einerley Factoren 2, 4, 5 bestehen, und daß mit den Nennern es eben die Bewandniß habe, welche beyde aus der Multiplication der Zahlen 3, 5, 7 entstanden sind.

Division durch Brüche.

§. 41. Da nun also beständig das Factum zweyer Brüche, oder jeder zwoer Zahlen, die man als Brüche ansiehet, gefunden wird, wenn man den ersten dieser Brüche durch den Zehler des andern multipliciret, und durch dessen Nenner dividiret, II, 36. so folgt wiederum, daß wenn ein Factum aus zweyen solchen Zahlen, und ein Factor desselben, gegeben ist, man den andern Factor finden werde, wenn man das Factum mit dem Zehler des ersten Factors dividiret, und mit seinem Nenner multipliciret. Das Factum $\frac{30}{105}$ ist durch die Multiplication der zween Brüche $\frac{10}{21}$ und $\frac{3}{5}$ entstanden, und es ist der erste dieser Brüche durch den Zehler des zweyten 3 multipliciret, und durch seinen Nenner 5 dividiret worden, dieses Factum $\frac{30}{105}$ zu erhalten. Ist nun dieses Factum zusamt dem einen Factor $\frac{3}{5}$ gegeben, so kommt allerdings der andere, wenn man das Factum hinwiederum durch den Zehler des gegebenen Factors 3 dividiret, und durch dessen Nenner 5 multipliciret. Es wird in der That, der Factor $\frac{10}{21}$ in eben den Zahlen herausgebracht, wenn man die Division des Products $\frac{30}{105}$ durch die Division des Zehlers, und die Multiplication desselben durch die Division des Nenners verrichtet.

§. 42. Wenn man also denjenigen Begrif von der Division zum Grunde leget, welchen wir oben gegeben haben I, 140. nach welchen man bey derselben aus einem gegebenen Product, und einem Factor desselben, den andern, welcher der Quotiente ist, suchet: so siehet man bloß hieraus, daß die Division durch einen Bruch nichts anders erfordere, als daß man die Zahl, welche durch den Bruch zu dividiren ist, durch den Zehler des Bruchs dividire, und durch seinen Nenner multiplicire. Dieses kan man, wie nunmehro überflüssig bekant seyn muß, auf verschiedene Arten verrichten: und daraus verschiedene Arten, eine Zahl durch einen Bruch zu dividiren, zusammen setzen. Es sey der Bruch $\frac{30}{105}$ durch $\frac{3}{5}$ zu dividiren, das ist, durch 3 zu dividiren und durch 5 zu multipliciren: so wird durch die Division heraus gebracht $\frac{10}{105}$ oder $\frac{30}{315}$, weil man die Division mit 3 entweder durch die Division des Zehlers, oder durch die Multiplication des Nenners verrichten kan: und durch die Multiplication mit 5 bekomt man aus dem ersten dieser Brüche $\frac{50}{105}$ oder $\frac{10}{21}$, und aus dem zweyten $\frac{150}{315}$ oder

$\frac{30}{63}$,

$\frac{30}{21}$, nachdem man nemlich wieder die Multiplication, entweder durch die Multiplication des Zehlers, oder durch die Division des Nenners verrichtet. Es ist demnach jeder dieser vier Brüche $\frac{150}{315}$, $\frac{30}{63}$, $\frac{50}{105}$, $\frac{10}{21}$ der Quotient, welcher gesucht wird. Sie bedeuten einerley, denn sie könnnen alle zu der Benennung des letzten gebracht werden, wie leicht einzusehen ist.

§. 43. Alle diese Arten durch einen Bruch zu dividiren haben ihren Nutzen, aber bloß diejenigen, da man so wohl die Multiplication als die Division der zu dividirenden Zahl durch eine Multiplication des Nenners und des Zehlers verrichtet, hat allezeit statt, weil durch dieselbe immer ganze Zahlen heraus gebracht werden II, 39. Setzet man also einmal feste, daß man sich dieser Rechnungsart bey jeder Division einer Zahl durch einen Bruch bedienen wolle, so wird die Regel, diese Division zu verrichten, also lauten müssen: Man multiplicire den Nenner der zu dividirenden Zahl durch den Zehler des Theilers (damit wird die zu dividirende Zahl durch den Zehler dividiret) und man multiplicire den Zehler der zu dividirenden Zahl durch den Nenner des Theilers, (dadurch wird die Zahl, welche man dividiren soll, durch den Nenner des Theilers multipliciret.) Zum Exempel, $\frac{5}{7}$ ist durch $\frac{2}{3}$ zu dividiren, so ist der Quotient $\frac{5 \times 3}{7 \times 2} = \frac{15}{14}$. Dieses ist die Regel, welche gemeiniglich gegeben wird.

§. 44. Man siehet hieraus leicht, daß wenn man eine Zahl durch einen Bruch dividiren soll, man eben die Arbeit vornehmen müsse, welche bey der Multiplication durch einen Bruch erfordert wird, mit dem einzigen Unterscheid, daß, da man bey der Multiplication mit dem Zehler multipliciren, und mit dem Nenner dividiren muste, man bey der Division durch den Nenner multipliciren, und mit dem Zehler dividiren muß II, 39. Versetzt man derohalben die Zahlen des Theilers, und setzet den Zehler an die Stelle des Nenners, und den Nenner an die Stelle des Zehlers, so hat man nunmehro nichts mehr zu beobachten, als daß man mit dem also verkehrt gesetzten Bruch multiplicire. Ist die Zahl 5 oder $\frac{5}{1}$ durch $\frac{2}{3}$ zu dividiren, so versetze man die Zahlen des Theilers, und mache aus denselben $\frac{3}{2}$, mit diesem Bruch multiplicire man die Zahl, welche man dividiren soll $\frac{5}{1}$, so ist $\frac{5}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{5 \times 3}{1 \times 2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ der Quotiente.

§. 45. Dergestalt lassen sich die Regeln der Division durch einen Bruch aus dem Begrif der Division herleiten, welchen wir im Anfang dieser

ser Abhandlung II, 41. wiederhohlet haben. Es ist aber natürlicher, daß man dieselbe aus dem ersten Begrif der Division folgere, und die Einsicht welche man dadurch erhält, wird etwas gründlicher. Dieses kan nachfolgender maßen geschehen.

§. 46. Eine ganze oder gebrochene Zahl durch einen Bruch dividiren, heißet, dem ersten und allgemeinen Begrif von der Division gemäß, aus der zu dividirenden Zahl eine neue dergestalt machen, wie die Einheit aus dem Theiler entstehet I, 127. Gesetzt nun, dieser Theiler sey ein Bruch, dessen Zehler 1 ist, zum Exempel $\frac{1}{2}$, so entstehet 1 aus dem Theiler $\frac{1}{2}$, wenn man diesen durch 2 multipliciret; demnach wird auch der Quotiente zwey mal so groß genommen werden müssen als die Zahl, welche zu dividiren ist. Man bekomt also den Quotienten, wenn man die Zahl, welche durch $\frac{1}{2}$ zu dividiren war, durch 2 multipliciret: und wenn die Zahl, welche man durch $\frac{1}{2}$ dividiren soll $\frac{5}{4}$ ist, so ist der Quotient $\frac{10}{4}$ oder auch $\frac{5}{2}$, weil der erstere dieser Brüche entstanden ist, indem man den Zehler von $\frac{5}{4}$ durch 2 multipliciret, und der zweyte, indem man seinen Nenner durch 2 dividiret hat. Eben so verhält es sich mit der Division durch $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, und überhaupt durch alle Brüche, deren Zehler die Einheit ist.

§. 47. Wenn man aber an die Stelle des Theilers $\frac{1}{3}$ einen andern $\frac{2}{3}$ setzet, welcher zwey mal so groß ist als der erstere, und man setzet, daß man die zu dividirende Zahl $\frac{5}{7}$ bereits durch $\frac{1}{3}$ dividiret, oder durch 3 multipliciret habe, und daß dadurch $\frac{5\times3}{7}$ oder $\frac{15}{7}$ heraus gebracht worden sey, so ist dieser Quotient zwey mal grösser als derjenige welcher komt, wenn man eben den Divisor $\frac{5}{7}$ durch $\frac{2}{3}$ dividiret, weil $\frac{2}{3}$ dopppelt so viel ist als ein Drittel. I, 148. Also kan man aus diesem Quotienten den gesuchten, welchen nemlich der Theiler $\frac{2}{3}$ giebt, machen, wenn man den erst gefundenen durch 2, den Zehler des Theilers, dividiret. Demnach ist der richtige Quotient welchen $\frac{5}{7}$ gibt, wenn man durch $\frac{2}{3}$ dividiret, $\frac{5\times3}{7\times2} = \frac{15}{14}$ oder ein anderer Bruch, welcher durch eben diese, aber auf eine andere Weise verrichtete Rechnungsarten heraus gebracht wird II, 2. 3.

§. 48. Oder man stelle sich die Sache kürzlich also vor. Aus $\frac{2}{3}$ wird die Einheit, wenn man zwey Drittel in zwey gleiche Theile theilet $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, und dieser Theile drey zusammen setzet, dergestalt $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$. Denn drey Drittel sind ein Ganzes. Und eben so wird aus $\frac{4}{5}$ die Einheit, wenn man $\frac{4}{5}$ in vier gleiche Theile theilet, so viel nemlich Einheiten in dem Zehler

sind, und derselben fünfe nimt, denn der vierte Theil von $\frac{4}{5}$ ist $\frac{1}{5}$, und deren fünfe geben $\frac{5}{5}$ oder ein Ganzes. Wenn man demnach einen Bruch, was er vor einer seyn mag, oder eine ganze Zahl, $\frac{7}{9}$, durch $\frac{4}{5}$ dividiren soll, so muß man, um den Quotienten aus der zu dividirenden Zahl eben so zu machen, wie aus dem Theiler die Einheit entstehet, die gegebene Zahl, welche dividiret werden soll, ebenfalls in vier gleiche Theile theilen, oder durch den Zehler 4 dividiren, und dieser Theile hernach so viele nehmen, als viele Einheiten in dem Nenner enthalten sind, das ist, man muß, was man durch die Division heraus gebracht hat, durch den Nenner multipliciren. Man bekommt also den Quotienten aus der Division der $\frac{7}{9}$ durch $\frac{4}{5}$ wenn man setzet erstlich $\frac{7}{9 \times 4} = \frac{7}{36}$, und ferner $\frac{7 \times 5}{36}$, oder auf einmal $\frac{7 \times 5}{9 \times 4} = \frac{35}{36}$: oder wenn man sonst, wie man will oder kan, die zu dividirende Zahl durch den Zehler des dividirenden Bruchs dividiret, und durch dessen Nenner multipliciret

Einige Anmerkungen.

§. 49. Wenn eine zum Theil ganze zum Theil gebrochene Zahl, als $7\frac{2}{3}$ durch einen Bruch $\frac{4}{9}$ zu multipliciren ist, so multiplicire man beyde Theile dieser Zahl 7 und $\frac{2}{3}$ durch den Bruch $\frac{4}{9}$, und setze die Producte zusammen. Diese sind, $\frac{7 \times 4}{9}$ und $\frac{2 \times 4}{3 \times 9}$ oder $\frac{28}{9}$ und $\frac{8}{27}$, und demnach ist das Product $7\frac{2}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{28}{9} + \frac{8}{27}$ I, 194. $= \frac{84+8}{27}$ II, 23. $= \frac{92}{27} = 3\frac{11}{27}$, II, 16.

§. 50. Oder man verwandele die gegebene Zahl, welche aus einer ganzen und aus einem Bruche bestehet, ganz in einen unächten Bruch, und multiplicire diesen durch den gegebenen Bruch. Es sey noch $7\frac{2}{3}$ durch $\frac{4}{9}$ zu multipliciren. Die erstere dieser Zahlen ist dem unächten Bruch $\frac{23}{3}$ gleich. Wenn man nun diesen durch $\frac{4}{9}$ multipliciret, so wird das Product $\frac{92}{27}$ wie vorher, und man kan dieses Product wie eben geschehen ist, auch durch die Zahl $3\frac{11}{27}$ ausdrücken.

§. 51. Eben so kan man auch verfahren, wenn eine Zahl, die aus einer ganzen und aus einem Bruche zusammen gesetzet ist, $7\frac{2}{3}$, durch eine

andere dergleichen Zahl $2\frac{4}{9}$ multipliciret werden soll. Man kan die Zahlen beyde in unächte Brüche verwandeln, und diese so dann in einander multipliciren. Die erste Zahl wird durch diese Verwandlung wieder $= \frac{23}{3}$ und die zweyte $= \frac{22}{9}$. Das Product aus diesen Brüchen ist $\frac{506}{27} = 18\frac{20}{27}$, und dieses ist auch das Product aus $7\frac{2}{3}$ und $2\frac{4}{9}$.

§. 52. Dieses ist wol der kürzeste Weg dergleichen Producte zu erlangen. Wil man die gegebene Zahlen stehen lassen wie sie sind, und dieselbe nicht in unächte Brüche verwandeln, so muß man jeden Theil der ersten Zahl durch jeden Theil der zweyten multipliciren, und die Producte so dann zusammen setzen, damit man das gesuchte Product erhalte. Es sey nochmals $7\frac{2}{3}$ durch $2\frac{4}{9}$ zu multipliciren, so wird das Product dieses seyn:

$$7 \times 2 + \frac{2 \times 2}{3} + \frac{4 \times 7}{9} + \frac{2 \times 4}{3 \times 9} = 14 + \tfrac{4}{3} + \tfrac{28}{9} + \tfrac{8}{27} = 18 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{8}{27} = 18 + \tfrac{9}{27} + \tfrac{3}{27} + \tfrac{8}{27} = 18 + \tfrac{20}{27}$$ oder $18\frac{20}{27}$ wie vorher. Es ist aber dieser Weg viel weitläuftiger.

§. 53. Sol man aber eine dergleichen Zahl durch einen Bruch, oder durch eine Zahl, welche ebenfals aus einer ganzen und aus einem Bruch zusammen gesetzet ist, dividiren, so kan man, wenn man große Weitläuftigkeiten vermeiden wil, nicht anderst verfahren, als daß man die Zahlen beyde in unächte Brüche verwandelt, und die Division so dann mit diesen Brüchen verrichtet. Es sey nunmehro $7\frac{2}{3}$ durch $2\frac{4}{9}$ zu dividiren: so setze man wieder an statt $7\frac{2}{3}$ den Bruch $\frac{23}{3}$, und an statt $2\frac{4}{9}$ schreibe man $\frac{22}{9}$, und dividire so dann den ersten Bruch durch den zweyten. Der Quotiente $\frac{23 \times 9}{3 \times 22}$, oder $\frac{207}{66}$ ist der gesuchte, welcher sich auch also ausdrücken lässet $\frac{69}{22} = 3\frac{3}{22}$. Wir haben zum Beweiß der Richtigkeit dieser Rechnung nicht das geringste hinzuzufügen, weil alles aus dem so gezeiget worden ist, ohne Umschweif fließet.

Von den Einfachen und zusammen gesetzten Zahlen.

§. 54. Dasjenige so wir bishero von den Brüchen gesehen haben, ist zur Ausübung der Rechnungsarten, welche bey denselben vorkommen, meistentheils hinlänglich: aber zu recht deutlichen und gründlichem Verstand derselben ist noch verschiedenes hinzuzusetzen, welches wir hieher versparet haben, die Aufmerksamkeit des Lesers desto mehr zu unterhalten, welche öfters dadurch erweckt wird, wenn er den Nutzen der vorzunehmen-

den Betrachtungen vorher einsiehet, ehe er sich zu denselben wendet.

§. 55. Es ist bereits öfters angemerket worden, und wem ist es unbekant, daß nicht eine jede Zahl durch eine jede andere sich genau dividiren lasse. Es gibt aber auch Zahlen, welche man gar nicht durch andere Zahlen dividiren kan, und die also keines weges als Producte aus zwoen andern Zahlen betrachtet werden können. Dergleichen sind die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, und viele andere, welche keine ganze Zahl genau und ohne Bruch theilet. Denn die Division durch 1 ist eigentlich keine Division, weil sie die Zahl läst wie sie sie findet. Dergleichen ganze Zahlen, welche sich durch keine andere ganze Zahlen genau theilen lassen, heißen **Einfache Zahlen**. Alle übrige, welche sich dividiren lassen, und welche man also durch die Multiplication herausbringen kan, werden als **zusammen gesetzte Zahlen** betrachtet. Dergleichen sind die Zahlen 4, 6, 8, 9, 10, 12, und unendlich viele andere.

§. 56. Man verstehet demnach durch das Zusammensetzen einer Zahl 12 aus zwo oder mehrern andern 4 und 3, oder 2 und 2 und 3, hier nichts anders als die Multiplication dieser Zahlen in einander, und weil 4×3, oder $2 \times 2 \times 3$, die Zahl 12 bringt, so sagt man die Zahl 12 sey aus den zwo Zahlen 4 und 3, oder aus den dreyen $2 \times 2 \times 3$ zusammen gesetzt. Selbst in der Erklärung lieget, daß man sich nur die ganze Zahlen als einfach oder zusammen gesetzt vorstellen müsse, und daß die Brüche eigentlich weder einfache noch zusammen gesetzte Zahlen sind.

§. 57. Wolte man alle einfache Zahlen bis auf eine gewisse Größe, als zum Exempel, alle die unter hundert sind, finden, so könte man alle Producte in eine Reihe setzen, welche entstehen, indem man die Zahlen, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, durch zwey multipliciret bis an die gesetzte Gränze, hundert. Alle diese Zahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 ꝛc. lassen sich durch 2 dividiren. Indem aber dieses geschiehet, wird die erste dieser Zahlen 2 durch sich selbst und durch keine andere dividiret. Ferner müste man alle Producte, welche vermittelst der Multiplication durch 3 entstehen, in eine andere Reihe bringen. Diese sind 3, 6, 9, 12, 15, 18 ꝛc. welche Zahlen alle sich durch 3 dividiren lassen, welcher Theiler von der ersten Zahl dieser Reihe wieder nicht verschieden ist. Eben so müste man alle Producte aller Zahlen durch 4, welche Producte nicht grösser sind als 100, in eine Reihe bringen 4, 8, 12, 16, 20, 24, und so immer fort. Diejenige Zahlen nun, welche in keiner solchen Reihe anders, als an deren Anfang vorkommen, sind einfache Zahlen, die übrigen alle sind zusammen gesetzt, und lassen

sen sich durch diejenige Zahl dividiren, welche im Anfang der Reihe stehet. Die Zahl 2 komt nicht anders als in der ersten Stelle der ersten Reihe vor, und ist demnach eine einfache Zahl. Die Zahl 3 komt nicht anders als in der ersten Stelle der zweyten Reihe vor, und ist derowegen ebenfals einfach. Im Gegentheil komt 4 zwar auch als die erste Zahl der dritten Reihe vor: sie stehet aber auch in der ersten Reihe in der zweyten Stelle. Demnach ist sie keine einfache Zahl, sondern sie lässet sich durch 2 dividiren.

§. 58. Hieraus siehet man deutlich, daß unter den geraden Zahlen keine andere einfache Zahl anzutreffen sey, als die einzige 2, und daß die übrigen einfachen Zahlen alle ungerade sind. Die einfachen Zahlen unter 100 sind, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

§. 59. Da gar keine Zahlen sind, welche die einfachen Zahlen dividiren, außer ihnen selbst: so ist klar, daß es unmöglich sey, eine Zahl zu finden, welche zwo verschiedene einfache Zahlen 3 und 7 zugleich dividirte. Es gibt aber auch zusammen gesetzte Zahlen, die sich nicht durch einerley Zahl dividiren lassen. 8 ist keine einfache Zahl und 9 auch nicht. Jene kan durch 2 und 4 dividiret werden, und diese durch 3, aber weder 8 läst sich durch 3, noch 9 durch 2 oder 4 genau theilen. Dergleichen Zahlen **beziehen sich aufeinander als einfache Zahlen**, ob sie zwar keine sind, denn wenn man dieselbe beyde mit einerley Zahl dividiren wil, so kan dieses eben so wenig geschehen, als ob sie einfache Zahlen wären.

§. 60. Man kan ohne sonderliche Mühe eine Tafel machen, in welcher neben einer jeden Zahl die Theiler derselben stehen, aus welcher dann auch die gemeinschaftlichen Theiler zwoer oder mehrerer Zahlen zu nehmen sind, und unter diesen die grössesten. Wir haben wirklich dergleichen Tafeln; weil man aber dieselben nicht immer bey der Hand haben kan, und sie auch unmöglich auf alle Zahlen erstrecket werden können: aber doch öfters erfordert wird, daß wir eine Zahl, welche zwo andere genau dividiret, und zwar, wenn mehr als eine dergleichen Zahl zu haben ist, die gröste unter allen, zu finden wissen, so muß eine andere Weise gezeiget werden, dieses ins Werk zu richten. Wir werden aber zu deren deutlicherem Verstand einige Sätze, von den gemeinschaftlichen Theilern zwoer Zahlen, zum Grund setzen müssen.

Gemeinschaftliche Theiler zwoer Zahlen.

§. 61. Das erste so wir zu dem Ende anzumerken haben, ist an sich klar, nemlich daß die gröste Zahl, welche eine jede Zahl genau dividiret, sie selbst sey. Als 12 hat zu Theilern, 2, 3, 4, 6, 12, keiner derselben ist grösser als 12. Einen grössern Theiler als sie selbst ist, kan keine Zahl haben.

§. 62. Wenn demnach eine Zahl als 6 eine andere Zahl 18 genau theilet, so ist diese Zahl 6 selbst der gröste Theiler, welchen diese zwo Zahlen gemeinschaftlich haben. Denn die Zahl 6, welche die zweyte 18 genau dividiret, dividiret sich auch ohne Zweifel selbst, weil eine jede Zahl in ihr selbst eben einmal enthalten ist: also theilet die Zahl 6 beyde gegebene Zahlen 6 und 18. Sie ist aber die gröste unter denen, die die erstere Zahl 6 genau theilen; also ist sie auch der gröste gemeinschaftliche Theiler.

[*Fig. 20.*] §. 63. Ferner, wenn eine Zahl 16 durch eine andere 6 getheilet wird, es bleiben aber einige Einheiten übrig, als hier 4, so theilet diejenige Zahl, welche das Ueberbleibsel 4 und den Theiler 6 genau theilet, auch die Zahl 16 welche dividiret worden ist, und keine andere Zahl kan diese Theilung verrichten. Das erstere, daß eine solche Zahl als hier die 2, welche das Ueberbleibsel 4 und auch den Theiler 6 genau theilet, auch die Zahl 16 theile, welche durch 6 dividiret worden ist, wird gar leicht eingesehen, wenn man sich die Zahlen wieder durch Puncte vorstellet. Die zu dividirende Zahl sey AB, der Theiler CD, welcher jene in die Theile AE, EF theilet, und FB übrig läst. Die Zahl CD wird durch die 2 genau getheilet, also theilet eben diese 2 auch die AE, die der CD gleich ist, und eben so theilet sie das andere Stück EF, denn dieses ist ebenfals der CD gleich. Endlich theilet sie noch das Ueberbleibsel FB, weil mit Fleiß eine Zahl angenommen worden ist, welche das Ueberbleibsel theilet; sie theilet also die ganze Zahl AB. Man hat in der Figur die Theilung durch CD mit gedoppelten, und die mit 2 durch einfache Striche bemerket, um alles desto leichter zu machen, ob zwar die Sache an sich wenig Schwierigkeit hat.

§. 64. Daß aber keine andere Zahl so wohl die zu dividirende Zahl als den Theiler genau theile, als diejenige, welche auch das Ueberbleibsel theilet, oder, welches einerley ist, daß keine Zahl, welche entweder das Ueberbleibsel oder den Theiler nicht genau theilet, dennoch so wohl die zu dividirende Zahl, als den Theiler, genau theilen könne, ist also zu erweisen. Man stelle sich wieder die durch Puncte ausgedrückte Zahlen vor, die wir eben betrachtet haben. Man theile nemlich wieder AB durch CD, und FB sey

der

der Ueberschuß von dieser Theilung. Nun fasse man eine Zahl in die Gedanken was man vor eine wil, als zum Exempel 5, welche entweder CD oder FB nicht genau theilet. Setzet man das erste, daß die also angenommene Zahl den Theiler CD nicht dividire, so kan sie eben deswegen nicht die beyden Zahlen CD und AB theilen, weil sonst eben die Zahl einmal den Theiler CD theilen, und das andere mal nicht theilen müste. Nimt man aber, diesen Widerspruch zu vermeiden, eine solche Zahl an, welche zwar CD theilet, aber nicht den Ueberschuß FB, als hier 3, so muß man bedenken, daß, wenn man mit einer solchen Zahl, welche die CD theilet, auch die AB theilen wil, jederzeit eine Theilung in die vorigen Theilungspuncte, E, F fallen werde, und demnach eine Theilung nothwendig mit dem letzten Zeichen F aufhören müsse. Wil man nun von dannen weiter fortgehen, und AB bis ans Ende theilen, so muß auch die Zahl FB getheilet werden, welches nicht geschehen kan, wenn man zum Theiler eine solche Zahl angenommen hat, welche das Ueberbleibsel FB nicht genau theilet. Es ist also, was gesagt worden ist, richtig, daß keine Zahl den Theiler CD und die Zahl AB zugleich theilen könne, welche nicht den Theiler CD und dasjenige, so nach der Division durch diesen Theiler CD übrig bleibt, FB, genau theilet.

§. 65. Ist demnach eine Zahl die Gröste unter allen, welche das Ueberbleibsel von einer Division, und den Theiler, welchen man darzu gebraucht hat, genau theilen: so ist sie auch die gröste unter den Zahlen, welche den Theiler und die dividirte Zahl genau theilen. Man nehme in unserm Exempel 2, welche den Theiler 6, und das Ueberbleibsel 4 genau theilet, und die gröste unter allen Zahlen ist, welche sie theilen. Diese theilet erstlich die dividirte Zahl 16 auch, wie überhaupt alle Zahlen thun, welche den Theiler und das Ueberbleibsel theilen, II, 63. Eine grössere Zahl als dieser gröste gemeinschaftliche Theiler, zum Exempel 3, theilet nicht beydes, das Ueberbleibsel FB und den Theiler CD, sonst wäre jene nicht die gröste unter allen, welche den Theiler und das Ueberbleibsel zugleich theilen, also kan auch diese grössere Zahl 3 nicht den Theiler 6 und die dividirte Zahl 16 zugleich theilen, II, 64. Es bleibt also die erstere Zahl 2, welche die gröste war unter den gemeinschaftlichen Theilern des Theilers und des Ueberbleibsels, auch die gröste unter den gemeinschaftlichen Theilern, des Theilers 6 und der dividirten Zahl 16.

Den

Den grösten gemeinschaftlichen Theiler zwoer Zahlen zu finden.

§. 66 Nunmehro können die Regeln gewiesen und verständlich gemacht werden, durch welche der gröste gemeinschaftliche Theiler zwoer gegebenen Zahlen gefunden wird. Sie bestehen in nachfolgenden. Ich sol eine Zahl finden, welche 36 und 16 zugleich, und beyde genau dividiret. Ich dividire erstlich die grössere der gegebenen Zahlen 36 durch die kleinere 16, und bemerke hier nicht so wohl den Quotienten, als welcher von keinem Nutzen ist, als vielmehr den Ueberrest von der Division, welcher sonst den Zehler des Bruchs abgiebt, welcher der ganzen Zahl in dem Quotienten noch zuzusetzen ist. Dieser Ueberrest ist hier 4. Mit diesem Ueberrest dividire ich so dann den Theiler der vorigen Rechnung 16, welches hier genau geschieht, und dieses ist ein Zeichen, daß eben dieser letzte Theiler 4 auch die andere Zahl 36 dividiren werde, II, 63. wie man dieses auch findet, wenn man die Division versuchet.

§. 67. Es gehet aber die Arbeit nicht allzeit so geschwind zu Ende. In diesem Fall, wenn nemlich auch bey der zweyten Division der Quotiente nicht genau in ganzen Zahlen zu haben ist, darf man nur die Arbeit, wie sie angefangen worden ist, fortsetzen, und ferner den Theiler der letzten Division durch das Ueberbleibsel von eben der Division theilen, und dieses immer fort, bis man endlich zu einer genauen Division in ganzen Zahlen gelanget. Endlich wird dieses geschehen, und der letzte Theiler wird allzeit die zwey gegebene Zahlen genau und ohne Bruch theilen. Es wird aber auch zum öftern keine andere dergleichen Zahl als die 1 können gefunden werden, welches ein Zeichen ist, daß die zwo gegebene Zahlen nicht beyde durch einerley Zahlen getheilet werden können, sondern daß sie sich als einfache Zahlen auf einander beziehen, II, 59. weil die 1 eigentlich keine Zahl theilet.

§. 68. Zum Exempel, welche Zahl dividiret die zwo Zahlen 1785, und 858 genau? Ich dividire die grössere durch die kleinere:

```
858) 1785 | 2
     1716 |
     ---- |
       69 |
```

so bleibt in dieser Division 69 übrig. Mit diesen 69 dividire ich den Theiler 858:

69) 858 | 12
69 :
168
138
30

Es bleiben hier 30, mit welchen wieder der Theiler so eben gebraucht worden ist 69 dividiret werden muß:

30) 69 | 2
60
9

Hier bleiben 9, durch welche abermal der letzte Theiler 30 zu theilen ist:

9) 30 | 3
27
3

da denn 3 von der Division übrig bleiben, und diese Zahl theilet den letzten Theiler 9 genau. Dieses ist das Zeichen, daß eben die 3 auch die zwo gegebene Zahlen 858 und 1785 theilen werde, wie man dieses auch bey angestelleter Probe findet. Denn 858 durch 3 dividiret, giebt zum Quotienten 286, und 1785 durch eben die 3 getheilet, bringt 595.

§. 69. Wolte man aber eine Zahl suchen, welche die zwo Zahlen 21 und 8 genau theilete, so würde man durch die wiederhohlte Division endlich auf 1 kommen, welches ein Zeichen ist, daß die zwo Zahlen 21 und 8 zugleich durch keine andere genau getheilet werden können.

8) 21 | 2.
16
5

5) 8 | 1.
5
3

3) 5 | 1
3
2

2) 3 | 1
2
1

§. 70. Man kan, den Raum bey dieser Rechnung zu sparen, jederzeit den vorher gebrauchten Theiler an die Seite des Ueberbleibsels von der vorherigen Division setzen, ohne dieses erst wieder abzuschreiben. Wir wollen die vorige Rechnung auf diese Art verrichten, damit, wenn etwas nicht so gleich solte verstanden werden, man sich durch die Vergleichung derselben mit der gegenwärtigen helfen könne:

D 858) 1785|2
1716|
C...69|858|12
69 :|
168
138
B...30|69|2
60
A....9|30|3
27|
3|9|3
9|
0

§. 71. Der Beweis von der Richtigkeit dieser Rechnungsart, und daß die gefundene Zahl 3 würklich die gröste der Zahlen sey, welche die im Anfang gegebene Zahlen 858 und 1785 zugleich theilen, fließet folgender gestalt aus den zum Grunde gelegten Sätzen. Die gefunde Zahl 3, welche 9 genau theilet, ist ohnstreitig der gröste gemeinschaftliche Theiler dieser zwo Zahlen 3 und 9, weil sie die erste dieser Zahlen selbst ist II, 62. Nun ist 9 der Theiler von der Division bey welcher A stehet, und 3 ist das Ueberbleibsel derselben. Also ist die gefundene Zahl 3 der gröste gemeinschaftliche Theiler des Theilers dieser Division 9, und des Ueberbleibsels derselben 3. Demnach ist eben die Zahl 3 der gröste gemeinschaftliche Theiler, der bey A dividirten Zahl 30 und des Theilers eben der Division, 9. II, 65. Es ist aber wieder 9 das Ueberbleibsel von der vorhergehenden Division, bey welcher B stehet, und 30 war der Theiler bey dieser Division. Demnach ist die Zahl 3 der gröste gemeinschaftliche Theiler des Theilers und des Ueberbleibsels dieser Division B und hieraus folgt wieder, daß eben diese Zahl 3, auch der gröste gemeinschaftliche Theiler, der bey B dividirten Zahl 69 und des dabey gebrauchten Theilers 30 seyn müsse. Weil nun diese Zahl 69 wieder der bey der Division C gebrauchte Theiler ist, und 30 das Ueberbleibsel von dieser Division und dieses immer so fortgehet, so können auch diese Schlüsse immer wiederhohlet werden, bis endlich folgt, daß die gefundene Zahl 3 auch der gröste gemeinschaftliche Theiler der gegebenen Zahlen 858 und 1785 sey.

§. 72. Wenn man diese Arbeit etwas genauer betrachtet, so siehet man, daß, wenn man den grösten gemeinschaftlichen Theiler zwoer Zahlen 858 und

178< finden wil, man in der That nichts anders zu thun habe, als die kleinere dieser Zahlen dergestalt zu multipliciren, daß das Product der grössern Zahl so nahe komme, als möglich ist, und so dann dieses Product von der grössern Zahl abzuziehen: daß man hernach mit dem Ueberbleibsel und der kleinern Zahl eben so verfahren müsse, und so wechselsweise immerfort, bis zuletzt nach Abzug eines dergleichen Products nichts übrig bleibt. Denn in der That dienet die Division weiter zu nichts, als diese grösten Producte zu finden. Wir wollen die Rechnung auf die Art anstellen, damit die Sache desto deutlicher werde:

858 = a	1785 = b
828 = 12 c	1716 = 2 a
30 = d	69 = c
27 = 3 e	60 = 2 d
3 = f	9 = e
	9 = 3 f
	0

Man hat an der rechten Seite 2 a, das ist, die kleinere Zahl a zweymal genommen, von der großen b abgezogen, wobey c übrig geblieben ist. Diese Zahl c durch 12 multipliciret ist wieder zur linken Hand von a abgezogen worden, und hier ist d geblieben welche Zahl man wieder verdoppelt, und von c abgezogen hat. Das Ueberbleibsel ist hier e. Nimt man dieses dreymal und subtrahiret das Product von d, so bleibet f, welche Zahl wieder dreymal genommen und von e abgezogen nichts übrig läst. Die Zahl 3 ist demnach der gröste gemeinschaftliche Theiler welchen man suchte. Man ziehet überall die grösten Producte ab, welche man haben kan, nicht weil dieses unumgänglich nothwendig ist, sondern nur die überflüssige Subtraction zu vermeiden. Denn wenn man sich der grösten Producte bedienet, so bekommt man derselben so wenige als möglich ist. Man halte übrigens diese Rechnung mit der letzten zusammen, wenn man einige Schwierigkeit dabey finden solte; dieses wird dieselbe gar bald heben.

§. 73. Dieser Anweisung nun, den grösten gemeinschaftlichen Theiler zwoer Zahlen zu finden, kan man sich bedienen, wenn man einen Bruch zu der kleinsten Benennung bringen soll, welche er haben kan. Man muß zu dem Ende eine Zahl finden, welche den Nenner und den Zehler des Bruchs zugleich theilet: II. 8. und wir haben gesehen, daß die kleinste Benennung gleich anfangs erhalten werde, wenn man den grösten dieser gemeinschaftlichen Theiler annimt, und damit so wohl den Zehler des Bruchs als auch

seinen Nenner theilet. II, 13. Nach den gegebenen Regeln kan man den grösten gemeinschaftlichen Theiler finden, wenn er sonst nicht beyfallen will, und man kan versichert seyn, daß der dergestalt gefundene Theiler würklich der gröste sey, und sich also die vergebliche Mühe ersparen, an eine weitere Reduction des Bruchs zu einer noch kleinern Benennung, zu gedenken. Der Bruch $\frac{858}{1785}$, dessen Glieder die zwo Zahlen sind, deren gemeinschaftlichen Theiler wir eben gesucht und gefunden haben, lässet sich vermittelst dieses Theilers 3 in diesen Bruch $\frac{286}{595}$ verwandeln, aber keinesweges zu einer noch kleinern Benennung bringen.

Einige besondere Wege, den gemeinschaftlichen Theiler zwoer Zahlen zu finden.

§. 74. Die gezeigte Regel ist allgemein; man hat aber auch besondere Regeln die gemeinschaftlichen Theiler zwoer Zahlen zu finden, welche nicht ohne Bequemlichkeit angewendet werden können. Wir wollen einige der vornehmsten anführen.

§. 75. Alle Zahlen, deren letzte Ziffer eine von diesen ist: 0, 2, 4, 6, 8, oder mit einem Wort, alle gerade Zahlen, lassen sich durch 2 theilen. Dieses siehet man gar leicht ein: solte sich aber ja einige Schwierigkeit dabey finden, so darf man nur die Zahlen von 1 an, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, durch 2 multipliciren, um sich davon zu überführen.

§. 76. Alle Zahlen, deren letzte Ziffer 5 oder 0 ist, lassen sich durch 5 theilen, welches man auf eben die Weise einsehen kan, wenn man die Zahlen von 1 an, in ihrer natürlichen Ordnung durch 5 multiplicirt, wodurch man alle Zahlen bekommt, deren letzte Ziffer 0 oder 5 ist. Denn es folgen diese Producte dergestalt auf einander 5, 10, 15, 20, 25, und so fort.

§. 77. Alle Zahlen welche am Ende eine 0 haben, lassen sich durch 10 theilen: alle Zahlen welche am Ende zwo 00 haben, durch 100, und so ferner. Man kan also bey jedem Bruch so viele 00 in dem einen Gliede weglöschen, als viele deren in dem andern Gliede stehen, welche man ebenfals weglöschen muß. Zum Exempel, $\frac{3500}{1270}$ ist $= \frac{350}{127}$, und $\frac{132000}{59700}$ ist $= \frac{1320}{597}$. Dergleichen Zahlen, welche am Ende ein oder mehr 0 haben, heissen auch runde Zahlen, und man kan einen Bruch allezeit ohne einen sonderlichen Fehler zu einer kleinern Benennung bringen, wenn man an die Stelle seiner Glieder diejenige runde Zahlen setzet, welche ihnen am nächsten kommen, und hernach nach Anweisung dieser gegenwärtigen Regel ver-

verfähret. Der Bruch $\frac{89}{191}$ ist etwas kleiner als $\frac{100}{200}$, und dieser ist so viel als $\frac{1}{2}$; demnach ist der Bruch $\frac{89}{191}$ etwas, aber nicht sonderlich viel, kleiner als $\frac{1}{2}$. Genauer verfähret man, wenn man an die Stelle des gegebenen Bruchs $\frac{89}{191}$ setzet $\frac{90}{190}$, welcher Bruch dem Bruche $\frac{9}{19}$ gleich ist, und dem Werth des gegebenen Bruchs näher kommet.

§. 78. Alle Zahlen, welche, wenn man ihre Ziffer alle vor einzelne Einheiten gelten läst, und von denselben 3 so oft wegwirft als man kan, nichts übrig lassen: oder welche, wenn man ihre Ziffer zusammen addiret, ohne auf die Ordnung der Einheiten Acht zu haben, die sie bedeuten, eine Zahl geben, die sich durch 3 theilen läst, lassen sich ebenfals durch 3 theilen. Nach dieser Regel hätte man den gemeinschaftlichen Theiler der zwo Zahlen 1785 und 858 leicht finden können. Denn die Ziffer der ersten dieser Zahlen geben, wenn man sie dergestalt zusammen setzet, 21, oder 3, und die Ziffer der zweyten Zahl bringen durch eine gleichmässige Addition eben so viel. Woraus zu schliessen ist, daß sich diese Zahlen beyde durch 3 theilen lassen.

§. 79. Auch hievon ist der Grund nicht gar schwer einzusehen. Wenn man die Zahlen, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. durch 3 multipliciret, so bekommet man gewiß eine Summe verschiedener 3, das ist 3, oder $3+3$, oder $3+3+3$, und so ferner; diese Summen aber werden vermittelst der gewöhnlichen Ziffer dergestalt geschrieben, daß man verschiedene drey mal 3, oder 9 wegwirft, und nur die übrigen 3 oder $3+3$ und so ferner, behält. I, 196. Wie zum Exempel, an statt $3+3+3+3$ man schreibt 12, welches in der gewiesenen Addition nur 3 giebt. Demnach werden alle Producte, welche entstehen, wenn eine Zahl, so groß sie auch seyn mag, durch 3 multipliciret wird, durch Ziffer ausgedrücket, welche sich durch 3 dividiren lassen, wenn man mit ihnen, wie gewiesen worden ist, verfähret.

Wie die zusammengesetzten Zahlen aus den einfachen entstehen.

§. 80. Dieses alles, und was annoch rückständig ist, wird noch deutlicher, wenn wir betrachten, wie die zusammengesetzte aus den einfachen Zahlen entstehen. Denn daß alle zusammengesetzte Zahlen endlich aus den einfachen durch die Multiplication heraus gebracht werden können, ist leicht einzusehen. Sie lassen sich genau dividiren, und können folgends durch die Multiplication des Theilers in den Quotienten entstehen; wenn

dieses nicht wäre, so wären sie einfache Zahlen. Dieser Theiler und dieser Quotient sind nun wieder entweder einfache Zahlen oder zusammengesetzte. Ist das erste, so ist die zusammengesetzte Zahl nur aus den zweyen einfachen, dem Theiler und den Quotienten, entstanden: ist aber der Theiler oder der Quotiente wieder eine zusammengesetzte Zahl, so kan man ihn von neuen durch die Division zerfällen. Endlich muß man auf einfache Zahlen kommen. Zum Exempel, 24 ist eine zusammengesetzte Zahl, welche aus den zween Factoren 4 und 6 entstanden ist. Jeder derselben läst sich wieder in zwey andere zerfällen, den 4 ist $= 2 \times 2$, und $6 = 2 \times 3$. Demnach entstehet die Zahl 24 aus den Factoren 2, 2, 2, 3, deren jeder eine einfache Zahl ist, und so ist es mit allen übrigen.

§. 81. Daß nun, wenn man durch die Multiplication der einfachen Zahlen zusammengesetzte heraus bringet, an der Ordnung nichts gelegen sey, in welcher man multipliciret, und daß immer einerley Zahl heraus gebracht werde, in was Ordnung man auch die einfache Zahlen in einander multipliciret, ist bereits bekant, und wir wissen, daß $3 \times 2 \times 5$ keine andere Zahl bringe als $2 \times 5 \times 3$, und so ferner. I, 98.

§. 82. Daß aber einerley Zahl nicht aus verschiedenen einfachen Zahlen zusammengesetzt werden könne, ist etwas, welches allerdings in Zweifel kan gezogen werden, ehe man es untersuchet. Die Zahl 35 entstehet aus der Multiplication der einfachen Zahlen 5 und 7, könte sie nicht auch aus zwoen oder dreyen, oder mehr andern einfachen Zahlen, als 3 und 11, entstehen? Man siehet in diesem Exempel leicht ein, daß es nicht seyn könne, denn 3 mal 11 ist 33 und nicht 35. Aber verhält sich die Sache immer so? Und wenn einerley Zahl aus zwoen einfachen nicht auf verschiedene Art entstehen kan, kan nicht etwa einerley Zahl aus drey oder mehr verschiedenen einfachen Zahlen, durch die Multiplication heraus gebracht werden? Die Zahl 210 kan aus nachfolgenden Factoren 6, 5, 7, und 15, 2, 7, wie auch aus 14, 5, 3, und noch aus andern entstehen, und es ist $210 = 6 \times 5 \times 7 = 15 \times 2 \times 7 = 14 \times 5 \times 3$. Solte dieses nicht auch angehen, wenn alle drey Factore derselben einfache Zahlen sind? Denn unter denjenigen, welche wir angenommen haben, ist immer ein zusammengesetzter Factor, ob zwar die übrigen einfache Zahlen sind.

§. 83. Die Antwort hierauf ist, Nein. Es läst sich keine Zahl aus verschiedenen einfachen Zahlen zusammen setzen, und man kan eine jede Zahl nur durch gewisse einfache Zahlen genau dividiren. Man siehet leicht ein, daß dieses letztere mit dem erstern einerley sey, oder daß es wenigstens aus demselben unmittelbar fliesse. Denn wenn sich die Zahl 30

aus keinen andern einfachen Zahlen als aus 2, 3, 5, zusammen setzen läst, so kan sie ohnmöglich durch eine andere einfache Zahl, 7 zum Exempel, dividiret werden. Wäre dieses, so wäre die Zahl 30 auch durch die Multiplication dieses Theilers 7 in den Quotienten, welchen wir indessen durch Q andeuten wollen, entstanden: und folgends wäre diese Zahl $30 = 2 \times 3 \times 5$ auch $= 7 \times Q$. Daß aber dem nicht also sey, sondern daß jede zusammengesetzte Zahl nur aus gewissen einfachen Zahlen entstehen könne, ist nun zu beweisen.

§. 84. Man nehme zu dem Ende eine zusammengesetzte Zahl, was man vor eine nehmen will, 1729, und dividire sie durch eine einfache Zahl, durch die sie sich genau theilen läst. Dieses geht mit der Zahl 19 an, der Quotiente ist 91, und demnach $1729 = 91 \times 19$. Noch dividire man eben diese Zahl 1729 durch eine andere einfache Zahl. Die Zahl 7 thut dieses, und der Quotiente ist hier 247, das demnach eben die Zahl 1729 auch dem Producte 247×7 gleich ist. Ich sage, es lasse sich 91, der Quotient der ersten Division, auch durch den Theiler der zweyten dividiren, und wir werden auf diese Eigenschaft das übrige bauen können, wenn dieselbe erst wird erwiesen seyn.

§. 85. Es sey demnach $19 \times 91 = 247 \times 7$, da 19 und 7 einfache Zahlen sind: wir sollen erweisen, daß bey diesen Umständen sich der andere Factor des ersten Products 91, durch den einfachen Factor des zweyten, 7, theilen lasse. Man multiplicire 91 durch 7. Das ist, man multiplicire die Zahl 91 von welcher gezeiget werden soll, daß sie sich dividiren lasse, durch diejenige 7, welche vor einen ihrer Theiler angegeben wird. Oder man zeige vielmehr diese Multiplication nur durch die gewöhnlichen Zeichen an $7 \times 91 = 91 \times 7$, und bemerke die Gleichheit dieser Producte bey B, und die Gleichheit der vorigen bey A:

A	$19 \times 91 = 247 \times 7$	B	$7 \times 91 = 91 \times 7$
C	$14 \times 91 = 182 \times 7$	E	$5 \times 91 = 65 \times 7$
D	$5 \times 91 = 65 \times 7$	F	$2 \times 91 = 26 \times 7$
G	$4 \times 91 = 52 \times 7$		
H	$1 \times 91 = 13 \times 7$		

In dem ersten dieser Producte bey A und B, 19×91 und 7×91 komt der gemeinschaftliche Factor 91 vor, und in dem letztern 247×7 und 91×7 ist der Factor 7 gemeinschaftlich, und diese gemeinschaftliche Factoren sind

eben

eben diejenige Zahlen, von welchen angegeben wird, daß die ersten 91 sich durch die zweyte 7 dividiren lasse. Die Producte bey B sind kleiner als diejenigen die bey A stehen. Man multiplicire diese Producte bey B beyde durch die gröste Zahl, mit welcher man sie multipliciren kan, ohne daß dadurch Zahlen kommen, welche die Producte bey A übertreffen. Man darf zu dem Ende nur die erstern Factore derselben multipliciren, und die zweyten stehen lassen, denn damit werden auch die Producte multipliciret I, 96. In unserm Exempel hat man diese Zahlen bey B mit nicht mehr als 2 multipliciren können, und die Producte, welche aus dieser Multiplication entstanden sind, stehen bey C. Diese Producte bey C ziehe man von den Producten bey A ab. Sie sind einander gleich, weil sie doppelt so groß sind als die gleichen Producte bey B; es müssen also nach diesem Abzug gleiche Zahlen bleiben, welche bey D angemerkt stehen. Man gebe sich die Mühe, diese Rechnungsarten etwas genauer zu erwegen, so wird hoffentlich bey denselben keine Schwierigkeiten bleiben, und alles deutlicher werden, als wir es uns durch viele Worte zu machen getrauen, weil alles aus den Grundsätzen, die bey der Multiplication I, 94. gewiesen sind, ganz natürlich fließet.

§. 86. Nunmehro multiplicire man die Ueberbleibsel bey D wieder durch einerley Zahl, doch so, daß sie dadurch nicht größer werden, als die Producte bey B. Wir konten in unserm Exempel sie durch nicht mehr als durch 1 multipliciren, und musten sie also bey E schreiben, wie sie bey D stehen. Diese Producte bey E ziehe man nun wieder von den über ihnen stehenden Producten ab, und bemerke die Ueberbleibsel bey F. Wiederum multiplicire man diese Ueberbleibsel bey F, beyde durch diejenige Zahl, welche sie den Zahlen bey D so nahe bringt, als möglich ist, ohne sie größer zu machen, als diese übergebliebene Zahlen D. Diese Zahl ist hier wieder 2, und die Producte stehen bey G. Man ziehe sie von den über ihnen stehenden Producten bey D ab, und bemerke den Ueberschuß bey H. Dieser ist hier $1 \times 91 = 13 \times 7$, das ist $91 = 13 \times 7$, und hieraus ist klar, daß sich 91 durch 7 dividiren lasse, und daß dadurch der Quotient 13 komme, weil nemlich 91 dem Product aus 7 und 13 gleich ist.

§. 87. Dieses nun hätte man zwar gar leicht einsehen können, wenn man bloß 91 durch 7 nach den ordentlichen Regeln dividiret hätte. Allein wir sollen zeigen, daß eben dieses unter den Umständen, die wir angegeben haben, beständig folge, und dazu leiten uns nachfolgende Betrachtungen, welche sich auf die gegebene Rechnung gründen. Man hat in derselben in der That nichts anders gethan, als daß man den grösten gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen 19 und 7, deren erstere bey A, und die zweyte bey B im

An-

Anfang stehet, gesucht hat. Denn hätte man diesen grösten Theiler finden wollen, so hätte man II, 72. verfahren müssen, wie nachstehende Rechnung weiset. Damit diese desto leichter mit der vorigen II, 85. zusammen gehalten werden könne, sind die Zahlen, welche insonderheit zu vergleichen sind, mit einerley Buchstaben bezeichnet worden, nur haben wir uns hier der kleinen an statt der grossen bedienet, welche der vorigen Rechnung beygeschrieben sind:

a	19	b	7
c	14	e	5
d	5	f	2
g	4		
h	1		

Der gemeinschaftliche Theiler ist h, und weil die Zahlen 19 und 7 deren gemeinschaftlichen Theiler man suchte, einfache Zahlen sind, und durch keine andere Zahlen können getheilet werden, II, 84. so konte bey h nichts anders kommen, als die Einheit, demnach kan auch der erste Factor bey H keine andere Zahl als die Einheit seyn. Der zweyte Factor des ersten Products bey H nemlich 91., ist eben die Zahl, von welcher zu zeigen war, daß sie sich theilen lasse, denn diese Zahl ist niemals verändert worden. Und es ist demnach das Product bey H allezeit die Zahl, deren Stelle hier 91 vertritt, selbst, weil 1 nicht multipliciret. Nun ist diese Zahl dem zweyten Producte bey H 13×7 nothwendig gleich, wie aus der Art, wie dieses Product heraus gebracht worden ist, erhellet. Es ist aber der zweyte Factor dieses Products die Zahl 7, von welcher man zeigen solte, daß sie die erstern 91 dividire, und kan niemals eine andere Zahl seyn, weil man diese Zahl ebenfals immer stehen lassen, wie sie im Anfang stunde: demnach folget hieraus, daß allezeit der Factor, dessen Stelle hier 91 vertritt, ein Product aus der einfachen Zahl, an deren Stelle hier 7 stehet, und einer andern Zahl sey, und das ist dasjenige, so wir erweisen solten.

§. 88. Durch die Wiederhohlung desjenigen, so wir eingesehen haben, und durch die Anwendung desselben auf verschiedene Fälle, werden uns die Sachen immer klärer. Dieses zu befördern, wollen wir noch die Rechnung hersetzen, durch welche gezeiget werden kan, daß wenn die Producte $\times 247$ und 91×19 gleich sind, und im übrigen alles bleibt wie vorhin, (wie denn auch diese Zahlen selbst von denjenigen, die wir eben gebraucht haben, nicht verschieden sind, sondern nur in verkehrter Ordnung stehen) sich auch 247 durch 19 theilen lasse. Wir multipliciren zu dem Ende 247 in 19 und setzen:

A.	$7\times247 = 91\times19$	B.	$19\times247 = 247\times19$
E.	$5\times247 = 65\times19$	C.	$14\times247 = 182\times19$
F.	$2\times247 = 26\times19$	D.	$5\times247 = 65\times19$
		G.	$4\times247 = 52\times19$
		H.	$1\times247 = 13\times19$

Weil nun hier wieder bey H gefunden wird $247 = 13\times19$, das ist, weil die Zahl 247 ein Product ist aus 13 und 19 so läst sich diese Zahl 247 nothwendig durch 19 theilen. Uebrigens zeiget die Ordnung der Buchstaben die bey den Zahlen stehet, wie die Rechnung zu verrichten sey.

§. 89. Hieraus ist nun dasjenige gar leicht zu schließen, so wir II, 83. gesetzt, und zu beweisen vorgenommen haben, daß nemlich einerley Zahl nicht aus verschiedenen einfachen Zahlen zusammen gesetzt seyn könne. Wir wollen bey unserm Exempel bleiben, und die Zahl 1729 nehmen. Gesetzt, es unternehme jemand diese Zahl in einfache Factore, auf verschiedene Art zu zerfällen, einmal zum Exempel in diese A, B, C, und das zweyte mal in drey oder mehrere andere a, b, c, so müste er seine Arbeit ohngefehr so anfangen. Er müste die gegebene Zahl 1729 erstlich durch eine nach Belieben angenommene einfache Zahl 7 dividiren, und so denn auch durch eine andere, zum Exempel 19, dadurch bekäme er verschiedene Quotienten 247 und 91, und diese könten ihm, fals er nicht weiter nachdächte, Hofnung machen, was er sucht, zu finden. So bald er aber sich des eben erwiesenen Satzes erinnert und erweget, daß der erste Theiler 7 in dem zweyten Quotienten 91 als ein Factor vorkommen müsse, und der zweyte Theiler 19 in dem ersten Quotienten, so siehet er leicht, daß er in seiner Unternehmung nicht weit kommen werde. Denn er kan hieraus schließen, daß der erste Quotient 91 nothwendig ein Product aus 19 und einer andern Zahl, die wir indessen N nennen wollen, seyn müsse, und daß also die Zahl 1729 aus diesen dreyen Factoren $7\times19\times N$, bestehe. Aus eben dem Grunde muß er schließen, daß in dem zweyten Quotienten, welchen er durch die Division der Zahl 1729 durch 19 heraus gebracht hat, der Theiler der ersten Division enthalten sey; daß er diesen Quotienten als ein Factum aus 7 und einer andern Zahl, die wir mit M bedeuten wollen, ansehen müsse; und daß demnach die Zahl 1729 selbst diesem Product $19\times7\times M$ gleich sey. Diese Producte $7\times19\times N$ und $19\times7\times M$ sind einander gleich, denn ein jedes derselben ist $= 1729$, und wenn man sie beyde durch 7×19 dividiret, so siehet man, daß die Zahlen M, N, ebenfals einander gleich seyn. In unserm Exempel ist $N = M = 13$, welches eine einfache Zahl ist, und so oft dergleichen vorkomt, sie-

het man ohne weiter zu gehen, daß die Zahl, welche man angenommen hat, nicht aus verschiedenen einfachen Zahlen zusammengesetzt seyn könne.

§. 90. Wird aber diese Zahl, die wir uns unter N vorstellen, nicht einfach befunden, so ist sie doch wieder aus zweyen einfachen und einer andern Zahl Q, welche auch 1 seyn kan, zusammen gesetzt, und diese einfache Zahlen werden einerley befunden, wenn man der gegebenen Anweisung, sie heraus zu bringen, folget. Von der Zahl Q aber kan nunmehro eben das gezeiget werden, so vorher von N oder M gezeiget worden ist, und so immer fort, bis man auf einfache Zahlen komt; woraus denn unwidersprechlich folget, das keine zusammengesetzte Zahl durch die Multiplication anderer und anderer einfachen Zahlen entstehen könne.

§. 91. Demnach läst sich keine Zahl, außer den einfachen Zahlen, durch deren Multiplication sie entstanden ist, durch andere Zahlen dividiren, als durch Producte zweyer, dreyer oder mehrerer dieser einfachen Zahlen. Und man kan alle Zahlen leicht finden, welche eine Zahl theilen, wenn man sie in ihre einfache Zahlen zerfället hat, denn man darf so dann nur die Producte jeder zwo, jeder drey, jeder viere und so ferner, dieser einfachen Zahlen machen, um die Theiler alle zu bekommen. Die Zahl 546 zum Exempel, entstehet aus der Multiplication der einfachen Zahlen 2, 3, 7, 13, und ist dem Product $2 \times 3 \times 7 \times 13$ gleich, die Theiler derselben sind demnach 2, 3, 7, 13, und 2×3, 2×7, 2×13, 3×7, 3×13, wie auch 7×13, und ferner $2 \times 3 \times 7$, $2 \times 3 \times 13$, $2 \times 7 \times 13$ und $3 \times 7 \times 13$. Durch andere Zahlen läst sich die Zahl 546 nicht theilen, weil sie sich sonst auch aus andern einfachen Zahlen müste zusammen setzen lassen.

Ein anderer Beweiß dieses Satzes.

§. 92. Da der Satz, daß eine jede zusammen gesetzte Zahl nur aus gewissen einfachen Zahlen, und nicht aus andern, entstehen könne, von Wichtigkeit ist, und der Beweiß desselben vielleicht etwas schwerer scheinen dürfte; so will ich noch einen von dem vorigen etwas verschiedenen Beweiß beybringen, durch welchen zugleich ein und anderes, so von den Brüchen gesagt worden ist, in ein grösseres Licht gesetzet werden kan.

§. 93. Wir wissen, daß wenn die beyden Glieder eines Bruchs, sein Zehler nemlich, und der Nenner, durch einerley Zahl multipliciret werden; der heraus gebrachte Bruch immer dem gegebenen gleich seyn müsse, man mag diese Multiplication durch eine ganze oder durch eine gebrochene Zahl verrichten. Denn ob zwar dieses II, 6. eigentlich nur in dem Fall erwie-

wiesen ist, wenn man die Multiplication durch ganze Zahlen verrichtet: so ist doch nunmehro, nachdem wir gesehen haben, was eine Multiplication durch einen Bruch eigentlich sey, gar leicht zu schließen, daß der Werth eines Bruchs eben so wenig geändert werden könne, wenn man die beyden Glieder desselben durch eine gebrochene Zahl multiplicirt. Denn wenn in dem Bruch $\frac{5}{7}$ der Nenner so wol als der Zehler durch $\frac{2}{3}$ multiplicirt werden soll, so muß man diese Glieder 5 und 7 beyde durch 2 multiplicren, und was heraus gebracht wird durch 3 dividiren. Da nun weder das erste noch das andere den Werth des gegebenen Bruchs $\frac{5}{7}$ im geringsten ändert, so kan derselbe auch nicht geändert werden, wenn man beydes, eins nach dem andern, verrichtet. Man siehet leicht, daß der Werth eines Bruchs eben so wenig geändert werden könne, wenn die beyden Glieder desselben durch eine gebrochene Zahl dividiret werden, indem man auf eben die Art schließet.

§. 94. Hieraus aber folgt unmittelbar, daß wenn man den Zehler eines Bruchs $\frac{5}{7}$ durch eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl 3 oder $\frac{2}{3}$ multipliciret, den Nenner aber durch eine andere, die grösser oder kleiner ist als die vorige; der herausgebrachte Bruch unmöglich dem gegebenen $\frac{5}{7}$ gleich seyn könne. Denn wenn man zum Beyspiel, den Zehler 5 sowol als den Nenner 7 durch 3 multiplicirt, so wird der heraus gebrachte Bruch $\frac{15}{21}$ dem gegebenen $\frac{5}{7}$ gleich. Multipliciret man aber den Zehler durch eine andere Zahl, die grösser oder kleiner ist als die 3, durch welche der Nenner multipliciret worden ist: so kommt nothwendig in dem ersten Fall mehr und in dem letztern weniger als $\frac{15}{21}$; also kan auch der dergestalt heraus gebrachte Bruch niemals dem gegebenen $\frac{5}{7}$ gleich seyn. Man wird dieses gar leicht auch auf den Fall anwenden können, wenn die multiplicirende Zahlen nicht ganz, sondern gebrochen sind: und es läßt sich der Satz eben so leicht auch von der Division erweisen. Ein Bruch, der heraus gebracht wird, indem man den Zehler eines Bruchs $\frac{6}{15}$ durch eine Zahl 3 oder $\frac{2}{3}$ und den Nenner durch eine andere 5 oder $\frac{3}{5}$, dividiret, kan diesem Bruch niemals gleich seyn.

§. 95. Setzt also, die zween Brüche $\frac{6}{15}$ und $\frac{2}{5}$ sind einander gleich, und man sey durch die Probe oder sonst versichert, daß der Zehler des ersten 6 durch den Zehler des zweiten 2 dividiret, den Quotienten 3 gebe; so kan man eben daraus zuverlässig schließen, daß kein anderer Quotient, als eben dieser 3 kommen könne, wenn man den Nenner des ersten Bruchs 15 durch den Nenner des zweyten 5 dividiret. Denn wäre dieser Quotient nicht 3, sondern eine andere Zahl, als 4, so wäre $\frac{6}{15} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4}$. Es könte

also $\frac{6}{15}$ unmöglich so viel bedeuten als $\frac{2}{5}$, wie doch gesetzt wird. Man siehet leicht, daß eben dieses richtig sey, wenn der Quotient keine ganze Zahl, sondern ebenfals gebrochen ist.

§. 96. Es können aber durch dergleichen Divisionen nur in dem Fall gebrochene Quotienten kommen, wenn der Bruch, durch dessen Glieder, die Glieder des andern getheilt worden, nicht die kleinste Benennung hat, zu welcher er gebracht werden kan. Hat er diese kleinste Benennung, so werden durch die Theilungen, von welchen die Rede ist, immer ganze Quotienten heraus gebracht. Der Bruch $\frac{6}{15}$ kan zu einer kleinern Benennung gebracht werden, und ist diesem $\frac{10}{25}$ gleich. Denn so wol der eine als der andre beträgt $\frac{2}{5}$, wie man siehet, wenn man diese Brüche beyde zu ihrer kleinsten Benennung bringt. Dividiret man nun 10 durch 6, und 25 durch 15, so komt in beyden Fällen $\frac{5}{3}$, welches keine ganze Zahl ist. Im Gegentheil aber geben die Glieder des Bruchs $\frac{6}{15}$ beyde 3, wenn man sie durch die Glieder des Bruchs $\frac{2}{5}$ theilet, welcher jenem gleich, und durch die kleinste Benennung ausgedrückt ist, die er haben kan. Eben so ist es auch, wenn die Glieder des Bruchs $\frac{10}{25}$ durch die Glieder eben des Bruchs $\frac{2}{5}$ getheilt werden, da beyderseits der Quotient 5 heraus kömt.

§. 97. Der Beweiß dieses Satzes läst sich also vorstellen. Der Bruch $\frac{2}{5}$ hat die kleinste Benennung, welche er haben kan. Gesetzt dieser andere Bruch $\frac{N}{D}$, welchen man übrigens annehmen kan wie man will, sey jenem gleich, und man theile den Zehler dieses letztern Bruchs N durch den Zehler des erstern 2. So ist zu zeigen, daß der Quotient nothwendig eine ganze Zahl seyn werde; und eben dergleichen ist auch in Ansehung der Nenner darzuthun. Dieses geschiehet also. Ist der Quotient keine ganze Zahl, so ist er entweder ein ächter, oder ein unächter Bruch. Wir wollen zuerst setzen, der Quotient sey ein ächter Bruch. Weil nun immer die dividirte Zahl wieder komt, wenn man den Theiler durch den Quotienten multiplicirt, so ist N ein Product aus der ganzen Zahl 2 und aus einem ächten Bruch. Folgends ist N kleiner als 2, 1, 85. und auf eben die Art schließet man, daß bey diesen Umständen auch D kleiner seyn müste als 5. Wenn also N durch 2 den Zehler eines andern Bruchs $\frac{N}{D}$ und D durch 5 den Nenner eben dieses Bruchs, dividiret, einen ächten Bruch zum Quotienten geben, so sind die Glieder des Bruchs $\frac{N}{D}$ nothwendig kleiner, als die Glieder des andern $\frac{2}{5}$; folgends ist dieser Bruch $\frac{2}{5}$ nicht durch die klein-

ste Zahlen ausgedrückt, welche ihn ausdrücken können. Dieses aber ist dem zuwider, so wir weggenommen haben.

§. 98. Aber eben so wenig kan auch der Bruch $\frac{2}{5}$ die kleinsten Benennung haben, wenn man setzet, daß ein anderer Bruch $\frac{N}{D}$, wenn die Glieder desselben eben so dividiret werden, einen unächten Bruch zum Quotienten giebt. Denn gesetzt, es sey dieser unächte Bruch aus der ganzen Zahl 3 und aus dem wahren Bruch $\frac{4}{7}$ zusammen gesetzt: So muß N wieder kommen, wenn man den Theiler 2 durch diesen Quotienten multiplicieret. Nun ist N eine ganze Zahl; und wenn man den ersten Theil des Quotienten 3 in den Zehler 2 multipliciret, so wird ebenfalls eine ganze Zahl herausgebracht. Also muß auch aus der Multiplication des zweyten Theils des Quotienten $\frac{4}{7}$ in eben den Zehler 2 eine ganze Zahl kommen; und weil dieser Theil $\frac{4}{7}$ ein wahrer Bruch ist, so muß diese ganze Zahl kleiner seyn als 2. Wir wollen uns dieselbe unter n vorstellen. Eben so kan man nun auch bey dem Nenner schließen. Wenn N durch 2 dividiret, den Quotienten $3+\frac{4}{7}$ giebt; so muß eben dieser Quotient kommen, wenn man D durch 5 theilet, weil jenes der Zehler und dieses der Nenner des Bruchs $\frac{2}{5}$ ist, den wir zum Beyspiel angenommen haben II, 95. Es komt also D wieder, wenn man 5 durch $3+\frac{4}{7}$ multipliciret: und weil D eine ganze Zahl ist, und 3×5 ebenfalls, so muß auch eine ganze Zahl kommen, wenn man 5 durch den ächten Bruch $\frac{4}{7}$ multipliciret, und diese Zahl muß kleiner seyn als 5. Es sey dieselbe d. Da nun also $n=2+\frac{4}{7}$ und $d=5+\frac{4}{7}$, so ist auch der Bruch $\frac{n}{d}$ dem Bruch $\frac{2}{5}$ gleich, und die Benennung desselben ist kleiner als 5; welches demjenigen widerspricht, so gesetzt worden ist.

§. 99. Es folgt hieraus, daß, wenn ein Bruch durch die kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückt ist, welche ihn ausdrücken können; ein jeder anderer Bruch der eben den Werth hat, heraus gebracht werde, indem man die beyden Glieder des vorigen durch eine gewisse ganze Zahl multiplicieret. Und daß also, wenn ein Bruch nicht dadurch zu kleinern Benennungen gebracht werden kan, daß man seine beyden Glieder durch eine ganze Zahl dividiret; auch keine Hofnung vorhanden sey, ihn durch irgend ein anderes Mittel zu kleinern Benennungen zu bringen.

§. 100. Dasjenige aber, so wir vornemlich zu zeigen vorgenommen haben wird also geschlossen. Es sey die Zahl 1365 angenommen, und durch

eine

eine der einfachen Zahlen getheilet worden, durch welche sie sich theilen läst. Diese sey 13, durch welche der Quotient 103 heraus gebracht wird: so ist $1365 = 13 \times 103$. Eben die Zahl sey auch durch eine andre einfache Zahl 7 getheilet, und dadurch der Quotient 195 erhalten worden, und folgends sey $1365 = 7 \times 195$, welches mit dem vorigen zusammen genommen $13 \times 103 = 7 \times 195$ gibt. Nun nehme man das Product aus einer der angenommenen einfachen Zahlen 13, und aus dem Quotienten, welcher durch die andere heraus gebracht wird, in unserm Exempel 195, und schreibe dieses Product 13×195 als einen Nenner unter die beiden vorigen Producte 13×103 und 7×195. Die Brüche, welche dadurch heraus gebracht werden, müssen einander gleich seyn, $\frac{13 \times 103}{13 \times 195} = \frac{7 \times 195}{13 \times 195}$. Man bringe diese Brüche auf kleinere Benennungen, indem man die Zahlen wegläst, welche so wol in dem Zehler als in dem Nenner als ein Factor vorkommen, so erhält man $\frac{103}{195} = \frac{7}{13}$. Nun sind die Zahlen des letztern Bruchs einfach: also ist derselbe durch die kleinste Benennung ausgedrückt. Und es muß in dem erstern Bruch $\frac{103}{195}$, welcher jenem gleich ist, der Zehler entstehen, wenn man den Zehler des zweiten durch eine ganze Zahl multipliciret; und der Nenner eben dieses erstern Bruchs muß können heraus gebracht werden, indem man den Nenner des zweyten durch eben die ganze Zahl multiplicirt II, 96. Das ist, wenn man diese ganze Zahl N nennet, so kan 103 also $7 \times N$, ausgedrückt werden, und 195 also $13 \times N$. Setzt man nun dieses in die Producte, deren Gleichheit wir anfangs eingesehen haben, $13 \times 103 = 7 \times 195$, so wird dadurch $13 \times 7 \times N = 7 \times 13 \times N$. Und da jedes dieser Producte der angenommenen Zahl 1365 gleich ist, so siehet man, daß in dieser Zahl die beyden angenommenen einfachen Zahlen 13 und 7, durch welche sie sich genau theilen ließ, würklich als Factore enthalten sind, zusamt noch einem andern Factor N, welcher wieder entweder eine einfache Zahl seyn kan, in dem angenommenen Beyspiel aber ebenfals zusammen gesetzt ist. Ist nun in einem andern Fall N eine einfache Zahl, oder auch selbst die Einheit; so siehet man sogleich, daß die angenommene Zahl in keine andere einfache Factore, als in die heraus gebrachte 7, 13 und N, zerfällt werden könne. Ist aber, wie hier, N ebenfalls eine zusammen gesetzte Zahl, so kan sie auf eben die Art in zwo einfache und eine andere Zahl n zerfällt werden, und diese n wiederum, bis endlich die letzte anstatt der n heraus gebrachte Zahl einfach wird. Dadurch aber wird die angenommene Zahl ganz in gewisse einfache Zahlen zergliedert, die sich nicht ändern lassen. In unserm Beyspiel ist $N = 15$, welche sich in die einfache

fache Zahlen 3, 5 oder 3, 5, 1 zerfällen läst. Also ist $n=1$, und die Zahl 1365 bestehet aus diesen einfachen 7, 13, 3, 5 und aus keinem andern.

Erläuterung der gemeinschaftlichen Theiler verschiedener Zahlen.

§. 101. Wenn demnach zwo Zahlen aus einfachen zusammen gesetzt sind, so daß die erste $A=2\times3\times17$, und die zweyte $B=5\times7\times13$, und die einfache Zahlen, aus welchen A zusammen gesetzt ist, sind von den einfachen Zahlen, durch deren Multiplication B entstehet, verschieden; so ist kein Gedanke, daß man einen gemeinschaftlichen Theiler vor beyde Zahlen A und B finden werde, und es beziehen sich also solche Zahlen auf einander als einfache Zahlen. Im Gegentheil, wenn zwo Zahlen $C=2\times3\times5$, und $D=5\times2\times13$ aus einfachen Zahlen dergestalt entstanden sind, daß unter den einfachen Zahlen, deren Multiplication C bringet, etliche enthalten sind, die auch unter den Factoren der Zahl D stehen, dergleichen hier 2 und 5 sind: so haben die Zahlen gemeinschaftliche Theiler: nemlich eben die einfache Zahlen 2 und 5, welche bey denselben beyderseits vorkommen, und das Product derselben 10. Eben dieses Product, welches der gröste gemeinschaftliche Theiler ist, wird durch die Regeln gefunden, die wir oben gegeben haben II, 66.

§. 102. Wenn drey zusammen gesetzte Zahlen $A=2\times3\times7\times13$, $B=3\times7\times17$, und $C=5\times7\times13$ gegeben sind, so ist der gemeinschaftliche Theiler aller dreyen die einfache Zahl, oder das Product der einfachen Zahlen, welche zugleich in A, B und C vorkommen, und bey den gegebenen Zahlen keine andere als 7. Man findet diese Zahl, wenn man erstlich den gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen A und B suchet, und so dann den gemeinschaftlichen Theiler dieses gefundenen Theilers 3×7, und der Zahl C ausmacht, welcher kein anderer seyn kan, als die Zahl 7. Man siehet sogleich daß dieser Theiler der gröste seyn werde, welchen man haben kan, wenn man so wohl Anfangs den grösten gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen A und B findet, als auch hernach den grösten gemeinschaftlichen Theiler des vorigen und der Zahl C nimt.

§. 103. Auf eben die Art kan man den grösten gemeinschaftlichen Theiler von vier Zahlen A, B, C und D finden, wenn man erstlich den grösten gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen A und B heraus bringet, welchen wir a nennen wollen, so dann den grösten gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen a und C suchet, welcher b heißen soll, und endlich den grösten gemeinschaftlichen

lichen Theiler der Zahlen b und D. Dieser wird die gröste der Zahlen seyn, welche die vier Zahlen A, B, C und D theilen. Mit mehrern Zahlen verfährt man auf eben die Art, und alles dieses, so sonst etwas weitläuftig müste dargethan werden, fließet aus demjenigen, so wir von der Zusammensetzung der Zahlen gewiesen haben, ohne Umschweif.

Anwendung dieser Betrachtungen auf die Brüche.

§. 104. Wenn die Glieder eines Bruchs byde in die einfache Zahlen zerfället werden, aus deren Multiplication sie entstanden sind, so siehet man leicht, ob sich dieser Bruch zu kleinern Benennungen bringen lasse, und wie dieses geschehen könne. Man darf nemlich nur diejenigen einfachen Zahlen, welche in dem Zehler und Nenner zugleich vorkommen, aus der Multiplication weglassen. Denn dadurch werden die Glieder des Bruchs durch die gedachten einfachen Zahlen, oder durch die Producte aus denselben, dividiret, und die noch übrige einfache Zahlen sind die Quotienten. Als wenn man die Glieder des Bruchs $\frac{42}{154}$ in ihre einfache Zahlen zerfället, den Zehler in 2, 3, 7, und den Nenner in 2, 2, 3, 11, so bekomt der Bruch dieses Ansehen $\frac{2.3.7}{2.2.4.11}$. Man lasse aus dem Zehler die Factore 2, 3 weg, und eben diese Zahlen vermeide man auch in dem Nenner, so wird der Bruch $\frac{7}{2.11}$ oder $\frac{7}{22}$ dem vorigen gleich seyn, und jener ist damit zu der kleinsten Benennung gebracht worden, durch welche er ausgedrücket werden kan II, 13. Man siehet leicht, daß durch die Weglassung der Zahlen 2 und 3 man wirklich so wohl den Zehler 2.3.7, als auch den Nenner 2.2.3.11, oder 2.3.2.11, durch das Product aus denselben 2.3 oder 6 dividiret habe, I, 140. und daß 7 und 2.11 = 22 die Quotienten sind, die durch diese Division herausgebracht werden.

§. 105. Komt nach dieser Zerfällung keine einfache Zahl in dem Zehler und Nenner des Bruchs zugleich vor, so läst sich auch der Bruch nicht zu einer kleinern Benennung bringen, weil in diesem Fall der Zehler und der Nenner keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, sondern die Glieder des Bruchs sich als einfache Zahlen auf einander beziehen II, 101. So ist es mit dem Bruch $\frac{15}{77}$, welcher durch die Zerfällung seiner Glieder in ihre einfache Zahlen dieser wird, $\frac{3.5}{7.11}$. Es ist nicht zu gedenken, daß man ihn zu einer

kleinern Benennung werde bringen können, und eben so können wir schliessen, daß der Bruch $\frac{7}{22}$ oder $\frac{7}{2.11}$ die kleinste Benennung habe, zu welcher der Bruch $\frac{42}{132}$ oder $\frac{2.3.7}{2.2.3.11}$ kan gebracht werden.

§. 106 Man kan dieses umkehren, und es ist richtig, daß, wenn ein Bruch sich nicht zu einer kleinern Benennung bringen läst; auch nach der Zerfällung des Zehlers und Nenners desselben in die einfachen Zahlen, aus welchen sie entstanden sind, in dem Zehler keine einfache Zahl vorkommen müsse, welche auch in dem Nenner vorkomt. Denn wäre dieses, so könte man, wie eben gewiesen worden ist, den Zehler so wohl als den Nenner durch diesen gemeinschaftlichen Factor theilen. Der Bruch $\frac{6}{35}$ läst sich nicht durch eine kleinere Benennung ausdrücken: zerfället man aber seine Glieder in ihre einfache Zahlen $\frac{2.3}{5.7}$, so komt in dem Nenner keine einfache Zahl vor, welche zugleich in dem Zehler vorkäme.

§. 107. Und wenn in einem Bruch der Zehler grösser ist, als der Nenner, und also dieser Bruch eine oder etliche ganze Einheiten enthält, so ist es nicht möglich daß er einer ganzen Zahl, ohne einem daranhängenden wahren Bruch gleich seyn könne, wenn nicht die einfache Zahlen des Nenners alle unter den einfachen Zahlen vorkommen, in welche der Zehler zerfället werden kan. Denn in diesem Fall läst sich der Bruch ohnmöglich auf die kleinste Benennung, die ein Bruch haben kan, nemlich die 1, bringen, welches doch geschehen muß, wenn ein Bruch einer ganzen Zahl gleich seyn soll II, 15. So ist es mit dem Bruch $\frac{385}{330} = \frac{5.7.11}{2.3.5}$ beschaffen. Es kan derselbe zu dieser kleinern Benennung gebracht werden $\frac{7.11}{2.3} = \frac{77}{6}$, man kan ihn auch durch eine ganze Zahl mit einem derselben anhängenden Bruch, nemlich durch $12\frac{5}{6}$ ausdrücken, aber ohnmöglich durch eine ganze Zahl allein. Im Gegentheil ist der Bruch $\frac{42}{6} = \frac{2.3.7}{2.3}$ dem Bruch $\frac{1.7}{1}$, das ist, der ganzen Zahl 7, gleich, weil die einfache Zahlen des Nenners alle unter den einfachen Zahlen des Zehlers vorkommen.

§. 108. Man sihet leicht, daß man auch dieses umkehren, und sagen könne, daß, wenn man eine Zahl, welche aus einer ganzen und einem wahren

ren Bruch b:stehet, als $2\frac{4}{7}$, ganz in Form eines Bruchs schreibt, $\frac{18}{7}$, und die Glieder dieses Bruchs in ihre einfache Zahlen zerfället $\frac{2\cdot 7}{5}$, es nicht möglich sey, daß alle einfache Zahlen des Nenners unter den einfachen Zahlen des Zehlers vorkommen, weil sonst der Bruch $\frac{18}{7}$, und folgends auch die Zahl $2\frac{4}{7}$ einer ganzen Zahl gleich seyn müste.

Einige Vortheile bey der Bruchrechnung.

§. 109. Sonst fließen hieraus noch einige Bequemlichkeiten bey den Bruchrechnungen, welche wir nicht ganz außer Acht lassen können, ob sie zwar so unumgänglich nothwendig nicht sind. Indem man zween Brüche unter einerley Benennung bringt, können diese beyde Brüche öfters zu kleinern Benennungen gebracht werden, ohne daß diese kleinere Benennungen verschieden werden. Man kan dieses durch die II, 8. gegebene Regeln erhalten; aber man kan auch gleich anfangs, indem man die Brüche auf einerley Benennung bringt, dergestalt verfahren, daß man zugleich die kleinsten Benennungen erhalte, durch welche die Brüche ausgedrückt werden können.

§. 110. Gesetzt, es seyn die Brüche $\frac{5}{9}$ und $\frac{7}{12}$ unter einerley Benennung zu bringen. Man zerfälle, zu deutlichem Begrif desjenigen so wir weisen wollen, die Glieder derselben in ihre einfache Zahlen, so werden diese Brüche $\frac{5}{3\cdot 3}$ und $\frac{7}{3\cdot 4}$. Bringt man nun diese Brüche würklich unter einerley Benennung, indem man nemlich die Glieder eines jeden Bruchs durch den Nenner des andern multipliciret, so bekomt man vor den ersten Bruch $\frac{3\cdot 4\cdot 5}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 4}$, und vor den zweyten $\frac{3\cdot 3\cdot 7}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 4}$. Diese Brüche lassen sich beyde zu kleinern Benennungen bringen, indem man ihre Nenner und Zehler durch 3 dividiret. Unter diesen kleinern Benennungen sind die Brüche $\frac{4\cdot 5}{3\cdot 3\cdot 4}$ und $\frac{3\cdot 7}{3\cdot 3\cdot 4}$: Man siehet aber leicht, daß die Zahl 3 dadurch so wohl in den Nenner als in den Zehler der beyden Brüche gekommen ist, weil sie in beyden Nennern der Brüche $\frac{5}{3\cdot 3}$ und $\frac{7}{3\cdot 4}$, welche unter einerley Benennung solten gebracht werden, vorkomt: weil jede Zahl, welche dergestalt in beyden

Nennern vorkomt, nothwendig auch in die Zehler gebracht werden muß, wann man, wie bey dieser Arbeit geschichet, die Zehler durch die Nenner multipliciret.

§ 111. Man kan demnach gleich Anfangs aus den Nennern alle die einfache Factore weglassen, welche in beyden vorkommen, das ist, man kan die Nenner beyde durch ihre gröste gemeinschaftliche Theiler dividiren, und hernach die Zehler und Nenner der Brüche, an statt der ganzen Nenner, durch die Quotienten dieser Division, multipliciren. Nemlich, wenn die Brüche $\frac{5}{3 \cdot 3}$ und $\frac{7}{3 \cdot 4}$ unter einerley Benennung zu bringen sind, welche zugleich die kleinste unter allen gemeinschaftlichen Benennungen sey, die sie haben können, so multiplicire man die Zehler und Nenner des ersten Bruchs nur durch 4 und den Zehler und Nenner des zweyten durch 3, welche Zahlen nemlich in den Nennern 3×3 und 3×4, außer dem gemeinschaftlichen Factor 3 vorkommen, so kommen die Brüche $\frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot 4}$ und $\frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 3 \cdot 4}$, oder $\frac{20}{36}$ und $\frac{21}{36}$, welche alle Eigenschaften haben, die bey den Brüchen erfordert werden, die man an statt der gegebenen schaffen solte. Diese Zahlen 3 und 4 sind die Quotienten, welche kommen, wenn man die Nenner der gegebenen Brüche $\frac{5}{9}$ und $\frac{7}{12}$ durch die gröste Zahl dividiret, welche sie beyde theilet, nemlich durch 3.

§. 112. Man kan sich eben dieser Betrachtung bedienen, wenn man mehr als zween Brüche unter einerley Benennung bringen sol, welche zugleich die kleinste unter allen Benennungen sey, die sie gemeinschaftlich haben können. Es seyn die drey Brüche $\frac{1}{6}, \frac{5}{22}, \frac{2}{15}$ unter einerley Benennung zu bringen; so muß man, wie II, 29. gewiesen worden ist, die Glieder eines jeden dieser Brüche durch das Product aus den Nennern der zween übrigen multipliciren. Man zerfälle aber diese Glieder in die einfache Zahlen, aus welchen sie entstanden sind, so werden die Brüche $\frac{1}{2 \cdot 3}$, $\frac{5}{7 \cdot 3}$, $\frac{2}{5 \cdot 3}$, und man siehet, daß nach der angewiesenen Multiplication die Brüche unter einerley Benennung nachfolgende seyn werden: $\frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$, $\frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$ und $\frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$. Die Nenner der gegebenen Brüche lassen sich alle durch die Zahl 3 theilen, und diese ist die grösseste Zahl, welche sie alle theilet.

Die-

Diese Zahl stehet in einem jeden Zehler der gefundenen Brüche zwey mal als ein Factor, weil ein jeder Zehler in das Product zweyer Nenner multipliciret worden ist; und aus einer ähnlichen Ursache stehet sie in jedem Nenner drey mal. Demnach können die Glieder eines jeden dieser Brüche durch 3.3 dividiret, und dadurch zu kleinern Benennungen gebracht werden: auf die Art $\frac{5.7}{2.3.5.7}$, $\frac{2.5.5}{2.3.5.7}$, $\frac{2.2.7}{2.3.5.7}$, und man siehet, daß deswegen doch die Benennung einerley bleiben müsse. Man würde aber gleich Anfangs diese kleinern Benennungen erhalten haben, wenn man den gemeinschaftlichen Theiler aller Nenner aus allen Zahlen weggelassen hätte, durch welche die Glieder der gegebenen Brüche zu multipliciren waren.

§. 113. Man begreifet also, daß nicht allein drey Brüche unter einerley Benennung zu bringen, sondern auch zu machen, daß diese gemeinschaftliche Benennung die kleinste sey, welche sie alle haben können, man dergestalt verfahren könne. Man nehme noch die vorigen Brüche, aber ohne ihre Glieder in einfache Zahlen zu zerfällen $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{21}$, $\frac{2}{15}$, und schreibe vor jeden derselben das Product aus den Nennern der übrigen, dergestalt $315)\frac{1}{8}$, $90)\frac{5}{21}$, $126)\frac{2}{15}$. So dann dividire man diese Zahlen durch den grösten gemeinschaftlichen Theiler welchen sie haben, welcher hier 9 ist, indem die Quotienten, die durch diese Division kommen, sind 35, 10, 14. Diese Zahlen schreibe man neben die Brüche an statt der vorigen $35)\frac{1}{8}$, $10)\frac{5}{21}$, $14)\frac{2}{15}$, und multiplicire so dann die Glieder eines jeden Bruchs durch die Zahl, welche neben ihm stehet, so erlangt man das gesuchte, und die Brüche werden unter der kleinsten gemeinschaftlichen Benennung, die sie haben können, diese seyn: $\frac{175}{210}$, $\frac{50}{210}$, $\frac{28}{210}$. Auf eben die Art verfähret man, wenn mehr als drey Brüche unter eine Benennung zu bringen sind, welche zugleich die kleinste unter allen sey, die sie gemeinschaftlich haben können.

§. 114. Bey der Multiplication eines Bruchs durch eine andere Zahl, die entweder ganz oder gebrochen ist, kan man sich eines ebenmäßigen Vortheils gebrauchen, und dadurch das Product in kleinern Zahlen heraus bringen. Es sey $\frac{4}{21}$ durch $\frac{3}{10}$ zu multipliciren, welche Brüche, wenn man ihre Glieder in einfache Zahlen zerfället, aus welchen sie entstanden sind, dergestalt stehen $\frac{2.2}{3.7}$ und $\frac{3}{2.5}$. Man multiplicire die Zehler und die Nenner, wie erfordert wird, II, 39. so wird das Product $\frac{2.2.3}{2.3.5.7}$, welches sich durch eine kleinere Benennung ausdrücken läst, wenn man unter den Fa-

ctoren der Glieder die beyden 2 und 3 weglässt, wodurch man $\frac{2}{5.7}$, oder $\frac{2}{35}$ erhält. Man würde aber diese Zahlen 2 und 3 gleich Anfangs vermieden und nicht in das Product gebracht haben, wenn man den Zehler des ersten Bruchs 4 und den Nenner des zweyten 10 durch die gröste Zahl 2 dividiret hätte, welche sie beyde dividiret, und mit dem Zehler des zweyten Bruchs 3 und dem Nenner des ersten 21 eben so verfahren wäre. Denn die Brüche $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{5}$ an die Stelle der ersten gesetzt, bringen durch ihre Multiplication das Product $\frac{2}{35}$ welches man suchte, in den kleinsten Zahlen. Es ist leicht zu sehen, daß dieser kleine Vortheil sich auch bey der Division anbringen lasse.

Dritter Abschnitt.

Von den Quadrat- und Cubiczahlen.

Begriffe der Quadratzahlen.

§. 1.

Wenn man eine Zahl in sich selbst multipliciret, so wird das heraus gebrachte Factum eine Quadratzahl genennet. Man beziehet jede Quadratzahl auf diejenige, aus deren Multiplication in sich selbst sie entstanden ist, und nennet sie das Quadrat, oder die Quadratzahl von derselben Zahl. Und eben so beziehet man die Zahl, aus deren Multiplication in sich selbst die Quadratzahl entstanden ist, auf diese, und nennet sie dieser Zahl ihre Quadratwurzel. Zum Exempel 7 multipliciret durch 7 giebt 49, also ist diese 49 eine Quadratzahl. Und zwar ist 49 die Quadratzahl der 7, und 7 ist die Quadratwurzel der 49, weil 7 und keine andere Zahl, wenn man sie in sich selbst multipliciret, die Zahl 49 bringet. Es werden demnach die Quadratzahlen leicht gemachet, wenn ihre Wurzeln gegeben sind.

§. 2. Wenn aber eine Quadratzahl gegeben ist, ist es weit gefehlet, daß die Wurzel mit eben der Leichtigkeit zu haben wäre. Es wird zwar jederzeit aus dem Product und dem einen Factor der andere Factor durch die Division gefunden, und es komt also auch die Quadratwurzel in die Stelle des Quotienten, wenn man das Quadrat durch die Wurzel dividiret. Allein dieses kan bey Erfindung der Wurzel nicht den geringsten Nutzen haben. Wer wird die Wurzel durch eine dergleichen Division suchen, da sie allbereits gegeben seyn muß, wenn man durch dieselbe dividiren sol? Es wäre dann, daß man durch vieles Probieren zur Wurzel kommen wolte, indem man ein gegebenes Quadrat durch eine Zahl nach der andern dividirte, bis man auf eine käme, welche einen Quotienten brinat, der eben so groß ist, als der angenommene Theiler. Dieses aber wäre viel zu langweilig: und überhaupt kan in den Wissenschaften eine bloße Anweisung zu wiederhohlten Proben nicht geduldet werden, wenn etwas ohne dergleichen

chen Proben erhalten werden kan. Wolte man aber ja probieren, so könte man, mit etwas geringerer Arbeit, so lange Zahlen in sich selbst multipliciren, bis man auf eine käme, deren Quadrat eben so groß ist als die Zahl, deren Quadratwurzel man suchet. Diese Zahl wäre so dann die Wurzel. Als, die Wurzel von 49 ist 7, weil 7 mal 7 die Zahl 49 bringt, und wenn 49 durch 7 dividiret wird, der Quotient ebenfals 7 ist.

§. 3. Doch ist keine andere als diese angezeigte Weise anzugeben, diejenige Quadratwurzeln zu finden, welche nur eine Ziffer haben, oder, die Wurzeln 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 aus ihren Quadratzahlen zu erlangen. Da aber dieser Wurzeln ihre Quadrate bekant genug sind, so kan dieses niemanden aufhalten. So bald man 4 nennet, fället so gleich bey, das zweymal 2 viere bringe, und daß demnach die Zahl 2 die Quadratwurzel von 4 seyn müsse. Der Deutlichkeit nichts zu vergeben haben wir diese Zahlen mit ihren Quadraten besonders hieher gesetzt:

Wurzeln:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
Quadrate:	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81.

und wir werden künftig immer zum voraus setzen, daß die Wurzel dieser Quadratzahlen bekant sind.

§. 4. Nimt man eine der eben gesetzten Quadratzahlen an, welche man wil, und setzet derselben ein, zwey, drey, oder mehr Paare von 00 bey, so kan die Wurzel eben so leicht gefunden werden. Man nimt erstlich die Quadratwurzel der Ziffer, und setzet derselben so viele einzelne 0 zu, als viele Paare von 00 in dem Quadrat vorkommen. Die Quadratwurzel von 36 ist die Zahl 6, von 3600 ist die Quadratwurzel 60, von 360000 aber 600, und so ferner, und dieses sihet man leicht ein, wenn man Acht hat, wie die Quadrate aus den Zahlen, welche am Ende eine oder etliche 00 haben, durch die Multiplication entstehen: nemlich vor jede 0, welche in einer Zahl am Ende angetroffen wird, kommen zwo 00 in das Quadrat derselben.

§. 5. Eben so ist es auch mit denen Ziffern, welche vorne 00 haben, und zehentheilichte Brüche bedeuten. Vor jede dergleichen 0 in der Wurzel stehen in dem Quadrat zwo 00, wenn ihre Stellen nicht sonst gefället werden. Jedes mal aber werden in dem Quadrat zweymal so viele Ziffer, die zehentheilichte Brüche bedeuten sollen, vermittelst des (,) abgesondert, als viele dergleichen Ziffer in der Wurzel stehen. Das Quadrat von 0,2 ist 0,04, das Quadrat von 0,03 ist 0,0009, das Quadrat von 0,9 ist 0,81, und das Quadrat von 0,08 ist 0,0064. Man darf nur die vorgeschriebene

bene Zahlen, wie oben I, 113. gelehret worden ist, in sich selbst multiplici-ren, wenn man diese Wahrheit deutlich einsehen wil.

§. 6. Was aber die übrige Quadratzahlen anlanget, so sind ihre Wurzeln nicht so leicht gefunden, und wir können, wie dieses zu thun, oder, wie die Wurzel eines jeden dergleichen Quadrats auszuziehen sey, nicht einsehen, ehe wir uns vorgestellet haben, wie die Theile einer Wurzel in ihre Quadratzahl hinein gebracht, und gleichsam verwickelt werden. Gleich-wie nemlich oben gelehret worden ist, wie die Theile des Quotienten nach und nach aus der zu dividirenden Zahl herauszubringen sind; eben so wird auch die Wurzel nach und nach, aus der Quadratzahl heraus gebracht, und darzu werden Regeln zu geben seyn. Die Gründe dieser Regeln blei-ben unverständlich, so lange nicht bekant ist, wie die Theile der Wurzel in die Theile der Quadratzahl verwickelt worden. Wir haben aus eben der Ursache uns vorstellen müssen, wie die Zahlen aus dem Theiler und dem Quotienten entstehen, ehe wir den Quotienten aus der Zahl, welche zu di-vidiren ist, und dem Theiler, herauszubringen lerneten.

Zusammensetzung der Quadratzahl einer zweytheiligen Wurzel.

[*Fig. 21.*] §. 7. Man nehme demnach eine Zahl, was man vor eine wil, die man sich wieder gar deutlich durch Puncte vorstellen kan, als AB, und theile dieselbe in die zwey Theile AC und CB, multiplicire so dann die Zahl in sich selbst, oder setze sie erst 3, und hernach 2 mal, nach Maß-gebung der Theile, in welche man sie zerschnitten hat; so wird das Pro-duct, welches die Quadratzahl der Wurzel 5 seyn wird, stehen, wie die Figur weiset; aus welcher man so gleich siehet, warum solche Zahlen Quadratzahlen genennet werden: weil sie nemlich die Einheiten, aus wel-chen sie bestehen, in Vierecke ordnen lassen, welche in der Geometrie Qua-drate genennet werden.

§. 8. Man siehet aber auch dasjenige, welches wir hauptsächlich er-weisen wolten, daß nemlich ein jedes Quadrat einer Zahl, die in zwey Theile getheilet worden ist, man sich füglich aus vier Theilen zusammen gesetzt vorstellen könne, und daß diese Theile sind, erstlich DC, das Qua-drat des ersten Theils der Wurzel AC. Es ist sichtlich, daß die in Form eines Vierecks zwischen D und C gesetzte Zahl, nichts anders als dieses Quadrat des ersten Theils der Wurzel AC seyn könne. Denn die Linie

CF schneidet von der Wurzel diesen ersten Theil AC ab, und die Querlinie DE hat man gezogen, nachdem man die Wurzel AB, und folgends auch den ersten Theil derselben AC so oft gesetzt hatte, als oft in eben diesem Theil AC die Einheit enthalten ist, das ist, es ist die Linie DE gezogen worden, nachdem man den ersten Theil der Wurzel AC in sich selbst multipliciret hat.

§. 9. Zweytens, stehet an diesem Quadrate DC ein Factum CE, welches entstanden, indem der zweyte Theil der Wurzel, nemlich CB, welchen der Strich CF zur rechten läst, durch den erstern Theil AC = BE multipliciret ist. Eine Wiederhohlung desjenigen so eben gesagt worden, mit gar geringer Veränderung, kan dieses klar machen, wenn die Sache nicht vor sich selbst in die Augen leuchten solte. Man kan dieses Factum bloß ein Factum aus den Theilen der Wurzel nennen, weil in der That einerley komt, ob man den ersten Theil derselben BE durch den zweyten CB, oder den zweyten CB durch den ersten BE multipliciret. I, 90.

§. 10. Drittens hat man noch ein dergleichen Factum aus den zween Theilen der Wurzel in der untern Abtheilung zur linken, nemlich DF, in welchem der erste Theil der Wurzel AC durch den zweyten CB multipliciret ist. Und endlich komt viertens in der untern Abtheilung zur rechten wieder ein Quadrat des andern Theils der Wurzel CB, nemlich FE, bey welchem wir uns desto weniger aufzuhalten haben, weil auf eben die Art einzusehen ist, daß in dieses Fach FE das Quadrat des zweyten Theils kommen müsse, wie wir gezeiget haben, daß in dem allerersten, und diesem letztern schräg gegen über stehenden Fach DC, das Quadrat des ersten Theils der Wurzel enthalten sey.

§. 11. Dieses kürzer zu fassen muß man sagen, daß das Quadrat einer Wurzel AB die aus zweyen Theilen AC und CB zusammen gesetzt ist, das Quadrat eines jeden Theils derselben AC und CB enthalte, und noch über das zwey Producte, welche entstehen, wenn man die Theile der Wurzel AC und BC in einander multipliciret.

§. 12. Man wird dieses alles so wohl deutlicher verstehen, als auch davon besser überzeuget werden, wenn man noch mehrere Quadratzahlen von verschiedenen Wurzeln auf diese Art setzet. Man theile zum Exempel die Wurzel 7 in die zwey Theile 4+3, so bestehet das Quadrat von 7, welches 49 ist, aus den Theilen 4×4, oder 16, 4×3 oder 12, nochmals 4×3 oder 12, und 3×3 welches 9 ist. Das ist, es bestehet das Quadrat von 7 aus den Quadratzahlen der beyden Theile 4 und 3 in welche man 7 getheilet hat, und folgends aus 16+9, und über das aus dem Product

die-

dieser Theile gedoppelt genommen, oder 2 mal 12, welches 24 beträgt. Es ist demnach das Quadrat 16+24+9, das ist 49, wie allbereit bekant ist; und man kan diese Zahlen leicht in die Ordnung schreiben, in welcher die Zahlen der Figur stehen.

§. 13. Das gedoppelte Factum der Theile entstehet auch, wenn man einen der Theile der Wurzel, den ersten wenn man will, gedoppelt nimt, und durch den andern Theil multipliciret, I, 96. und dieses wollen wir mehrerer Bequemlichkeit halben künftig beständig annehmen. In unserm Exempel ist dieses Factum 24, welches komt, wenn man den ersten Theil der Wurzel 4 gedoppelt nimt, und diese Zahl durch den andern Theil der Wurzel 3, multipliciret: $8 \times 3 = 24$.

§. 14. Auf eben die Art kan man auch die Quadratzahlen solcher Wurzeln machen, welche aus Zehnern und Einheiten bestehen, und diese sind es hauptsächlich, welcherwegen diese ganze Betrachtung von der Zusammensetzung der Quadrate aus den Theilen der Wurzel unternommen wird. Denn, es ist nicht nöthig zu lehren, wie eine Quadratwurzel, so nicht über 10 steiget, auszuziehen sey, weil dieses als etwas vor sich bekantes angenommen wird; wohl aber müssen Regeln gegeben werden, nach welchen die Wurzeln zu finden sind, welche über 10 steigen.

§. 15. Es sey die Zahl, deren Quadratzahl man haben will 87, welche aus den Theilen 80 und 7 zusammen gesetzet ist: so bestehet diese Quadratzahl:

1. Aus dem Quadrate des ersten Theils	6400
2. Aus dem Product der Theile gedoppelt	1120
3. Aus dem Quadrate des andern Theils	49
die Summe dieser Zahlen	7569

ist das gesuchte Quadrat von 87, wie dieses auch durch die Multiplication der Zahl 87 durch 87, gefunden wird.

§. 16. Ja selbst diese Multiplication weiset uns die angezeigte Zusammensetzung des Quadrats in diesem Falle. Man verfahre mit der Multiplication ordentlich:

87	87
87	87
7×7	49
7×80	560
80×7	560
80×80	6400
□87	7569

so bekomt man erstlich 49, das Quadrat von 7, so dann 560 das Factum aus 80 durch 7, ferner nochmals 560, das Factum aus 7 durch 80, und endlich 6400, die Quadratzahl von 80. Man darf nur die Multiplication nach den gemeinen Regeln verrichten, aber kein Factum im Anfang mit dem andern vermischen, sondern jedes besonders schreiben, wenn man dieses einsehen will.

§. 17. Eben so kan man auch das Quadrat einer Zahl finden, welche zwey Ziffern und am Ende 00 hat. Man mache erstlich das Quadrat der Ziffern selbst, wie eben gewiesen worden ist, und hänge so dann so viele paare von 00 an dasselbe, als viele einzelne 0 in der Wurzel vorkommen. Demnach ist das Quadrat von 870 die Zahl 756900, das Quadrat von 8700 ist die Zahl 75690000, und so weiter.

Die Quadratzahl einer Wurzel die mehr als zween Theile hat, zusammen zu setzen.

§. 18. Dieses wäre hinlänglich uns nunmehro zur Ausziehung solcher Quadratwurzeln zu leiten, welche nur aus zwey Ziffern bestehen. Allein weil die Regeln dazu auch in der allgemeinen Regel enthalten sind, nach welcher alle Wurzeln, aus wie vielen Ziffern sie auch bestehen mögen, zu erlangen sind: so wollen wir fortfahren zu weisen, wie die Quadrate von Zahlen, die mehrere Ziffern haben, entstehen.

§. 19. Es wird das Quadrat der Zahl 364 verlanget. Man nehme erstlich das Quadrat der ersten Ziffer derselben, 3 oder eigentlich 300, welches Quadrat ist: 9....
so dann das Product aus der ersten Ziffer gedoppelt, das ....
ist aus 600, in die nachfolgende 6 oder 60 = 36...
und das Quadrat dieser zweyten Ziffer 60 = 36..
so hat man das Quadrat aus 360, oder 36 Zehnern, welche man als den ersten Theil der Wurzel ansehen kan. ....
Will man nun weiter gehen, und das ganze Quadrat der Zahl 364 oder 360+4 machen, so muß man, zu dem bereits gemachten Quadrat den ersten Theil, 360 zwey mal genommen, in den zweyten, das ist 720 × 4 = 288.
und noch das Quadrat der letzten Ziffer 4 = 16
setzen: so ist die Summe von diesen Ziffern allen = 132496
das Quadrat von 364, welches man suchte.

§. 20.

§. 20. Wir wollen diese Zahlen noch einmal absetzen, damit wir sie aber etwas mehr in die Enge bringen, P allezeit den ersten Theil der Wurzel und p den zweyten bedeuten lassen, daß demnach $2P \times p$ nichts anders, als das Factum aus dem ersten Theil gedoppelt genommen und durch den zweyten multipliciret, wird bedeuten können. Ein q hingegen ans Ende einer Zahl oder an einen Buchstaben, welcher eine Zahl anzeiget, gesetzt, soll die Quadratzahl, von welcher jene die Wurzel ist, andeuten. Also wird durch $3q$ die Quadratzahl von 3, oder 9, ausgedrücket, durch Pq aber das Quadrat des ersten Theils einer Zahl, und durch pq das Quadrat des andern Theils eben derselben Zahl. Diesem zufolge kan man die Regel nach welcher die Quadratzahlen zusammen gesetzet werden III, 11. gar leicht ausdrücken, wenn man nur sagt, das Quadrat einer Zahl, welche in zwey Theile getheilet ist, bestehe aus $Pq + 2P \times p + pq$. Nach der angenommenen Bedeutung der Buchstaben P, p, q, kan diese kurze Bezeichnung nichts anders ausdrücken, als was in der Regel enthalten ist.

§. 21. Es sey nun nochmals das Quadrat aus 364 zu machen, so wird erstlich das Quadrat aus 36 Zehnern und hernach das Quadrat aus $360 + 4$ zu machen seyn III, 19. Dieses geschiehet folgender gestalt. Wenn man erstlich die Zahl 360 in zweye theilet, deren erstere 300 ist, und die zweyte 60, und so dann in der Zahl 364, vor den ersten Theil 360 und vor den zweyten 4 annimt: so ist

$$364q = \begin{cases} Pq = 360q = \begin{cases} Pq = 300q = & - & - & 9 \ldots \\ 2P \times p = 2 \times 300 \times 60 = & & & 36 \ldots \\ pq = 60q = & - & - & 36 \ldots \end{cases} \\ 2P \times p = 2 \times 360 \times 4 = & & & 288 \ldots \\ pq = 4q = & - & - & 16 \end{cases}$$

und folgends das gesuchte Quadrat - - 132496

§. 22. Es sind demnach die Zahlen, durch deren Addition die verlangte Quadratzahl gefunden wird, nachfolgende: Erstlich hat man 9, das Quadrat der ersten Ziffer 3 der gegebenen Wurzel 364. Zweytens das Factum aus dieser Ziffer zweymal genommen, durch die folgende 6, dieses ist 36. Drittens das Quadrat der zweyten Ziffer 6, das ist, wieder 36. Viertens das Factum aus der ersten und zweyten Ziffer 36 zweymal genommen durch die dritte, welches 288 ist. Fünftens das Quadrat der dritten Ziffer, 16.

§. 23. Und dieses ist eben der Anfang der Regel, nach welcher aus einer jeden Zahl, sie mag durch so viele Ziffern geschrieben seyn als man will,

eine Quadratzahl zu machen ist, und man darf nur nach eben den Gesetzen fortfahren, wenn man das Quadrat einer Zahl, die mit mehr als drey Ziffern geschrieben wird, machen will. Wir wollen dieses mit einem Exempel erläutern, ehe wir zu den Beweis schreiten.

§. 24. Es sey das Quadrat der Zahl 75342 zu machen, welche aus fünf Ziffern bestehet: so nehme man

1) Das Quadrat der ersten Ziffer, welches 49 ist.

2) Das Factum aus der ersten Ziffer gedoppelt, oder aus 14 durch die nachfolgende 5. Dieses Factum ist 70.

3) Das Quadrat der zweyten Ziffer 5, das ist 25.

4) Das Factum aus der ersten und andern Ziffer 75 gedoppelt, oder aus 150 durch die nächste dritte 3, welches ist 450.

5) Das Quadrat dieser dritten Ziffer 9.

6) Das Factum aus der ersten, zweyten und dritten Ziffer 753 gedoppelt, das ist das Factum aus 1506 durch die nächste 4, welche Multiplication 6024 bringet.

7) Das Quadrat der vierten Ziffer 4, welches 16 ist.

8) Das Factum aus der ersten, zweyten, dritten und vierten Ziffer 7534 gedoppelt, oder aus 15068, durch die nächste 2, da denn 30136 komt.

9) Das Quadrat der fünften Ziffer 2, welches 4 ist. Die also gefundene Producte sind richtig unter einander zu setzen, so nemlich, daß überall die Ordnungen der Einheiten, welche in denselben enthalten sind, in Acht genommen werden. Es ist dieses etwas leichtes; man darf, wenn man von dem ersten Quadrate anfängt, nur beständig das nächstfolgende Factum um eine Stelle weiter hinaus nach der rechten Hand rücken, und das nächste Quadrat wieder um eine Stelle weiter, so daß die Zahlen unter einander zu stehen kommen, wie hier sichtlich ist:

49.
70.
25.
450.
9.
6024.
16.
30136.
4

5676416964

Die Summe aller dieser Zahlen ist das gesuchte Quadrat der Zahl 57342, wel-

welches, wenn man will, auch durch die Multiplication derselben in sich selbst kan gefunden werden.

§. 25. Die Richtigkeit dieser allgemeinen Regel ist eben so einzusehen, wie wir oben III, 19. gefunden haben, auf was Weise das Quadrat einer Zahl, die nur aus drey Ziffern bestehet, gemacht werde. Man mache erstlich das Quadrat der zwey ersten Ziffern 75 der gegebenen Zahl 75342, welches geschiehet, wenn man III, 20. setzet 70=P, und 5=p, und machet:

$Pq=7q=$ - - - -	49..
$2P\times p=14\times 5=$ - - -	70.
$pq=5q=$ - - - -	25

Diese drey Zahlen machen das Quadrat von 75. Wenn man nun zu den vorigen zweyen 75 die dritte Ziffer der gegebenen Zahl 3 hinzu thut, und nunmehro setzet, P=75 oder eigentlich 750, und p=3, so hat man bereits Pq gefunden, und also nur noch zu machen:

$2P\times p=150\times 3=$ - - - -	450.
und $pq=3q=$ - - - - -	9

Und damit ist das Quadrat von 753 fertig, als welches der Summe aller bereits gefundenen Zahlen gleich ist. Um nun weiter fortzugehen, setze man nunmehro P=753 oder eigentlich 7530, und p=4, welches die nächstfolgende Ziffer in der gegebenen Wurzel ist, so hat man wieder in dem vorhergehenden bereits das Quadrat von Pq und hat also nur noch darzu zu setzen:

$2P\times p=1506\times 4=$ - - - -	6024.
und $pq=4q$ - - - - -	16

Damit ist das Quadrat von 7534 auch gemacht. Man setze zu diesen noch die letzte Ziffer der gegebenen Wurzel 2 hinzu, und mache nun P=7534, oder eigentlich 75340 und p=2, so ist wieder Pq die Summe der bereits gefundenen Ziffer, und wenn man demnach zu diesen noch hinzu thut:

$2P\times p=15068\times 2=$ - - - -	30136.
und $pq=2q=$ - - - - -	4

So hat man alle Theile des Quadrats 75340+2, das ist alle Theile des Quadrats der Zahl 75342, und man darf diese Theile nur in eine Summe zusammen ziehen, wenn dieses Quadrat würklich in einer Zahl dargestellet werden soll. Man siehet aber leicht, daß diese Theile des Quadrats nach der gegebenen Regel entstanden sind.

§. 26. Vielleicht komt einigen die Sache noch deutlicher vor, wenn wir

wir sie vermittelst der gegebenen Zeichen III, 20. kürzer ausdrücken, welches folgender gestalt geschehen kan:

$$
\begin{array}{l|l|l|l|l|l}
 & & & & & Pq=7q= 49 \\
 & & & & Pq=75q= & 2P.p=2.7.5= 7 \\
 & & & & & pq=5q= \quad . \\
 & & & Pq=753q= & & 2P.p=2.75.3= \quad . \quad . \\
 & & & & & pq=3q= \quad . \quad . \\
 & & Pq=7534q= & & & 2P.p=2.753.4= \quad . \quad . \\
 & & & & & pq=4q= \quad . \quad . \quad . \\
P^{q}=7534^{q}= & & & & & 2P.p=2.7534.2= \quad . \quad . \quad . \quad . \\
 & & & & & pq=2q= \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\hline
 & & & & & 56
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|l|l|l|l|}
.. & & & \\
0 & & & \\
25 & . & & \\
45 & 0. & & \\
.. & .9 & . & \\
.6 & 02 & 4. & \\
.. & .. & 16 & . \\
. & 30 & 13 & 6. \\
. & .. & .. & .4 \\
\hline
76 & 41 & 69 & 64
\end{array}
$$

§. 27. Nunmehro sind wir im Stande verständlich zu weisen, wie aus einem jeden gegebenem Quadrat die Wurzel zu erhalten ist. Es sey das Quadrat 132496 gegeben, welches wir oben III, 21. aus seiner Wurzel 364 gemacht haben. Wir setzen daß diese Wurzel unbekant sey, und daß man sie aus dem Quadrate erst finden solle. Zu dem Ende theilet man erstlich das vorgegebene Quadrat in Classen von zwo Ziffern von der rechten gegen die linke Hand, da denn die letzte Classe zur linken, wenn sichs so füget, auch nur eine Ziffer haben kan. Diese Abtheilung stehet also: 13|24|96|, und man erhält dadurch, daß man in einem Blick einsiehet, wo die Quadrate der Ziffer der Wurzel, welche man in das Quadrat der ganzen Zahl gebracht hat, anzutreffen sind, und wo ferner die Producte, welche außer diesen Quadraten darein gebracht werden musten, zu suchen sind.

§. 28. Nemlich an dem letzten Strich endiget sich mit der Ziffer 6 das Quadrat 16 der letzten Ziffer die Wurzel 4, und die erste Ziffer desselben 1 vermischet sich mit den übrigen. Dieses, wie alles folgende, kan man einsehen, wenn man sich nur die Rechnung vor Augen leget, nach welcher dieses Quadrat aus seiner Wurzel III, 21. gemacht worden ist. Es ist aber eben dieses auch leicht zu begreifen, wenn man bedenket, daß die letzte Ziffer der Wurzel einfache Einheiten bedeute, und demnach die Quadratzahl derselben ebenfals einfache Einheiten enthalten müsse. Das Quadrat der nächsten Ziffer der Wurzel 6, welches 36 ist, endiget sich bey der Ziffer 4, welche an dem zweyten Striche stehet, ist aber gar sehr mit den übrigen Producten vermischet. Daß es indessen sich hier endigen müsse, ist, außer der eben gedachten Rechnung, auch daraus zu ersehen,

daß

daß diese Ziffer 6 in der Wurzel Zehner bedeutet: denn hieraus folget, daß die Quadratzahl derselben 36 Hunderte bedeuten, oder eigentlich 3600 seyn müsse. III, 4. Eben so siehet man, daß das Quadrat der ersten Ziffer der Wurzel 3, welches 9 ist, sich in der ersten Abtheilung mit der letzten Ziffer derselben endige. Denn die erste Ziffer der Wurzel bedeutet hier Hunderte, oder ist eigentlich 300, und folgends das Quadrat davon 90000. Und also ist es mit allen Quadraten, der einzelnen Ziffer der Wurzel beschaffen.

§. 29. Da nun die Producte, welche außer den obgedachten Quadraten noch in das Quadrat einer Zahl müssen gebracht werden, allezeit um eine Ziffer weiter hinaus gegen die rechte zu gesetzt werden, so kan es nicht anders seyn, sie müssen bey dieser Eintheilung einer Quadratzahl sich allezeit an dem Theilungszeichen zur rechten Hand endigen, und von dannen, im Fall sie aus mehr als einer Ziffer bestehen, weiter nach der linken zu, zurücke gehen. So endiget sich in unserm Exempel das Factum aus 2 mal 3 durch 6 multipliciret oder 36 unter der 2, und das Factum aus 2 mal 36 durch 4, oder 288 unter der 9, und die übrige Ziffern derselben stehen von dannen weiter nach der linken Hand.

Die Wurzel aus einer Quadratzahl zu ziehen, die eine ganze Zahl ist.

§. 30. Nach dieser Vorbereitung wird die Ausziehung der Quadratwurzel folgender gestalt verrichtet. Man fänat dieselbe bey der ersten Classe zur linken Hand dadurch an, daß man die Wurzel eines solchen Quadrats nimt, welches unmittelbar kleiner ist, als die Ziffer dieser Classe. Dieses ist so gleich die erste Ziffer der gesuchten Wurzel. Die nächste und alle folgende werden durch eine Division gefunden, aber um jede neue Ziffer zu finden, muß man auch einen besondern Theiler haben. Und dieser Theiler ist allezeit doppelt so groß, als alle dasjenige, so an der Wurzel bereits gefunden worden ist, und wird demnach immer grösser und grösser, je weiter man im Ausziehen der Wurzel fortfähret. Außer dem aber ist die Ausziehung der Wurzel von der gemeinen Division darinnen unterschieden, daß man nach geschehener Division hier nicht nur das Product aus dem Theiler in den Quotienten, sondern noch über dieses das Quadrat des Quotienten, abziehen muß, nachdem dieses an seinem gehörigen Platz gesetzet worden. Dieses ist die erste Einleitung. Es wird alles deutlicher werden,

wenn wir die Regeln ordentlich aus einander setzen, und mit einem Exempel erläutern.

§. 31.

```
                13|24|96|364
                 9|
              ----
          6)   424|
               36.|
                36|
              ------
         72)   28 96|
               28 8.|
                  16|
              ------
                  0
```

1) Die Zahl 9 ist das Quadrat, welches unmittelbar kleiner ist als die Ziffer der ersten Classe 13, denn das nächste Quadrat 16 ist schon grösser. Jenes Quadrat wird von 13 abgezogen, und die übergebliebene 4 darunter bemerket, die Wurzel aber dieses Quadrats 9, welche 3 ist, wird als der erste Theil der gesuchten Wurzel des gegebenen Quadrats 132496, an der Stelle bemerket, wo man sonst bey der Division den Quotienten hinzuschreiben pflegt.

2) Nunmehro setze ich, um mich desto weniger zu verwirren, der übergebliebenen 4 die nächste Ziffer des Quadrats, welche die erste der folgenden Classe ist, bey, die mit der vorigen 42 giebt. Aus dieser 42 wird durch die Division der nächste Theil der Wurzel gebracht. Um aber diese Division zu verrichten

3) Multipliciret man dasjenige, so an der Wurzel bereits gefunden worden ist, als hier 3, durch 2, das Factum 6 ist der Theiler, welchen man an seiner Stelle neben der Zahl 42, die zu dividiren ist, antrift.

4) Nachdem dergestalt alles zur Division fertig gemacht ist, hat man nunmehro nur die angezeigte Zahl 42 durch den beygesetzten Theiler 6 zu dividiren. Der Quotient 6 ist die zweyte Ziffer der Wurzel, und wird neben die bereits gefundene erste, welche 3 war, gesetzet.

5) Nunmehro schreibt man unter die Zahl 42, welche man dividiret hat, das Product aus dem Quotienten in den Theiler, welches 36 ist. Ferner rücket man die nächste Ziffer des Quadrats, welche die letzte der zweyten Classe und hier 4 ist, herunter, und setzet unter dieselbe das Quadrat des letzt gefundenen Quotienten 6, das ist, 36, dergestalt, daß es sich unter dieser Ziffer endiget. So wohl das Quadrat als das Factum, welche man bloß in den Gedanken zusammen setzen kan, wird von den über ihnen

nen stehenden Ziffern abgezogen. Das Ueberbleibsel ist hier 28, so bemerket werden muß, und damit ist die zweyte Classe abgefertiget.

6) Mit der dritten Classe verfähret man nicht anders als mit der zweyten, nur ist hier wohl zu merken, daß nicht die einzelne letzte Ziffer der Wurzel 6 gedoppelt genommen den Theiler gebe, sondern daß alle dasjenige, so an der Wurzel bereits gefunden worden ist, gedoppelt genommen werden müsse, um den Theiler zu erhalten. Demnach ist hier der Theiler, durch welchen die nächste Ziffer der Wurzel gefunden wird, 36 gedoppelt, oder 72. Dieser Theiler stehet in dem Exempel an seinem gehörigen Ort, bey der Zahl, welche dividiret werden sol.

7) Diese Zahl aber ist hier wieder das Ueberbleibsel von den vorigen Classen, nemlich 28, mit beygesetzter ersten Ziffer der nächsten dritten Classe 9, und also 289. Die würkliche Division dieser 289 durch 72 bringt den Quotienten 4, welcher, als die dritte Ziffer der Wurzel, den vorigen bereits gefundenen beyzusetzen ist.

8) Nun wird wieder unter die Zahl, welche man dividiret hat, das Factum aus dem Theiler 72, und dem Quotienten 4 gesetzt. Dieses ist 288. Es wird die letzte Ziffer dieser dritten Classe, 6, ebenfals herunter gerückt, und unter dieselbe das Quadrat des letzten Quotienten 4 dergestalt geschrieben, daß es sich mit dieser Ziffer endiget So wohl das Quadrat, als das Product, wird von den darüberstehenden Ziffern weggenommen. In unserm Exempel bleibt nichts übrig, und dieses ist ein Zeichen, daß die gefundene Zahl 364, die wahrhafte Quadratwurzel der gegebenen sey.

§. 32. Man wird wohl thun, und dieses alles vollkommener einsehen, wenn man das vorgegebene und andere dergleichen Exempel, zu welchen man die Quadrate vorher nach der gegebenen Anweisung gefunden hat III. 24. selbst berechnet. Auf diese Art siehet man deutlich, wie die Zahlen, deren in den eben gegebenen Regeln Erwehnung geschehen ist, nach und nach herauskommen. Eben dieses ist in allen dergleichen Fällen zu bemerken. Nichts ist fähiger uns zu überzeugen, daß wir eine Regel vollkommen verstanden haben, als wenn wir uns im Stande sehen, dasjenige zu thun, so dieselbe haben wil; zu geschweigen daß man sich zu bestreben hat, eine Fertigkeit in Ausübung der Regeln zu erhalten, welche nicht anders, als durch eine wiederhohlte Uebung, kan erlanget werden.

§. 33. Wir wollen diese Arbeit zu befördern noch ein Exempel hieher setzen, wozu wir ein ebenfals oben III, 26. zusammen gesetztes Quadrat annehmen wollen:

	56	76	41	69	64	75342
	49	...	...	...	...	A
14)	7	76				
		70.	...	...	...	B
		25	...	...	...	C
150)		5	141			
			450.	...	...	D
			9	...	...	E
1506)			6326	9		
				6024.	...	F
				16	...	G
15068)			301364			
				30136.		H
				4		I
			000000			

Der erste Theil der Wurzel 7 ist hier wieder die Wurzel von dem Quadrat 49, welches der Ziffer der ersten Classe 56 am nächsten komt. Die Zahl, aus welchem die zweyte Ziffer der Wurzel durch die Division gebracht wird, ist 77, und der Theiler ist zwey mal so groß als der bereits gefundene Theil der Wurzel 7, und demnach 14: Also ist der zweyte Theil der Wurzel 5. Die Zahl aus deren Division die dritte Ziffer der Wurzel komt, ist 514, und der Theiler darzu zwey mal 75, oder 150, welcher den Quotienten 3 als die gesuchte dritte Ziffer gibt. Die Zahl, durch deren Division die vierte Ziffer der Wurzel gefunden wird, ist 6326 und der Theiler 1506, nemlich die bereits gefundene ersten drey Ziffern der Wurzel 753 gedoppelt genommen. Endlich ist die Zahl, durch deren Division der letzte Theil der Wurzel erhalten wird 30136, und der Theiler wieder zwey mal so viel als alle Ziffer der Wurzel, die bereits gefunden sind, oder 2×7534, welches 15068 machet. Es bleibet hier nach der letzten Subtraction wieder nichts übrig, also ist wieder die gefundene Zahl 75342 die richtige Wurzel, wie auch schon vorher aus der Zusammensetzung dieser Quadratzahl bekant ist.

§. 34. Die dieser Rechnung beygeschriebene Buchstaben werden uns dienen den Grund dieser Arbeit anzugeben, und zu zeigen, daß durch die vorgeschriebene Regeln allerdings die Wurzel des gegebenen Quadrats gefun-

funden werde, wiewohl dieses fast von selbst in die Augen leuchten muß, wenn man nur dasjenige, so von der Zusammensetzung der Quadratzahlen gelehret worden ist, im frischen Gedächtniß hat. III, 24. Ich weiß, daß in den Ziffern der ersten Classe das Quadrat des ersten Theils der Wurzel enthalten sey: aber auch, daß in diesen Ziffern noch andere Einheiten seyn können, welche von den nächstfolgenden Producten herüber gegangen sind. Es ist demnach die erste Ziffer der Wurzel 7, die Quadratwurzel der ersten Classe, oder eines Quadrats, als hier 49 welches unmittelbar kleiner ist. Diese Betrachtung giebt mir also den ersten Theil der Wurzel, deren Quadrat ich von den Ziffern der ersten Classe wegnehmen muß, weil es zur Ausziehung nichts weiter nützen kan, und wenn es da bliebe, nur dienen würde die nächstfolgende Theile des Quadrats, welche man doch aus einander setzen wil, damit man die Theile der Wurzel nach und nach erlange, mit fremden Zusätzen zu verwirren. Nach geschehener Subtraction also der Zahl bey A ist in der nächsten Ziffer der zweyten Classe, und den andern, welche von dannen weiter zur linken stehen, das ist, in unserm Exempel in 77, nichts als das Factum aus dem gefundenen Theil der Wurzel zwey mal genommen, und der nächsten Ziffer der Wurzel, 14×5 enthalten, außer noch einigen Einheiten, welche von den Producten und Quadraten, die weiter zur rechten stehen, hierüber gegangen sind. Wenn man demnach mit 14 dividiret, so kan nichts anders als die nächste Ziffer der Wurzel 5 zum Quotienten kommen. Man ziehet das Factum bey B, aus dem ersten Theil der Wurzel gedoppelt und dem Quotienten 5, ab; und weil mit der nächsten Ziffer die Zahl C, als das Quadrat dieses zweyten Theils der Wurzel, sich endiget, so subtrahiret man dieses Quadrat ebenfals, nachdem man, grösserer Deutlichkeit halben, die zweyte Ziffer der Classe, welche hier 6 ist, zu den vorhergehenden herunter gesetzet hat: weil doch diese beyde Zahlen bey Erfindung eines neuen Theils der Wurzel keinen weitern Nutzen schaffen können, und im Gegentheil, wenn sie da bleiben, das folgende verwirren würden. Weil nun also mit der ersten Ziffer der dritten Classe wiederum ein Factum aus den gefundenen zwo Ziffern der Wurzel gedoppelt durch die dritte multipliciret, sich endiget, und von dannen weiter nach der linken sich erstrecket, so ist klar, daß dieser dritte Theil der Wurzel wieder kommen müsse, wenn man die von den vorhergehenden Classen übergebliebene Ziffer, mit Beysetzung der ersten in der dritten Classe, durch dasjenige, so an der Wurzel allbereit gefunden worden ist, zwey mal genommen, dividiret. Mit Abziehung des Products und des Quadrats hat es alsdann die Bewandniß wie vorher, und so gehet es bis

ans Ende: daß wir nicht nöthig finden in dieser Betrachtung, welche ein jeder vor sich vollführen kan, weiter zu gehen.

§. 35. Man kan die Sache auch auf die Art einsehen. Wir haben die vorgelegte Quadratzahl, in ihre Theile A, B, C, D, E, F, G, H, I zergliedert, welche Theile, weil sie nach und nach von derselben abgezogen, endlich nichts übrig lassen, allerdings die gedachte Quadratzahl ausmachen, und ihr gleich sind. Man hat aber diese Theile von der Art angenommen als diejenige sind, aus welchen jede Quadrate, nach der bekanten Regel zusammen gesetzet werden:

A ist das Quadrat der ersten Ziffer 7.
B ist das Product aus jener gedoppelt durch die andere 5.
C ist das Quadrat dieser Ziffer 5.
D ist wieder das Product aus den ersten zwo Ziffern 75 gedoppelt durch die dritte 3.
E ist das Quadrat dieser dritten Ziffer 3.
F ist das Factum aus der ersten, zweyten und dritten Ziffer 753 gedoppelt, durch die vierte 4.
G ist das Quadrat dieser vierten Ziffer 4.
H ist abermal ein Factum aus der ersten, zweyten, dritten und vierten Ziffer 7534 gedoppelt, durch die fünfte 2.
I ist das Quadrat aus dieser fünften Ziffer: und hierbey ist überall die Ordnung der Einheiten, welche in allen diesen Quadraten und Producten vorkommen, gehörig beobachtet worden, wie aus der Rechnung sichtlich ist.

Demnach ist allerdings die Zahl, welche aus A, B, C, D, E, F, G, H, I, gehörig zusammen gesetzt ist, das richtige Quadrat der Zahl 75342. III, 24. Da nun also die gegebene Zahl 5676416964, aus den Theilen A, B, C, D, E, F, G, H, I bestehet, so muß dieselbe nothwendig das Quadrat der gefundenen Zahl 75342 seyn, und diese ist hinwiederum die Quadratwurzel von jener, welche man hat finden sollen.

Ganze Zahlen, deren Quadratwurzeln keine ganze Zahlen sind.

§. 36. Auf die Art wird die Wurzel einer jeden ganzen Zahl gefunden, wenn diese Wurzel ebenfals eine ganze Zahl ist. Aber nicht alle ganze Zahlen haben ganze Zahlen zu Wurzeln, und dieses ist leicht einzusehen.

Wenn

Wenn man die Quadrate der gemeinen Zahlen vor sich schreibt, 1, 4, 9, 16, 25, so findet man, daß zwischen jeden zweyen derselben noch andere ganze Zahlen fehlen. Zwischen 1 und 4 die 2 und 3, zwischen 4 und 9 die 5, 6, 7, 8, zwischen 9 und 16, die 10, 11, 12, 13, 14, 15, und also immer mehrere, je weiter man fortgehet. Diese Zahlen können unmöglich Wurzeln haben, die ebenfals ganze Zahlen wären. Denn die Wurzel von 3 zum Exempel, wenn sie eine ganze Zahl seyn solte, müste ohnstreitig grösser seyn als 1, die Wurzel von 1, und kleiner als 2, die Wurzel von 4, weil 3 zwischen diesen beyden Quadraten stehet. Nun giebt es keine ganze Zahl, welche grösser wäre als 1 und kleiner als 2. Demnach kan auch 3 keine Wurzel haben die eine ganze Zahl wäre. So ist es mit der 8, welche Zahl zwischen die Quadrate 4 und 9 fällt, es muß ihre Wurzel grösser seyn als die Wurzel von 4 welche 2 ist, und kleiner als die Wurzel von 9 welche 3 ist. Es ist aber keine ganze Zahl grösser als 2, und kleiner als 3, derowegen kan auch keine ganze Zahl die Wurzel von 8 abgeben.

§. 37. Indessen fallen zwischen jede zwo ganze Zahlen unendlich viele gebrochene. Zwischen 1 und 2 stehet die gebrochene Zahl $1\frac{1}{12}$, $1\frac{2}{12}$, $1\frac{3}{12}$, $1\frac{4}{12}$ und noch viele andere mehr, ja man mag derselben so viele geschrieben haben als man wil, so kan man doch immer mehrere und neue schreiben, welches eben dadurch angezeigt wird, wenn man saget, es fallen zwischen 1 und 2 unendlich viele gebrochene Zahlen. Solte nicht unter allen diesen Brüchen ein einziger die genaue Wurzel der Zahl 3 seyn, so, daß wenn er in sich selbst multipliciret wird, eben 3 und nicht mehr oder weniger kömt? Eben so fallen zwischen 2 und 3 unendlich viele Brüche, das ist, so viele daß man sie ohnmöglich alle schreiben, denken, oder aussprechen kan, und unter diesen sind $2\frac{1}{25}$, $2\frac{2}{25}$, $2\frac{3}{25}$, $2\frac{4}{25}$ ꝛc. $2\frac{1}{29}$, $2\frac{2}{29}$ ꝛc. solte nicht unter diesen allen ein einziger Bruch angetroffen werden können, welcher die genaue Wurzel von 8 wäre, und in sich selbst multipliciret eben die Zahl 8 brächte? So unglaublich es scheinen kan, daß unter so vielen Millionen Brüchen, nicht ein einziger die hier erforderte Grösse haben solte, so wird doch verneinet, daß ein Bruch angegeben, geschrieben oder ausgesprochen werden könne, welcher in sich selbst multipliciret, 3 oder 8 brächte.

§. 38. Die gemeine Division, da man den Quotienten in zehentheilichten Brüchen darzustellen bemühet ist, kan dieses einigermaßen erläutern. Wenn man 11 durch 9 dividiret, so ist der Quotient genau $1\frac{2}{9}$. Wil man aber zehentheilichte Brüche zum Quotienten haben, und fänget die Division an:

9) 11,000 | 1,222
2 22 |

so siehet man sogleich, daß man niemals ans Ende kommen, und den Quotienten durch dergleichen Brüche genau ausdrücken werde. Wir haben seinen Anfang gefunden, wir können ihn weiter fortführen, wenn wir nur an die gefundene Ziffer beständig 2 setzen, folgender gestalt 1,22222, aber es wird doch immer etwas fehlen, welchen Fehler man durch einen neuen Zusatz von 2 zwar kleiner machen, aber nicht gänzlich heben kan, man mag auch so viele 2 zusetzen, als man will. Gleichwie nun der Quotient $\frac{11}{9}$ oder $1\frac{2}{9}$ durch zehentheilichte Brüche unmöglich genau ausgedrückt werden kan; eben so kan auch die Quadratwurzel der Zahl 8, und vieler andern, weder durch einen zehentheilichten noch einen andern Bruch ausgedrückt werden. Dieses ist zu erweisen, und wir müssen zu dem Ende etwas von den Quadraten der Brüche voraussetzen.

§. 39. Das Quadrat eines Bruchs entstehet, wenn man den Bruch in sich selbst multipliciret, eben wie man eine ganze Zahl in sich selbst multipliciren muß, ihre Quadratzahl zu erlangen. Es sey das Quadrat des Bruchs $\frac{2}{3}$ zu machen, so habe ich $\frac{2}{3}$ durch $\frac{2}{3}$ zu multipliciren. Will ich dieses thun, so muß der Zehler 2 durch 2, oder durch sich selbst, multipliciret werden, und der Nenner 3 ebenfals durch sich selbst, oder durch 3. Und dieses ist die Weise ein Quadrat von einem Bruch zu machen. So wohl der Zehler als der Nenner muß in sich selbst multipliciret werden, oder man muß so wol die Quadratzahl des Zehlers, als auch hernach die Quadratzahl des Nenners machen, III, 1. Die erstere giebt den Zehler, die zweyte den Nenner des Bruchs ab, welcher das Quadrat des gegebenen ist. Das Quadrat von $\frac{4}{5}$ ist $\frac{16}{25}$, da 16 das Quadrat des Zehlers 4 ist, und 25 das Quadrat des Nenners 5.

§. 40. Es folget hieraus, daß, wenn man die Quadratwurzel von einem Bruch, als $\frac{16}{25}$, schaffen soll, man sowol aus dem Zehler 16, als aus dem Nenner 25 die Quadratwurzeln ausziehen müsse, welche Wurzeln den Zehler und den Nenner des verlangten Bruchs $\frac{4}{5}$ geben.

§. 41. Hat man aber eine Zahl, welche aus einer ganzen und einen Bruch zusammengesetzt ist, als $1\frac{9}{16}$, und man will die Quadratwurzel derselben haben, so thut man besten, wenn man dieselbe erstlich ganz in einen unächten Bruch verwandelt, als hier in $\frac{25}{16}$, und so dann die Ausziehung der Wurzel, wie eben gewiesen worden ist, verrichtet, indem man nemlich sowol von dem Zehler als auch von dem Nenner die Wurzel nimt; da denn in unserm Fall die gesuchte Wurzel des Bruchs $\frac{5}{4}$ oder $1\frac{1}{4}$ wird.

§. 42.

§. 42. Diese Anmerkung hat vor sich ihren Nutzen: zum Behuf des Beweises aber, welchen wir vorhaben, ist noch hinzuzufügen, daß das Quadrat eines ächten oder unächten Bruches, welcher mit den kleinsten Zahlen geschrieben ist, die ihn ausdrücken können, sich niemals zu einer kleinern Benennung bringen lasse. Zum Exempel $\frac{2}{3}$ ist mit den kleinsten Zahlen geschrieben, welche eben diesen Bruch ausdrücken können, und das Quadrat davon $\frac{4}{9}$ kan ebenfals nicht zu kleinern Benennungen gebracht werden. So ist auch mit $\frac{4}{3}$, von welchen das Quadrat $\frac{16}{9}$ ist. Der erste dieser Brüche läst sich nicht zu einer kleinern Benennung bringen, und auch der zweyte nicht; gleichwie auch weder $\frac{6}{35}$ noch sein Quadrat $\frac{36}{1225}$ zu kleinern Benennungen kan gebracht werden.

§. 43. Wir wollen diesen letzten Bruch bey dem Beweis als ein Beyspiel brauchen. Das Quadrat desselben ist ein Product der Wurzel durch sich selbst, das ist $\frac{6}{35} \times \frac{6}{35}$, oder $\frac{6 \times 6}{35 \times 35}$ III, 39. Man zerfälle den Nenner sowol als den Zehler der Wurzel in die einfache Zahlen, aus welchen sie zusammengesetzt sind, und schreibe an statt $\frac{6}{35}$ nunmehro $\frac{2 \times 3}{5 \times 7}$, so wird das Quadrat dieses Bruchs $\frac{2 \times 3 \times 2 \times 3}{5 \times 7 \times 5 \times 7} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 7 \times 7}$, und es können in dessen Zehler keine andere einfache Zahlen stehen, als diejenige, welche in dem Zehler der Wurzel vorkommen, und so ist es auch mit dem Nenner. Solte nun dieser Bruch $\frac{2 \times 2 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 7 \times 7}$ sich zu einer kleinern Benennung bringen lassen, so müsten einige der einfachen Zahlen, welche den Nenner des Bruchs ausmachen, auch in dem Zehler desselben vorkommen II, 105. Dieses aber ist bey dem, so wir angenommen haben, daß nemlich die Wurzel dieses Brnchs $\frac{2 \times 3}{5 \times 7}$ sich nicht zu einer kleinern Benennung bringen lasse, nicht möglich. Denn da in dem Zehler oder Nenner des Quadrats keine andere einfache Zahlen enthalten sind, als in dem Zehler oder Nenner der Wurzel, so müste eben die einfache Zahl, welche in dem Zehler und Nenner des Quadrats zugleich vorkomt, auch in dem Zehler und Nenner der Wurzel zugleich vorkommen, und es müste sich demnach die Wurzel zu einer kleinern Benennung bringen lassen. II, 104.

§. 44. Ist demnach die Wurzel ein eigentlicher Bruch, welcher sich

nicht in ganze Zahlen verwandeln läst, es mag nun derselbe ächt oder unächt seyn, oder es mag der Werth desselben kleiner oder gröſſer seyn als die ganze Einheit: so kan das Quadrat desselben unmöglich eine ganze Zahl seyn. Denn man drücke die Wurzel durch die kleinste Benennung aus, durch welche sie ausgedrücket werden kan, und mache daß Quadrat derselben, so ist bekant, daß, wenn dieses Quadrat sich in eine ganze Zahl verwandeln lassen soll, man dasselbe zu der kleinsten Benennung, die möglich ist, nemlich 1, müsse bringen können. II, 14. Nun aber läst sich dieses Quadrat gar nicht zu einer kleinern Benennung bringen, weil sich sonst auch die Wurzel durch eine noch kleinere Benennung ausdrücken ließe, also läst sich noch vielweniger das Quadrat zu der allerkleinsten Benennung 1 bringen. Die Quadratzahl des Bruchs $\frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{4}$, und diese $\frac{1}{4}$ können nicht in eine ganze Zahl, ohne anhängenden Bruch verwandelt werden. Sie betragen $6\frac{1}{4}$.

§. 45. Es ist demnach das Quadrat einer gebrochenen Zahl allezeit wieder eine gebrochene Zahl. Hieraus aber ist nunmehro gar leicht zu schlieſſen, daß, wenn eine ganze Zahl keine Wurzel hat, die auch eine ganze Zahl ist, ohnmöglich eine gebrochene Zahl angegeben werden könne, welche ihre wahre Wurzel abgeben könte. Wir nehmen zum Exempel, die Zahl 3. Wolte jemand setzen, die Wurzel davon wäre $1\frac{7}{10}$, oder welches eben das ist $\frac{17}{10}$, so würde man also schlieſſen können, um zu erweisen, daß dieser Bruch die Wurzel nicht seyn könne. Wenn $\frac{17}{10}$ die Wurzel wäre, so müste der Bruch $\frac{17}{10}$ in sich selbst multipliciret 3 bringen; das ist, das Quadrat einer gebrochenen Zahl $\frac{17}{10}$, müste eine ganze Zahl 3 seyn. Nun ist es unmöglich, daß das Quadrat einer gebrochenen Zahl eine ganze Zahl werde. Also ist es auch nicht an dem, daß $\frac{17}{10}$ die Wurzel von 3 sey.

§. 46. Man siehet leicht, daß man eben so bey einem jeden andern Bruch schlieſſen, und also darthun könne, daß keine von den gebrochenen Zahlen zwischen 1 und 2, welche nur genennet werden mag, die Wurzel von 3 sey; und eben so ist es mit allen übrigen ganzen Zahlen, deren Wurzeln in ganzen Zahlen nicht können gefunden werden. Wären ihre Wurzeln gebrochene Zahlen, so müsten sie auch selbst, gebrochene und keine ganze Zahlen seyn.

§. 47. Es ist also wohl keine Hofnung übrig, die Wurzeln von 3 und allen dergleichen Zahlen genau zu finden; denn wie will ich eine Zahl finden, welche weder geschrieben noch ausgesprochen werden kan? Aber es bleibt uns doch noch etwas bey der Sache zu thun übrig. Man kan eine Zahl finden, welche der Wurzel ziemlich nahe komt, daß ist, welche in

sich

sich selbst multipliciret nicht viel weniger als 3 bringt, dergleichen die Zahl 1,7 ist. Denn wenn man diese in sich selbst multipliciret, bekomt man das Quadrat 2, 89, welches eben von der 3 so gar sehr nicht abweichet, und man kan noch einen andern dergleichen zehentheilichten Bruch finden, welcher in sich selbst multipliciret, eine Zahl giebt, die der 3 noch näher komt, und wieder einen andern, welcher noch genauer ist, und so beständig fort: Ob man zwar niemals auf einen Bruch kommen wird, dessen Quadrat der Zahl 3, ohne einigen Abgang oder Ueberschuß, gleich wäre.

Wie man sich den Quadratwurzeln nähere, die nicht genau ausgedrücket werden können.

§. 48. Die Weise dergleichen Brüche zu finden, und sich der Wurzel einer jeden vorgegebenen Zahl, wenn sie nicht genau zu haben ist, so sehr zu nähern, als man nur will, ist gar leicht: und was eben gezeiget worden, wird dazu nicht weiter erfordert, als daß es uns alle vergebliche Hofnung benehme, jemals mit der Arbeit ans Ende zu kommen.

§. 49. Ich soll einen Bruch finden, welcher in sich selbst multipliciret die Zahl 3 mit einem so geringen Abgang bringet, als man will. So setze ich der Zahl so viele paare von oo bey, als ich denke genug zu seyn. Je mehr ich derer beysetze, desto genauer wird die Zahl, die ich heraus bringe. Ich setze zum Exempel, an statt der 3, die Zahl 3,000000, welche nicht mehr und nicht weniger als drey bedeutet, wie aus der Bezeichnung der Zahlen bekant ist. I, 41. Sodann ziehe ich die Wurzel bloß nach der gegebenen Regel III, 30. aus, da mir denn die erste Classe 3 ganze Einheiten in der Wurzel bringen wird, die nächste, Zehentheile, die folgende, Hunderttheile, und so ferner. Oder ich bekümmere mich im Anfang um die Ordnung der Einheiten, welche in der Wurzel kommen, gar nicht, und erwege nur nach vollbrachter Arbeit, daß von dem (,) als dem Ort der einzeln Einheiten an, bis an die letzte Ziffer der Wurzel, halb so viele Ziffern stehen müssen, als in dem Quadrat von dem (,) an, bis an die letzte Ziffer stehen, wie oben III, 5. ist erwiesen worden, und daß demnach in unserm Exempel das (,) in der Wurzel so gesetzt werden müsse, daß von demselben an bis ans Ende der Wurzel noch drey Ziffern stehen, weil in dem Quadrate 3,000000, derselben hinter dem (,) drey paare vorkommen. Die Rechnung selbst hat folgende Gestalt:

```
3|00|00|00| 1,732.
 1|
--
2) 200
   14.
    49|
   ---
34) 1100
   102.
      9|
   ----
346) 7100
    692.
       4|
   -----
     &c.
```

Die also gefundene Zahl 1,732 komt der Wurzel gar nahe. Ihr Quadrat ist:

2,999824, welches
von 3,000000 abgezogen

0,000176 läst, um welche die Zahl 3 grösser ist als das Quadrat dieser Zahl. Dieser Unterschied ist gar gering, und beträgt noch nicht zwey Zehentausendtheile der Einheit. Und doch hätte man noch näher kommen können, wenn man gleich Anfangs mehr 00 hinzu gesetzt hätte.

§. 50. Oder man kan nur die 00 nach und nach zu dem Ueberbleibenden setzen, ohne sie gleich Anfangs hinzuschreiben. Dieses komt auf eines hinaus, und man hat hiervon einige Bequemlichkeit, welche sich insonderheit äußert, wenn von einer großen Zahl eine Wurzel auszuziehen ist, und man nicht weiß, ob dieselbe eine Quadratzahl sey, und folgends eine Wurzel in ganzen Zahlen habe, oder nicht: In welchem Fall man nur die Ausziehung der Wurzel bis an die letzte Ziffer fortsetzen, und wenn nach der letzten Subtraction noch etwas übrig bleibt, diesem Ueberbleibsel eine Classe von 00 beyfügen, so dann aber die Arbeit fortführen kan, da denn die erste Classe der 00 in der Wurzel Zehentheile giebt. Findet man es nöthig, so kan man den Ziffern, die hier übrig geblieben, wieder eine Classe von 00 zusetzen, aus welchen so dann Hunderttheilchen kommen, und eben so erlangt man in der Wurzel die Tausendtheilchen, und die übrigen niedrigern Ordnungen der Einheiten, wenn man sie nöthig hat.

§. 51.

§. 51. Ein paar Exempel werden diese Sache klar machen. Erstlich wollen wir uns nochmals der Wurzel von 3 nähern:

```
3| 1,7320508
 1|
 ---
2)  200
    14
     49
    ----
34)  1100
     102
       9
    ----
346)  7100
      692
        4
    -----
3464)  17600
       00000
    -------
34640)  1760000
        173200
           25
    ---------
346410)  2797500
         0000000
    ----------
3464100)  279750000
          27712800
                64
    ----------
```

&c.

Nun sey eine Zahl zu finden, welche von der Wurzel der Zahl 465 nicht weit entfernet sey:

```
465|21,563858
 4 |
---
4)  65
    4
      1
    ---
42)  2400
     210
       25
    ----
430)  27500
      2580
        36
    -----
4312)  166400
       12936
           9
    -------
43126)  3703100
        345008
            64
    -------
431276)  25295600
         2156380
              25
    ---------
4312770)  373177500
          &c.
```

Die Wurzeln zehentheilichter Brüche.

§. 52. Eben so werden auch die Wurzeln der zehentheilichten Brüche gefunden. Nur hat man hier zu beobachten, daß, indem man die vorgegebene Zahl, aus welcher die Wurzel verlangt wird, theilet, III, 27. ein Theilungszeichen nothwendig durch das (,) welches den Ort der Einheiten bezeichnet, gehen müsse, sonst kan man nicht wissen, von welcher Ordnung die Einheiten sind, welche durch jede Ziffer der Wurzel bedeutet werden. Und es ist überhaupt nicht möglich, daß eine ungerade Zahl von Plätzen, die auf den Ort der einfachen Einheiten nach der Rechten zu folgen, solte gefället werden, wenn man eine Zahl, welche zehentheilichte Brü-

che

che enthält, in sich selbst multipliciret III, 5. Stehet demnach hinter dem Ort der einfachen Einheiten in einer dergleichen Zahl eine ungerade Zahl von Ziffern, so muß man dieselbe mit einer darzu geschriebenen o gerade machen. Denn es müssen alle Classen zwo Ziffern haben, außer der ersten zur linken Hand, welche auch nur eine haben kan. Es sey zum Exempel die Wurzel von 0,000729 zu schaffen, so theile ich diese Zahl in Classen, 0, |00|07|29, fange so dann von der dritten Classe an, weil die erstern in der That nichts geben, und fahre mit Ausziehung der Wurzel fort, wie in der beystehenden Rechnung:

```
   7|29|27
    4
  ----
4) 3 29
   2 8
     49
   ----
      0
```

Demnach sind 27 die Ziffer der Wurzel, welche man gehörig setzen wird, wenn man bedenket, daß in dem Quadrate von dem Ort der Einheiten an bis ans Ende 6 Ziffer stehen, und folgends in der Wurzel hinter dem (,) drey Ziffer zu stehen kommen müssen, III, 5. wodurch die Wurzel wird 0,027, und dieses zwar in dem gegenwärtigen Exempel genau, weil nach der letzten Subtraction nichts übrig geblieben ist.

§. 53. Endlich sey noch die Wurzel von 0,006 so genau als es nöthig seyn möchte, zu schaffen. Weil hier hinter dem Ort der einfachen Einheiten nur 3 Ziffer stehen, und die Eintheilung in Classen nicht so geschehen kan, daß eine Theilung in das (,) fiele, so setze ich noch eine o ans Ende, und theile so dann, also: 0,|00|60|. Es wird nunmehro bloß die Wurzel von 60 gesucht, denn die vorhergehende 00 geben nichts; und stehet hierzu die Rechnung dergestalt:

```
  60| 7745
  49|
  ---
 491
 ---
14) 1100
     98
     49
    ---
154) 7100
     616
      16
     ---
1548) 92400
      &c.
```

Hier

Hier stehen in der gegebenen Zahl 0,0060 hinter dem Ort der Einheiten vier Ziffer, und drey Classen von Ziffern sind in der Rechnung darzu gekommen, welche mit den vorigen vier Ziffern oder zwo Classen in allen fünf Classen, oder paare von Ziffern, ausmachen, so in dem Quadrat hinter dem Ort der einfachen und ganzen Einheiten stehen. Eben so viele einzelne Ziffern müssen in der Wurzel hinter dem (,) stehen, daß demnach die eigentliche Wurzel, oder vielmehr die Zahl, welche an statt der wahren Wurzel, als derselben genugsam nahe, gefunden worden, diese ist 0,007745, welche in sich selbst multipliciret, giebt: 0,0059985025
so von der gegebenen Zahl 0,0060000000
nur um 0,0000014975 unterschieden ist, welcher Unterschied kleiner ist als anderthalb millionste Theilchen der Einheit.

Irrationalzahlen.

§. 54. Uebrigens nennet man die Quadratwurzeln solcher ganzen Zahlen, welche nicht selbst ganze Zahlen sind, und alle dergleichen Zahlen, welche nicht ausgesprochen werden können, **Irrationalzahlen**, und man könte sie im Teutschen gar wohl **unaussprechliche** Zahlen nennen. Dergleichen ist die Quadratwurzel von 3. Man kan sich derselben nähern, wie wir gesehen haben. III, 51. 1,7 ist von dieser Wurzel so gar sehr nicht entfernet, 1,73 komt ihr noch näher, und noch weniger fehlet 1,732 oder 1,7320; wieder weniger 1,73205, und weniger als diese Zahlen alle weichet 1,7320508 von dieser Wurzel ab. Wolte man in der Ausziehung der Wurzel noch weiter fortfahren, so kämen noch immer Ziffern zu den vorigen hinzu, welche den Fehler verminderten, aber niemals wird man die Wurzel genau bekommen: es wäre denn, daß man in dieser Arbeit ohne Ende fortfahren könte. Denn so bald als man aufhört, und dasjenige, so man gefunden hat, vor die wahre Wurzel hält, so fehlet man. III, 38. Das man aber in Ausziehung der Wurzel ohne Ende fortfahre, ist unmöglich; indessen leitet uns dieses noch zu einem andern Begrif von diesen Zahlen.

§. 55. Man kan sie nemlich als Brüche ansehen, deren Nenner unendlich groß ist, und also anzeiget, daß man die Einheit in unendlich kleine Theile theilen müsse. Deswegen ist der Bruch 1,7320508 oder $\frac{17320508}{10000000}$, der Wurzel von 3 ziemlich nahe, weil der Nenner desselben groß ist, nemlich

lich zehen Millionen. Aber weil er eigentlich noch undenklich grösser seyn müste, wenn er die Grösse der Theilchen, aus welchen die Wurzel von 3 zusammen gesetzt werden kan, genau ausdrücken solte: so fehlet er noch in etwas. Nemlich gleichwie sich der Bruch $\frac{11}{9} = 1,22222$ &c. nicht anders durch zehentheilichte Brüche ausdrücken läst, als wenn man die Einheit ohne Ende theilet, III, 38. also lassen sich dergleichen Wurzeln durch gar keinen Bruch anzeigen: es müste denn seyn, daß man den Nenner desselben ebenfals ohne Ende vergrössern, und dadurch die Einheit ohne Ende theilen könte. Aber gleichwie man deswegen 1,222... und immerfort 2, auf eine andere Weise leicht darstellen kan, weil dasselbe nicht mehr und nicht weniger ist als $\frac{11}{9}$; also kan man auch Grössen, die durch Irrationalzahlen ausgedrückt werden, darstellen, wenn man alle ihre Theilchen auf einmal, und ohne sie von einander abzusondern, angiebt, wie dieses in der Geometrie geschiehet.

Begriffe von den Cubiczahlen.

§. 56. Wenn man eine Zahl durch ihr eigenes Quadrat multiplicirt, wird sie eine **Cubiczahl**, welche auch zuweilen ein **Cubus** genennet wird. Man beziehet diese auf diejenige Zahl, welche in ihr eigenes Quadrat multipliciret, die Cubiczahl herausbringt, und nennet sie die Cubiczahl derselben. Die Zahl im Gegentheil, welche durch ihr Quadrat multipliciret, die Cubiczahl herausgebracht hat, wird dieser Cubiczahl ihre **Cubicwurzel** genennet. Das Quadrat von 3 ist 9; multipliciret man demnach 3 durch 9, so wird das Product 27, die Cubiczahl von 3; und die Zahl 3 ist die Cubicwurzel von 27. So ist es mit allen übrigen Zahlen. Man kan aus jeder derselben eine Cubiczahl machen. Denn man kan sie in sich selbst multipliciren, und auf die Art ihre Quadratzahl herausbringen, und was hindert, daß man diese Quadratzahl nicht noch einmal durch die Zahl welche zuerst angenommen worden ist, multiplicire? Wil man eine Cubiczahl aus 23 machen, so mache man von 23 erstlich die Quadratzahl 529, multiplicire diese Zahl wieder durch 23, das Quadrat nemlich duch seiner Quadratwurzel, das Factum 23×529 welches ist 12167, ist die Cubiczahl von 23, und diese 23 ist die Cubicwurzel von jener 12167.

§. 57. Also hat wohl die Verfertigung der Cubiczahlen eben so wenige Schwierigkeit, als die Verfertigung der Quadratzahlen. Ganz was anders aber ist es, wenn man die Aufgabe umkehret, eine Cubiczahl angiebet, und verlangt, daß ihre Wurzel angezeiget werden soll. Die bloße

Division oder eine jede andere einfache Rechnungsart, kan, diese Wurzel zu erfinden, eben so wenig hinlänglich seyn, als wenig dieselbe die Quadratwurzel herauszubringen vermögend war, III, 2. Man müste denn durch wiederhohlte Versuche verfahren wollen, und wenn man zum Exempel die Wurzel von 12167 schaffen solte, so lang verschiedene Zahlen probieren, bis man auf eine käme, welche durch ihre Quadratzahl multiplicirt, eben 12167 herausbrächte; oder welche, wenn man durch dieselbe die vorgegebene Zahl dividirte, zum Quotienten das Quadrat des Theilers brächte, wie hier geschiehet, wenn man mit 23 dividiret, da der Quotient 529 die Quadratzahl des Theilers 23 ist.

§. 58. In der That kan man die Cubicwurzeln, welche nicht über 9 steigen, nicht anders als auf diese Weise finden. Man machet nemlich die Cubiczahlen von allen Zahlen bis auf 9, und schreibet sie vor sich, so ist man so gleich im Stande, wenn eine oder die andere dieser Cubiczahlen gegeben wird, die Wurzel davon anzuzeigen; denn dieselbe stehet in einer dergleichen Tafel bey der Cubiczahl. Hier sind diese Cubiczahlen alle mit ihren Wurzeln über ihnen:

Cubicwurzeln:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
Cubiczahlen:	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729.

§. 59. Damit man aber einsehen könne, wie auch die Wurzeln zu erhalten sind, welche aus mehr als einer Ziffer bestehen, so müssen wir auch hier vor allen Dingen untersuchen, wie eine Cubiczahl, und die verschiedene Ziffer derselben, aus den Ziffern ihrer Wurzel entstehen, und wie diese Ziffer in jene nach und nach verwickelt werden. Der Nutzen von dieser Erkänntniß kan nunmehro nicht verborgen seyn, nachdem wir ihn bey der Quadratrechnung so deutlich gespüret haben: wir werden uns also ohne Aufschub zur Sache selbst wenden können.

Wie die Cubiczahl einer zweytheilichten Wurzel zusammen gesetzet wird.

§. 60. Es entstehet aber eine Cubiczahl aus einer Wurzel, welche in zwey Theile nach Belieben getheilet ist, nachfolgender massen. Die Cubiczahl hat acht Theile, und diese sind:

1) Die Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel.

2) Das Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel in den zweyten Theil derselben multipliciret. Dergleichen Producte hat man

dreye,

dreye, und diese, mit der erst genanten Cubiczahl, machen vier Theile.

3) Das Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils der Wurzel durch den ersten Theil multipliciret. Dergleichen Producte sind in der Cubiczahl wieder dreye, und diese machen mit den vorigen vier Theilen derer sieben aus. Endlich ist der achte Theil

4) Die Cubiczahl des zweyten Theils der Wurzel.

Daß demnach der Cubus einer Zahl, welche aus zweyen Theilen wie man wil zusammen gesetzt ist, zum Exempel der Cubus der Zahl 6, welche aus den Theilen 4 und 2 bestehet, heraus komt, wenn man nimt:

1) Die Cubiczahl von 4, welche 64 ist.

2) Das Factum aus 16, dem Quadrat des ersten Theils 4 durch den zweyten Theil 2 multipliciret, wodurch 32 komt. Dieses Factum wird drey mal gesetzet.

3) Das Factum aus 4, dem Quadrat des zweyten Theils durch den ersten Theil 4 multipliciret, welche Multiplication 16 giebt. Dieses Factum wird wieder drey mal gesetzet.

4) Die Cubiczahl des zweyten Theils welche 8 ist. Dieses alles zusammen genommen

64
32
32
32
16
16
16
8

bringt . . . . . 216, . . . welche Zahl die richtige Cubiczahl von 6 ist, wie man aus dem Täfelchen der Cubiczahlen sehen kan.

§. 61. Auch siehet man leicht, daß sich die angegebene acht Theile auf viere bringen lassen, wenn man gleich anfangs das zum zweyten gesetzte Factum drey mal nimt, und eben so auch mit dem andern Product verfähret. Geschiehet dieses, so wird die Cubiczahl, welche wir eben gemacht haben aus nachfolgenden vier Theilen zusammen gesetzt:

1) Aus der Cubiczahl des ersten Theils	64
2) Aus dem Product von dem Quadrat des ersten Theils in dem zweyten, drey mal	96
3) Aus dem Product von dem Quadrat des zweyten Theils in dem ersten, drey mal	48
4) Aus der Cubiczahl des zweyten Theils	8
Die Summe ist wie vorher	216

Der zweyte Theil der Cubiczahl, nemlich das Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel durch den zweyten multipliciret, und so dann drey mal genommen, komt auch, wenn man zuerst das Quadrat des ersten Theils drey mal nimt, und dieses Factum so dann durch den zweyten Theil multipliciret. Das Quadrat des ersten Theils ist 16, dieses drey mal giebt 48, und dieses ferner durch den andern Theil 2 multipliciret bringt 96: und eben so komt auch der dritte Theil der Cubiczahl, wenn man das Quadrat des zweyten Theils drey mal nimt, und dieses Factum so dann durch den ersten Theil multipliciret.

§. 62. Demnach kan man dasjenige so eben gesagt worden ist, mit etwas wenig veränderten Worten, auch also ausdrücken: Die Cubiczahl einer Wurzel, die aus zweyen Theilen bestehet, ist zusammen gesetzt.

1) Aus der Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel.

2) Aus dem Product von dem Quadrat des ersten Theils drey mal genommen, durch den zweyten Theil.

3) Aus dem Product von dem Quadrat des zweyten Theils drey mal genommen, durch den ersten Theil.

4) Aus der Cubiczahl des zweyten Theils der Wurzel.

§. 63. Es ist vielleicht unnöthig zu erinnern, daß, wenn wir sagen, das Quadrat des ersten (oder zweyten) Theils drey mal genommen, müsse durch den zweyten (ersten) Theil multipliciret werden, wir nicht verstehen wollen, daß derselbe Theil drey mal genommen, so dann das Quadrat von diesem Product gemacht, und dieses Quadrat in den andern Theil multipliciret werden müsse; denn auf diese Art würde zu viel kommen, und in unserm Exempel würde vor den zweyten Theil auf die Art gefunden werden 144 × 2, oder 288 an statt 96; sondern man muß erstlich das Quadrat machen, dieses so dann durch drey, und ferner das hieraus entstehende Factum durch den andern Theil der Wurzel, multipliciren.

§. 64. Den Beweiß von dieser Zusammensetzung kan man sich sehr deutlich vorstellen, wenn man sich Würfel von Holz machen läst, und dieselbe nach der Anweisung, die wir so gleich geben wollen, zusammen se-

tzet. Man kan deren mit geringen Kosten eine große Menge bekommen, aber an 125, der Cubiczahl von 5, hat man genug. Diese Würfel sind als Einheiten und nicht anders anzusehen, und wir erwehlen bloß deswegen diese Figur, weil die Würfel sich am bequemsten zusammen setzen lassen, da man außerdem auch Kugeln, oder Cörperchen von einer jeden andern Figur, brauchen könte.

Fig. 22. §. 65. Man setze nunmehro aus diesen Einheiten eine Zahl zusammen, was man vor eine will, AB, und theile dieselbe in zwey Theile in C; man multiplicire sie ferner in sich selbst, damit man ihre Quadratzahl ABEFD erhalte, welche man hier eben so wie vorher bey den Quadratzahlen geschehen ist, III, 8. in ihre vier Theile, DC das Quadrat des ersten Theils, CE und DF die Producte aus den Theilen, und EF, das Quadrat des zweyten Theils, theilen muß. Dieses ist die erste Arbeit, welche man vorzunehmen hat, wenn man aus einer gegebenen Zahl ihre Cubiczahl machen will. Das also formirte Quadrat ist nun ferner durch die Wurzel zu multipliciren, damit die Cubiczahl herauskomme, und dieses geschiehet am füglichsten, wenn man über ein solches Quadrat ein anders setzet, und so schichtweise Quadrate über einander zu ordnen fortfähret, bis man derselben so viel über einander hat, als viele Einheiten in der Wurzel sind. Denn wenn dieses geschehen ist, so ist klar, daß das erste Quadrat durch seine Quadratwurzel multipliciret, und folgends die Cubiczahl von eben der Wurzel gemacht worden sey.

§. 66. Damit man aber die acht Theile, die wir hernach auf viere gebracht haben III, 60. in der Cubiczahl erhalte, muß man in dieser Multiplication absetzen, so bald man der Quadrate so viele über einander geordnet hat, als viele Einheiten in dem ersten Theil der Wurzel sind, und so denn ferner eben diese Quadrate so oft auf einander bringen, als oftmals die Einheit in dem zweyten Theil der Wurzel enthalten ist. Es wird, wenn das Quadrat durch den ersten Theil der Wurzel multipliciret wird, das Product so stehen, wie die 23 Figur weiset.

1) Stehet bey A die Cubiczahl 27 des ersten Theils der Wurzel 3.

2) Bey B stehet ein Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel 3, durch den zweyten Theil 2. Dieses siehet man, wenn man das Factum B erstlich auf seiner linken Seite betrachtet, da das Quadrat zum Vorschein komt, so dann aber oben oder forne, allwo es sich zeiget, wie dasselbe durch den zweyten Theil der Wurzel multipliciret ist.

3) Bey C stehet noch ein dergleichen Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel durch den zweyten Theil derselben. Man siehet

dieses, wenn man das Factum bey C erstlich von forne, so dann auf der Seite oder oben betrachtet. Denn das Quadrat stehet forne aufrecht, und ist in unserm Exempel zweymal hinter einander gesetzt, oder durch den zweyten Theil der Wurzel 2 multipliciret.

4) Endlich stehet bey D ein Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils der Wurzel in dem ersten Theil derselben; und dieses einzusehen, darf man nur dieses Factum erstlich oben betrachten, da das Quadrat stehet, und so dann die Seiten ansehen, da es sich weiset, wie dieses Quadrat multipliciret worden.

§. 67. Wir verstehen aber hier eine Betrachtung, nicht die bloß mit den Augen geschiehet, denn diese kan uns aufs höchste zeigen, daß in dem vorliegenden Fall die Sache richtig sey; sondern wir wollen, daß man sich besinne, wie diese Theile alle aus der Multiplication entstanden sind, und die Figur soll uns dieses Nachdenken bloß einiger maßen erleichtern. Thun wir dieses, so werden wir bald sehen, daß dasjenige, so die Figur nur bey einer Zahl weisen kan, von allen überhaupt seine Richtigkeit habe.

§. 68. Nun müssen wir in der Zusammensetzung unserer Cubiczahl fortfahren. Wir haben das Quadrat der Wurzel durch den ersten Theil derselben multipliciret, nun müssen wir es noch durch ihren zweyten Theil multipliciren, und was hier komt zu den vorigen setzen, damit wir die ganze Cubiczahl, welche wir machen sollen, erlangen. Wenn diese Multiplication mit unsern Einheiten verrichtet wird, stehet das Factum wie in der 24 Figur, und es bestehet dasselbe wieder aus vier Theilen, welche zu den bereits oben gefundenen gesetzt werden müssen. Es stehet nemlich

5) Bey E ein Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel durch den zweyten Theil derselben. Man sehe dieses Factum erst oben an, da das Quadrat stehet, so dann an den Seiten, da sich zeiget, wie oft dieses Quadrat genommen worden ist.

6) Bey F stehet ein Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils durch den ersten Theil der Wurzel, welches sich deutlich zeiget, wenn man dieses Factum erstlich von forne, und so dann von oben und von der Seite betrachtet.

7) Stehet bey G noch ein dergleichen Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils, welches zur linken stehet, durch den erstern Theil, welche Multiplication oben und von forne sichtlich ist; und endlich

8) Ist bey H die Cubiczahl des zweyten Theils der Wurzel anzutreffen.

§. 69.

§. 69. Nach diesem Satz lässet sich nunmehro aus einer jeden Zahl, welche aus Zehnern und Einheiten bestehet, von welcher Ordnung diese auch seyn mögen, eine Cubiczahl zusammen setzen. Nur ist dazu noch das folgende anzumerken. Wenn eine Ziffer am Ende eine o hat, und man will aus derselben eine Cubiczahl machen, so müssen der Cubiczahl der Ziffer am Ende drey ooo angehänget werden: wenn die Wurzel am Ende zwo oo hat, so kommen in die Cubiczahl am Ende sechs oo, und überhaupt stehen in der Cubiczahl einer Ziffer drey mal so viele oo hinten nach, als viele derselben in der Wurzel anzutreffen sind. Die Cubiczahl von 2 ist 8, die Cubiczahl von 20 ist 8000, die Cubiczahl von 200 ist 8000000, und so weiter. Dieses siehet man aus der Multiplication so deutlich, daß wir nicht nöthig finden, uns länger dabey aufzuhalten.

§. 70. Es sey nunmehro die Cubiczahl von 57, oder von 50+7 zu machen, so nehme man nach der Regel:

1) Die Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel 50, welche ist	125000
2) Das Factum aus dem Quadrat 2500, des ersten Theils 50 drey mal, durch den zweyten Theil 7	52500
3) Das Factum aus dem Quadrat 49, des zweyten Theils 7 drey mal, durch den ersten Theil 50	7350
4) Die Cubiczahl des zweyten Theils der Wurzel 7	343
Die Summe hiervon ist die gesuchte Cubiczahl.	185193

§. 71. Man siehet hieraus zugleich, wie sich die angegebene Theile einer Cubiczahl, die aus Zehnern und Einheiten bestehet, in diese verwickeln. Die Cubiczahl der ersten Ziffer, welche Zehner bedeutet, nemlich 125, bedeutet tausende, oder hat drey ooo hinter sich stehen. Es komt also die letzte Ziffer derselben 5, an die vierte Stelle von dem Orte der einfachen Einheiten nach der linken zu, zu stehen, da sie sich mit andern Ziffern, die ebenfals an diesen Ort herüber kommen, in der Addition vermischet: und von dannen stehet der Cubus 125 weiter nach der linken, aber nicht über drey Ziffer, weil keine Cubiczahl einer einzeln Ziffer aus mehr als drey Ziffern bestehet, III,58. So dann endiget sich das Factum aus dem Quadrat des ersten Theils drey mal genommen in die folgende 7 multipliciret, in der nächsten Stelle zur rechten, und stehet von dannen weiter nach der linken zu. Daß es sich daselbst endiget, siehet man daraus, weil das Quadrat der ersten Ziffer, zwo oo haben muß, indem diese erste Ziffer Zehner bedeutet,

und

und diese zwo oo bleiben in allen nachfolgenden Multiplicationen, welche gemacht werden müssen, unverändert. Ferner endiget sich das Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils drey mal genommen, durch den ersten Theil der Wurzel multipliciret, mit der folgenden Stelle, weil es Zehner bedeutet. Denn dieses Quadrat enthält einfache Einheiten, welche von der Art bleiben, wenn sie durch 3 multipliciret werden, aber zu Zehnern erwachsen, oder eine o bekommen, so bald sie durch die erste Ziffer der Wurzel multipliciret werden, als welche Zehner enthält. Endlich endiget sich die Cubiczahl des zweyten Theils der Wurzel an dem Ort der einfachen Einheiten, und gehet niemals über denselben weiter nach der rechten zu, wie dieses leicht einzusehen ist.

§. 72. Läst man die letzte Ziffer der Wurzel 7, nicht einfache Einheiten, sondern Einheiten von der ersten höhern Ordnung oder Zehner bedeuten, so wird noch alles wie vorhin, nur müssen am Ende, der auf die Art gefundenen Cubiczahl, drey ooo angehänget werden, weil vor jede o, die der Wurzel angefüget wird, die Cubiczahl am Ende drey ooo bekomt. Da also die Cubiczahl von 57 ist 185193, so ist die Cubiczahl von 570 folgende: 185193000, die von 5700 die nachstehende 185193000000, und so weiter.

Wie die Cubiczahl einer Wurzel zusammen gesetzet wird, die mehr als zween Theile hat.

§. 73. Vermittelst dieser Regel kan man nunmehro weiter gehen, und einsehen, daß, wenn von einer jeden gegebenen Wurzel als 75328 eine Cubiczahl zu machen ist, man nehmen müsse:

1) Die Cubiczahl der ersten Ziffer 7, A

2) Das Factum aus dem Quadrat dieser Ziffer 7 drey mal, durch die nächste 5. B

3) Das Factum aus dem Quadrat der zweyten Ziffer 5, drey mal genommen, durch die erste 7. C

4) Die Cubiczahl der zweyten Ziffer 5. D

5) Das Factum aus dem Quadrat der ersten und zweyten Ziffer 75 drey mal, durch die dritte Ziffer 3. E

6) Das Factum aus dem Quadrat der dritten Ziffer 3 drey mal genommen durch die ersten zwey 75. F

7) Die Cubiczahl der dritten Ziffer 3. G

8) Das

8) Das Factum aus dem Quadrat der ersten, zweyten und dritten Ziffer 753 drey mal genommen durch die vierte 2. . H

9) Das Factum aus dem Quadrat der vierten Ziffer 2 drey mal genommen, durch die ersten drey, 753. . . I

10) Die Cubiczahl der vierten Ziffer 2. . K

11) Das Factum aus dem Quadrat der ersten, zweyten, dritten und vierten Ziffer 7532 drey mal genommen in die fünfte 8. . L

12) Das Factum aus dem Quadrat der fünften Ziffer 8 drey mal genommen, durch die erstern viere 7532. . . M

13) Die Cubiczahl der fünften Ziffer 8. . . N

Und so immer fort nach eben den Gesetzen, wenn die Wurzel aus mehr als fünf Ziffern bestehet.

§. 74. Wir wollen diese Zahlen alle in der Ordnung hieher setzen, und mit eben den Buchstaben bezeichnen, mit welchen wir sie erst benennet haben, damit man, nach Anweisung desjenigen so eben gesagt worden ist, nachrechnen, und sich überzeugen könne, daß man die Weise, diese Producte zu machen, richtig eingesehen habe.

A	- - -	343	.		
B	- - -	73	5.		
C	- - - -	5	25.		
D	- - -		125	.	
E	- - -	5	062	5.	
F	- - -		20	25.	
G	- - - -		- -	27.	
H	- - -		340	205	4.
I	- - -		-	90	36.
K	- - -		-	-	8.
L	- - -		136	154	457	6.
M	- - -		-	14	461	44.
N	- - -		-	-	-	512
Die Summe hievon		427	434	241	687	552

ist die Cubiczahl der gegebenen Wurzel 75328, welche man machen solte; welche auch durch eine zweyfache Multiplication, da man nemlich erstlich 75328 in sich selbst, und dieses Quadrat ferner durch eben die Zahl 75328 multipliciret, erhalten werden kan.

§. 75. Daß aber auf die Art jederzeit der richtige Cubus einer aus vielen Ziffern bestehenden Zahl gefunden werde, wird man einsehen, wenn man nur alles, was hier gemacht worden ist, nach der oben gegebenen Regel, vor eine zweytheilichte Wurzel, III, 62. prüfet. Die Zahl bey A, welche die Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel 7 ist, mit dem Product bey B, dem bey C, und der Cubiczahl des zweyten Theils der Wurzel 5 bey D, machen zusammen die Cubiczahl dieser zwey Ziffer 75 aus, das ist: A+B+C+D ist die Cubiczahl von 75.

Diese Cubiczahl aber von 75, das Factum bey E, das ist das Quadrat von 75 drey mal durch die nächste Ziffer 3, und das Factum bey F, oder das Quadrat von dieser 3, dreymal, durch 75, und endlich die Cubiczahl bey G von eben dieser Ziffer 3, machen die Cubiczahl von 750+3, oder 753. Demnach da die erste Cubiczahl von 75, deren Zahlen A+B+C+D gleich war, so bestehet diese Cubiczahl von 753, aus der Summe der Zahlen A+B+C+D+E+F+G.

Wiederum giebt diese Cubiczahl von 753 zusamt der Zahl bey H, welche das Factum ist aus dem Quadrat von 753 drey mal genommen durch 2, und dem Producte bey I, aus dem Quadrat der Zahl 2 drey mal genommen in 753, mit der Cubiczahl von dieser 2 bey K, die Cubiczahl von 7532. Da nun also die Cubiczahl von 753 denen Zahlen A+B+C+D+E+F+G gleich war; so wird die Cubiczahl von 7532 aus eben den Zahlen A+B+C+D+E+F+G, und ferner aus H+I+K bestehen.

Endlich macht diese letzte Cubiczahl von 7532, mit dem Product bey L, dem bey M, und der Cubiczahl bey N, die ganze Cubiczahl von 75328 aus, wie auf eben die Art einzusehen ist, wenn man überleget wie diese Producte entstanden sind. Demnach ist nunmehro die Cubiczahl von der ganzen 75328, die Summe der Zahlen A+B+C+D+E+F+G+H+I+K und der übrigen L+M+N, und nach der gegebenen Anweisung richtig gefunden worden. Man begreifet leicht, daß sich diese Anweisung auf alle und jede Cubiczahlen erstrecke; imgleichen, daß die Producte und Cubiczahlen der Theile der Wurzel, wie in der vorgesetzten Rechnung geschehen ist, und nicht anders müssen geschrieben werden, damit die Ordnungen ihre Einheiten richtig beybehalten werden.

§. 76. Hieraus aber fließet ferner, daß, wenn man die also gefundene Cubiczahl in Classen theilet, deren jede drey Ziffern enthält, so daß man diese Abtheilung von der rechten Hand anfänget, und von dannen nach der linken zu fortsetzet, sich mit einer jeden Ziffer, die vor einem Theilungs-

zei-

zeichen nach der linken Hand zu stehet, eine der Cubiczahlen der Theile der Wurzel endigen werde, welche Cubiczahl von dannen weiter nach der linken Hand zu sich erstrecken kan. Also endiget sich in unserm Exempel mit der letzten Ziffer 2 die Cubiczahl 512 der letzten Ziffer der Wurzel 8, und gehet von dannen weiter nach der linken; bey der 7 der nächsten Classe endiget sich 8, welches die Cubiczahl der Ziffer der Wurzel 2 ist, welche Cubiczahl hier nur aus einer Ziffer bestehet: und über der 1 der dritten Classe endiget sich 27, die Cubiczahl von 3.

§. 77. In der Mitte aber einer jeden Classe endiget sich jederzeit das Factum, so durch die Multiplication des Quadrats der nachfolgenden Ziffer der Wurzel drey mal genommen, durch alle vorhergehende Ziffern derselben, entstehet. Und endlich im Anfang der Classen endigen sich die Producte, welche aus den Quadraten der vorhergehenden Ziffer drey mal genommen, durch die nächstfolgende entstanden sind. Beyde gehen von dannen nach der linken Hand, wenn sie mehr als eine Ziffer haben. Also endiget sich unter der ersten Ziffer zur rechten in der zweyten Classe, welche Ziffer hier 4 ist, das Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel drey mal genommen, durch den nächstfolgenden Theil, welches in unserer Cubiczahl 735 beträgt. Bey der mittern Zahl dieser Classe 3 endiget sich das Factum aus dem Quadrat der zweyten Ziffer der Wurzel drey mal genommen, durch den ersten Theil multipliciret, denn also ist das Factum 525 heraus gekommen. Beyde gehen von dannen nach der linken zurück, weil sie aus mehr als einer Ziffer bestehen. In der ersten Classe zur linken aber ist außer dem, so von den nächstfolgenden Producten hierüber gegangen ist, nichts, als die Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel enthalten.

Das Ausziehen der Cubicwurzel.

§. 78. Nachdem wir also deutlich eingesehen haben, wie eine Cubiczahl aus ihrer Wurzel entstehe, und wie die Ziffer der Wurzel in die Cubiczahl, nach und nach hinein gebracht werden: so können wir auch begreifen, wie hinwiederum die Ziffer der Wurzel nach und nach aus den

Ziffern der Cubiczahl herausgebracht, und gleichsam ausgewickelt werden können. Wir müssen zu dem Ende die gegebene Cubiczahl in die Theile zergliedern, aus welchen sie bestehet. Ist dieses geschehen, so finden sich die Theile der Wurzel leicht, oder vielmehr, es kan diese Zergliederung der Cubiczahl nicht geschehen, wenn man nicht nach und nach die Theile der Wurzel herausbringt. Die Methode dieses zu thun, komt mit der, welcher man sich bey der Quadratwurzel bedienet, überein, und ist nur von jener in den Stücken unterschieden, welche aus der besondern Art, nach welcher eine Cubiczahl gemacht wird, herfliessen, in so ferne dieselbe von der Art, nach welcher die Quadratzahlen aus ihren Wurzeln entspringen, unterschieden ist.

§. 79. Es sey die Wurzel der Cubiczahl, welche wir ohnlängst III, 74. zusammen aesetzet haben 427434241687552 zu schaffen. Man machet hier eine eben dergleichen Vorbereitung, als bey den Quadratzahlen nöthig war. Man theilet die Zahl in Classen von der rechten nach der linken Hand, aber man giebt jeder Classe drey Ziffern, es müste sich dann fügen, daß die Zahl aller Ziffern der Cubiczahl sich nicht genau durch drey theilen liesse, in welchem Fall die erste Classe zur linken Hand auch zwey oder nur eine Ziffer haben kan, so viele nemlich übrig bleiben, nachdem die übrigen Classen alle voll gemacht worden sind. Aus dem so III, 76. gesagt worden, ist klar, was wir durch diese Eintheilung der Cubiczahl in ihre Classen, suchen und erhalten. Wir bestimmen die Ziffer, unter welchen die verschiedene Producte und Cubiczahlen, aus welchen die vorgegebene Cubiczahl zusammen aesetzt ist, sich endigen, nachdem sie ihren Anfang entweder unter eben den Ziffern, oder weiter forne nach der linken Hand genommen haben. Nach dieser Vorbereitung fänget man das Ausziehen der Wurzel selbst an:

	427 | 434 | 241 | 687 | 552	75328	Q
	343 | - - - | - - - | - - - | - - -		A
147)	84 | 434		
	73 5.. | - - - | - - - | - - -		B
	5 25. | - - - | - - - | - - -		C
	125 | - - - | - - - | - - -		D
16875)	5 559 | 241		
	5 062 5.. | - - - | - - -		E
	20 25. | - - - | - - -		F
	27 | - - - | - - -		G
1701027)	476 464 | 687		
	340205 4.. | - - -		H
	90 36. | - - -		I
	8 | - - -		K
170193072)	136 168 919 | 552		
	136 154 457 6..		L
	14 461 44.		M
	512		N
	0		

1) Weil in der ersten Classe zur linken Hand nichts als die Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel enthalten ist, zusamt einigen Ziffern, welche von den nächsten Producten hierüber gegangen sind, III, 77. so suchet man eine Cubiczahl von einer einzeln Ziffer, welche unmittelbar kleiner ist, als die Ziffer dieser Classe. Diese Cubiczahl ist hier 343, III, 58. Die Cubicwurzel davon 7 ist nun die erste Ziffer der Wurzel, welche wir suchen, und an einem beliebigen Orte, anzumerken. Wir haben diese 7, wie man gemeiniglich zu thun pflegt, eben so gesetzt, wie wir vor dem die Ziffer der Quadratwurzel, wie sie nach und nach kamen, gesetzt haben.

2) Die also gefundene Cubiczahl der ersten Ziffer der Wurzel 343 wird von den Ziffern der ersten Classe abgezogen, damit man die Ziffer, welche von den folgenden Classen in diese übergegangen sind, allein behalten möge. Die Cubiczahl 343 hat ihre Dienste gethan, und kan uns ferner bey der Ausziehung der folgenden Ziffer der Wurzel nichts nützen.

3) In demjenigen so von dieser Subtraction übrig geblieben, ist das Factum aus dem Quadrat der bereits gefundenen Ziffer der Wurzel 7 dreymal genommen, in die nächstfolgende Ziffer der Wurzel multipliciret, zum

Theil enthalten, und dieses Factum endiget sich mit der ersten Ziffer der zweyten Classe 4. Man ziehe derowegen diese erste Ziffer der zweyten Classe 4 zu dem Ueberbleibsel der ersten 84 herunter, wodurch 844 komt, und dividire diese 844 durch das Quadrat des an der Wurzel bereits gefundenen Theils 7 dreymal genommen; das ist, man dividire durch 3×49 oder 147, der Quotient dieser Division 5 ist die zweyte Ziffer der Wurzel.

Wir können noch nicht fortgehen den dritten Theil oder die dritte Ziffer der Wurzel zu suchen. In der zweyten Classe der Ziffer der Cubiczahl, welche uns die zweyte Ziffer der Wurzel gegeben hat, enden sich noch verschiedene Producte, welche zur Erfindung der nunmehro in der Wurzel folgenden dritten Ziffer nichts beytragen können, und, damit das folgende desto weniger verwirret bleibe, von der Cubiczahl weggenommen werden müssen. Man setze demnach

4) Diese Producte bey B, C und D ordentlich, und so wie sie in die Cubiczahl gebracht worden sind; bey B nemlich das bereits erwehnte Factum aus dem Quadrat des ersten Theils 7 drey mal, in den zweyten und nunmehro gefundenen Theil 5, multipliciret, oder welches eben das ist, das Factum aus dieser letzt gefundenen Ziffer der Wurzel 5 durch den Theiler 147. Dieses Factum endiget sich mit der ersten Ziffer der Classe.

Man schreibe ferner bey C das Factum aus dem Quadrat dieser zweyten Ziffer 5 drey mal genommen durch die vorhergehende 7, welches Factum sich mit der mittelsten Ziffer der Classe endigen muß: und endlich setze man bey D die Cubiczahl dieser letzten Ziffer, so daß sie sich unter der letzten Ziffer der Classe endige. Diese drey Zahlen B, C und D, welche man nur in Gedanken addiren kan, ziehe man von den Ziffern der zweyten Classe, und demjenigen, so von der ersten Classe übrig geblieben ist, ab, das Ueberbleibsel ist hier 5559; alle diese Ziffern sind, indem wir die Cubiczahl gemacht haben, von den nächstfolgenden Producten in diese Classe übergegangen III, 74.

5) Nun setze man zu diesem Ueberbleibsel die erste Ziffer der folgenden dritten Classe, so stehet die Zahl 55592 bereit, durch deren Division die nächste Ziffer der Wurzel erhalten wird. Der Theiler, welcher sie herausbringt, ist das Quadrat alle desjenigen, so an der Wurzel bereits gefunden worden ist, drey mal genommen, und demnach hier das Quadrat von 75 durch 3 multipliciret, oder die Zahl 16875, welche der zu dividirenden Zahl an der Seite stehet. Man dividire wirklich, so komt der Quotient 3, welcher den dritten Theil der Wurzel ausmacht. Denn weil bis an die erste Ziffer der dritten Classe das Factum aus dem Quadrat der ersten zwey

Ziffern

Ziffern der Wurzel drey mal genommen, durch den dritten Theil der Wurzel enthalten ist, zusamt einigen Ziffern, welche sich von den folgenden Producten mit diesem vermischet haben, so kan es nicht anders seyn, es muß, wenn man mit dem ersten Factor dividiret, der andere, welcher die dritte Ziffer der Wurzel ist, zum Quotienten kommen. Nur hat man einiger massen auf die gedachte Vermehrung durch fremde Ziffer Acht zu haben, und den Quotienten nicht gar zu groß anzunehmen, welches sich aber von selbst giebt. Denn man siehet es aus der Subtraction, welche gemacht werden muß, leicht, wenn man ihn zu groß angenommen hat.

6) Nun hat man von denen, mit dem vorigen Ueberbleibsel zusammen gesetzten Ziffern der dritten Classe, das ist, von 5559241, eben dergleichen Producte abzuziehen als vorhero N°. 3. abgezogen werden musten. Nemlich das Factum bey E aus dem Quadrat der ersten Ziffern der Wurzel 75, drey mal, durch die dritte 3, oder das Factum aus dem Divisor durch den Quotienten: das Factum bey F, aus dem Quadrat der dritten Ziffer 3, drey mal, durch die ersten zwo 75 multipliciret, und dann die Cubiczahl dieser dritten Ziffer der Wurzel bey G, nachdem man sie, wie vorher bey dergleichen Producten geschehen, und aus der Rechnung sichtlich ist, in Ordnung gesetzet hat.

7) Bey der vierten und denen folgenden Classen ist nichts anders zu thun, als was bey der zweyten und dritten bereits gewiesen worden ist. Man setzet zu dem Ueberbleibsel der vorigen Classe die erste Ziffer der vierten herab, so hat man die Zahl, durch deren Division der folgende Theil der Wurzel erhalten wird, welches hier 4764646 ist. Von alle denjenigen Ziffern, welche an der Wurzel bereits gefunden sind, hier 753, mache man das Quadrat, und nehme dieses drey mal, dieses ist der Theiler, durch welchen aus der eben gesetzten Zahl der Quotient 2, als die vierte Ziffer der Wurzel, gebracht wird. Nachdem dieser gefunden ist, werden zu der dividirenden Zahl hier ebenfals die zwey letztern Ziffern dieser Classe 87 gebracht, und so dann werden die Producte H, I, und die Cubiczahl K abgezogen. H ist wieder das Factum aus dem Theiler durch den Quotienten 2: I das Factum aus dem Quadrat dieses Quotienten drey mal durch die vorhergehende Ziffer der Wurzel, 753.

8) Nun ist noch eben die Arbeit mit der letzten Classe vorzunehmen, deren erste Ziffer 5 zu dem Ueberbleibsel der eben angewiesenen Subtraction herunter gesetzt, die Zahl giebt, aus welcher vermittelst der Division durch den beygesetzten Theiler, die letzte Ziffer der Wurzel 8 gefunden wird. Dieser Theiler ist wieder das Quadrat aller Ziffer, die an der Wurzel

durch

durch die vorhergehende Arbeit bereits gefunden worden sind, das ist, in unserm Exempel das Quadrat von 7532, drey mal genommen. Da hier die Producte L, M und die Cubiczahl N von alle demjenigen, so an der Cubiczahl noch übrig ist, abgezogen, nichts übrig lassen, so ist dieses ein Zeichen, daß die gefundene Zahl 75328 die genaue Cubicwurzel der gegebenen Cubiczahl sey, und daß durch die Multiplication derselben in ihre Quadratzahl diese Cubiczahl würklich heraus komme.

§. 80. Dieses ist zwar aus demjenigen, so wir eben gesagt haben, klar genug, man kan es aber auch kürzer einsehen. Die Buchstaben, welche wir den Producten und Cubiczahlen, die von unserer gegebenen Cubiczahl nach und nach abgezogen worden sind, beygesetzt haben, A, B, C, D, &c. sind eben diejenige, welche wir oben III, 74. denen Theilen dieser Cubiczahl, als wir sie verfertigten, beygeschrieben, und beziehen sich hier auf die Theile der bey Q gefundenen Zahl 75328. Nemlich A ist die Cubiczahl des ersten Theils derselben 7. B das Factum aus dem Quadrat des ersten Theils drey mal durch den zweyten 5 multipliciret. C das Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils 5 drey mal durch den ersten Theil 7 multipliciret. D die Cubiczahl des zweyten Theils, und so beständig fort nach der III, 73. gegebenen Regel. Es ist demnach richtig, daß die Summe aller Zahlen A, B, C . . . M, N, wie sie stehen, die eigentliche Cubiczahl der Wurzel 75328 seyn müsse. Nun ist aber die Summe aller dieser Zahlen A, B, C . . . M, N keine andere als die gegebene Cubiczahl, aus welcher die Wurzel zu ziehen war. Denn die Zahlen A, B, C . . . M, N, nach und nach von dieser Zahl abgezogen, lassen nichts übrig, welches ohnmöglich seyn könte, wenn die Cubiczahl mehr oder weniger wäre, als die Summe aller dieser Zahlen. Demnach ist die Cubiczahl eben diejenige, welche aus der Wurzel 75328 entstehet, und es ist demnach hinwiederum diese Zahl Q die eigentliche Wurzel der gegebenen Cubiczahl, welche wir finden solten. Und dieses erachten wir von Erfindung aller Wurzeln würklicher Cubiczahlen, wenn diese Wurzeln ganze Zahlen sind, genug gesagt zu seyn.

Cubicwurzeln der Brüche.

§. 81. Ist die Wurzel ein Bruch, so bekomt man die Cubiczahl derselben, wenn man so wohl von dem Nenner als von dem Zehler die Cubiczahl nimt, und aus der ersten den Nenner, aus der zweyten aber den Zehler des Cubicbruchs machet. Die Cubiczahl von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{8}{27}$, da der Zehler

ler des Cubicbruchs die Cubiczahl ist von dem Zehler der Wurzel 2, und der Nenner 27, die Cubiczahl des Nenners der Wurzel 3. Die Sache ist leicht eingesehen. Will man die Cubiczahl eines Bruchs schaffen, als die von $\frac{2}{3}$, so muß man erstlich das Quadrat desselben machen, indem man nemlich sowol von dem Zehler als von dem Nenner die Quadratzahlen nimt, III, 40. Dieses Quadrat ist $\frac{4}{9}$, und muß wieder in die Wurzel $\frac{2}{3}$ multipliciret werden, welches geschiehet, wenn man den Zehler 4 durch den Zehler 2, und den Nenner 9 durch den Nenner 3 multipliciret, wodurch allerdings die Cubiczahlen sowohl des Zehlers als Nenners der Wurzel $\frac{2}{3}$ in dem Cubicbruch $\frac{8}{27}$ kommen.

§. 82. Man wird also hinwiederum die Cubicwurzel so wohl des Zehlers als auch des Nenners nehmen müssen, wenn man aus einem Bruche die Cubicwurzel ziehen will: gleichwie man aus dem Bruch $\frac{8}{27}$ den Bruch $\frac{2}{3}$, welcher jenes seine Cubicwurzel ist, durch dieseAusziehung der Cubicwurzeln, aus den beyden Gliedern des Bruches, wieder erhält. Hat man eine Zahl, so aus einer ganzen und einem Bruch zusammen gesetzt ist, und man soll derselben Cubicwurzel schaffen, so thut man auch hier am besten, wenn, bevor man die Arbeit angreift, man die Zahl gar in einen Bruch verwandelt. So findet man die Cubicwurzel von $20\frac{5}{6}\frac{1}{4}$, wenn man an die Stelle dieser Zahl den Bruch $^{1}\frac{3}{6}\frac{3}{4}{}^{1}$ setzet, welcher ihr gleich ist. Von diesem ist die Cubicwurzel $\frac{1}{4}{}^{1}$ oder $2\frac{3}{4}$, und diese ist auch die Cubicwurzel der Zahl $20\frac{5}{6}\frac{1}{4}$.

§. 83. Gleichwie nun von den Quadratzahlen solcher Brüche, die sich nicht auf kleinere Benennungen bringen lassen III, 43. gezeiget worden ist, daß sie eben so wenig mit kleinern Zahlen ausgedrücket werden können: eben so läst sich dieses auch von den Cubiczahlen dieser Art Brüche darthun. Der Bruch $\frac{2}{3}$ kan ohnmöglich mit kleinern Zahlen geschrieben werden, aber die Cubiczahl davon $\frac{8}{27}$ läst sich eben so wenig zu kleinern Benennungen bringen. Eben so ist es mit dem Bruch $\frac{4}{3}$, und seiner Cubiczahl $\frac{64}{27}$, und mit allen übrigen dergleichen Brüchen. Dieses einzusehen, darf man nur eben die Betrachtungen machen, welche wir bey den Quadratwurzeln gemacht haben. Man nehme zum Exempel den eben gesetzten Cubicbruch $\frac{64}{27}$ dessen Wurzel $\frac{4}{3}$ ist. Der Zehler des erstern komt aus dem Zehler des zweyten, wenn man 4 mal 4 noch durch 4 multipliciret, und ist demnach $4\times4\times4$, und eben so ist der Nenner $= 3\times3\times3$, und demnach $\frac{64}{27} = \frac{4\times4\times4}{3\times3\times3}$.

Solte sich nun dieser Bruch auf kleinere Benennungen bringen lassen, so müste in dem Zehler eine einfache Zahl enthalten seyn, welche zugleich in dem

dem Nenner vorkomt. Sonst kan die Verkleinerung beyder Glieder des Bruches, die hier erfordert wird, nicht angehen. Da aber alle Factore des Zehlers des Cubicbruchs in dem Zehler der Wurzel vorkommen, und alle Factore des Nenners eben des Cubicbruchs in dem Nenner der Wurzel, so müste, wenn ein gemeinschaftlicher Theiler in dem Zehler und Nenner des Cubicbruchs enthalten wäre, eben derselbige Theiler sich auch so wohl zu dem Zehler als dem Nenner der Wurzel befinden, welches nicht seyn kan, weil man setzet, daß sich dte Wurzel nicht zu kleinern Benennungen bringen lasse, II, 104.

§. 84. Ist aber dieses, so muß die Cubiczahl eines unächten Bruchs nothwendig wieder ein unächter Bruch seyn, und kan keine ganze Zahl werden. Denn es wird ein unächter Bruch eine ganze Zahl, wenn man den Zehler durch den Nenner dividiret, und wenn man will, kan man auch den Nenner durch sich selbst dividiren, denn dadurch komt zum Quotienten 1, und die Bedeutung ist eben die vorige. Gehet diese Division nicht an, so kan auch aus dem unächten Bruch keine ganze Zahl werden. Kurz, wenn aus einem unächten Bruch eine ganze Zahl werden soll, so muß sich derselbe zu der allerkleinsten Benennung bringen lassen, die möglich ist, da nemlich der Nenner 1 ist, II, 15. Schreibet man aber einen unächten Bruch mit den kleinsten Zahlen, mit welchen er ausgedrückt werden kan, als $\frac{3}{2}$, so ist eben erwiesen worden, daß die Cubiczahl davon $\frac{27}{8}$ auch nicht zu kleinern Benennungen könne gebracht werden, also kan man noch vielweniger den Bruch $\frac{27}{8}$ auf die kleinste Benennung 1 bringen, und dadurch einer ganzen Zahl gleich machen.

Ganze Zahlen, deren Cubicwurzeln keine ganze Zahlen sind.

§. 85. Dieses kan uns dienen, dasjenige, so oben von den Quadratzahlen gezeiget worden ist, auch auf die Cubiczahlen anzuwenden und darzuthun, daß, wenn eine ganze Zahl keine Cubicwurzel unter den ganzen Zahlen hat, auch kein Bruch könne gefunden werden, welcher dreyfach in sich selbst multipliciret, dieselbe Zahl herausbrächte, und also als die genaue Cubicwurzel derselben angesehen werden könte. Die Cubiczahl von 1 ist wieder 1, die Cubiczahl aber von 2 ist 8. Zwischen 1 und 8 fallen verschiedene Zahlen, 2, 3, 4, 5, 6, 7, welche ohnmöglich Cubicwurzeln haben können die ganze Zahlen sind. Denn es müsten dieselben grösser seyn als 1 und kleiner als 2, welches bey ganzen Zahlen unmöglich ist. Da aber zwischen 1 und 2 eine Menge von gebrochenen Zahlen fallen, als $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{5}$ und unend-

endlich viele andere, so kan man durch eben die Schlüsse, welche bey der Quadratrechnung gebraucht worden sind, darthun, daß keiner dieser Brüche die wahre Cubicwurzel einer ganzen Zahl zwischen 1 und 8, als zum Beyspiel 4, seyn könne.

§. 86. Denn wenn man annimmet, daß einer unter diesen Brüchen, was man vor einen nehmen will, als $\frac{2}{5}$ die wahre Cubicwurzel von 4 sey, so wird man folgender maßen schließen und zeigen können, daß derselbe die gedachte Wurzel nicht sey. Der angegebene Bruch $\frac{2}{5}$ ist mit den kleinsten Zahlen geschrieben, welche ihn ausdrücken konten, und läst sich demnach nicht in eine ganze Zahl verwandeln, denn von solchen Brüchen ist hier allein die Rede, und wir setzen, daß ein jeder Bruch, der als die Wurzel angegeben wird, zur kleinsten Benennung gebracht sey. Man mache die Cubiczahl des angegebenen Bruchs, $\frac{7}{1}\frac{2}{2}\frac{9}{5}$, so ist III, 84. bewiesen, daß dieselbe ohnmöglich eine ganze Zahl seyn könne. Da nun die angegebene Zahl 4 eine ganze Zahl ist, so kan die Cubiczahl des Bruchs $\frac{2}{5}$ ohnmöglich der 4 gleich seyn. Also kan auch derselbe Bruch $\frac{2}{5}$ ohnmöglich die wahre Cubicwurzel von 4 seyn: Und eben so kan man bey einem jeden andern Bruch, so angegeben werden mag, schließen.

§. 87. Es ist also wieder keine Hofnung, eine solche Wurzel genau zu finden. Denn wie will ich das finden, so nicht angegeben, und demnach auch nicht gefunden werden kan, oder etwas schreiben, so doch weder zu schreiben noch auszusprechen ist? Aber man kan sich auch hier einer dergleichen Wurzel nähern, und ob zwar, daß wir bey unserm Exempel bleiben, keine Zahl gefunden werden kan, welche in ihr Quadrat multipliciret, genau und ohne dem geringsten Abgang 4 brächte, so kan doch ein solcher Bruch angegeben werden, welcher in sein Quadrat multipliciret, eine Cubiczahl giebt, welche von 4 sehr wenig unterschieden ist, und diesen Unterscheid kan man nach Belieben kleiner machen, und sich also der wahren Wurzel der gegebenen Zahl so sehr nähern, als nur in einem jeden vorkommenden Fall mag erfordert werden.

Wie man sich den Cubicwurzeln nähert, wenn sie nicht genau zu haben sind.

§. 88. Die Weise dieses zu verrichten ist einerley mit derjenigen, welche oben bey der Quadratwurzel gezeigt worden ist, III, 48. Es muß zum voraus gesetzet werden, daß, wenn man die Cubiczahl von einem zehentheilichten Bruch machet, in dieser Cubiczahl von der letzten Ziffer bis an dem

Ort der Einheiten drey mal so viele Ziffer vorkommen, als in der Wurzel. Also ist von 0,2 die Cubiczahl 0,008, denn die Quadratzahl davon ist 0,04, und diese durch 0,2 multipliciret, giebt 0,008. Eben so wird gefunden, daß die Cubiczahl von 0,02, die Zahl 0,000008 sey, die von 0,003 aber 0,000000027, und so ferner, so daß jederzeit die Zahl der Ziffer, die in der Wurzel nach dem Ort der Einheiten oder dem (,) stehen müssen, gefunden wird, wenn man die Zahl der Ziffer, die in der Cubiczahl hinter dem Ort der Einheiten vorkommen, durch drey theilet.

§. 89. Nun kan das folgende alles nicht viele Schwierigkeiten haben. Wir wollen zuerst eine Zahl suchen, welche der Cubicwurzel von 4 nahe komt. Man hänget nur an die 4, nach welcher man das (,) gesetzt, so viele Classen jede von drey 000 an, als man nöthig erachtet. Jede von diesen Classen giebt eine Ziffer vor die Einheiten der untern Ordnungen, und demnach die erste Classe Zehentheile, die zweyte Hundertheile, die dritte Tausendtheile, und so ferner. Oder man kan auch diese Classen nach und nach an das Ueberbleibende anhängen, indem man in der Ausziehung der Wurzel fortfähret:

```
                4,|000|000|1,58
                1 |
              ---|
          3)  3 |000|
              1  5..|
                 75.|
                 125|
            ---------|
        675)  625|000|
                540 0..|
                  28 80.|
                     512|
                --------|
                  55 688
                   &c.
```

Es ist demnach die gefundene Zahl 1,58, welche der Wurzel gar nahe komt; denn ihre Cubiczahl ist 3,944312, welches genau genug ist. Denn wegen der zweyfachen Multiplication bringt ein sehr geringer Fehler in der Wurzel einen großen Unterschied in der Cubiczahl selbst. Wie zum Beyspiel; wenn man an statt 4, die Zahl 3 vor die Cubicwurzel annimt, man an statt 64 die Cubiczahl 27 bekommet, welche von der ersten um ganze 37 Einheiten verschieden ist. Doch kan man die Wurzel noch näher haben,

wenn

wenn man noch eine Classe von 000 zu dem Ueberbleibsel setzet, und so dann die Rechnung fortführet.

§. 90. Fast eben so machet man es mit den zehentheilichten Brüchen, wenn von demselben die Cubicwurzeln auszuziehen sind. Es muß aber alles hier wieder angewandt werden, so oben III, 52. bey den Quadratzahlen von eben dergleichen Brüchen gelehret worden ist: insonderheit muß man nicht vergessen am Ende jederzeit so viele einzelne 00 anzuhängen, als erfordert werden, eines der Zeichen, durch welche die gegebene Zahl in Classen getheilet werden muß, an die Ziffer zu bringen, welche ganze Einheiten bedeutet. Es sey aus 0,0359 die Cubicwurzel auszuziehen. Ich setze vor diese Zahl 0,|035|900, und fange so dann die Arbeit bey der zweyten Classe an:

```
0,|035|900|0,329
  | 27|   |
 ---------
27)   8 900
      5 4..
        36.
         8
 ---------
3072)  3 132|000
        &c.
```

Die Wurzel ist demnach 0,329, deren Cubiczahl 0,035611289, von der gegebenen Zahl nur um etwas weniges verschieden ist.

§. 91. Man kan die Arbeit bey Ausziehung so wohl der Quadrat- als auch der Cubicwurzel ungemein erleichtern, wenn man eine Tafel bey der Hand hat, in welcher die Quadrat und Cubiczahlen von allen Wurzeln bis auf 1000, oder noch weiter, verzeichnet sind. An statt daß wir, indem wir uns unserer kurzen Tafel bey Ausziehung einer Cubicwurzel bedieneten, die erste Classe zur linken höchstens nur von drey Ziffern annehmen dürften, kan man in diesem Fall in derselben viel mehrere stehen lassen, nemlich sieben, achte oder neune, wenn man eine Tafel hat in welcher die Wurzeln bis auf tausend gehen, dergleichen wir hier annehmen wollen. Denn gienge die Tafel bis auf 10000, so könten bis zwölf Ziffer in der ersten Classe bleiben. Die übrige Arbeit geschiehet vollkommen, wie gewiesen worden ist. Aber man bekomt, indem man aus dieser ersten Classe die Wurzel vermittelst der Tafel ausziehet, oder aus derselben die Cubiczahl nimt, welche unmittelbar kleiner ist als die Ziffer dieser ersten Classe: Man bekomt, sage ich, auf die Art sogleich die drey ersten Ziffer der Cubicwurzel,

welches eine sehr grosse Erleichterung ist. Wir wollen die Sache mit einem Exempel erläutern:

```
                532798752 | 354 | 810 B
            A   531441000 |
          ------------------
1968300)        1357752 3
```

Die erste Classe hat hier neun Ziffern, von denselben hat man die Cubiczahl A, welche aus der Tafel genommen ist, abgezogen, und die Wurzel davon 810 bey B hingesetzt. Die Cubiczahl A, von den Ziffern der ersten Classe abgezogen, läst was unter derselben verzeichnet stehet übrig, mit welchen man ferner fortfähret, wie sonst gewöhnlich ist. Nemlich man setzt demselben die erste Ziffer der folgenden Classe 3 zu, so hat man die Zahl, aus welcher durch die Division die nächste Ziffer der Wurzel gebracht werden muß, und der Theiler ist auch hier das Quadrat desjenigen, so an der Wurzel bereits gefunden ist, drey mal genommen: welches wir grösserer Deutlichkeit halben der zu dividirenden Zahl an die Seite gesetzt haben. Ich hoffe, daß dieses nicht allein von den Cubiczahlen begreiflich seyn, sondern auch eine hinlängliche Anweisung geben werde, eben dergleichen bey Ausziehung der Quadratwurzeln ohne Schwierigkeit anzuwenden.

Vier-

Vierter Abschnitt.

Von geraden Linien und Winkeln.

Allgemeine Begriffe von dem ausgedehnten Wesen.

§. 1.

In der Geometrie betrachtet man dasjenige, was man im allereigentlichsten Verstand eine **Grösse** nennet, und aus welchen man ein Ding in Ansehung eines andern sie groß oder klein urtheilet. Diese eigentlich so genante Grösse aber ist nichts anders als die **Ausdehnung** nach allen Seiten, welche bey allen Cörpern anzutreffen ist. Denn es haben alle Cörper Theile, welche neben und über einander liegen, und eben hieraus entstehet die Grösse der Cörper, und ihre Ausdehnung. Nemlich weil die Theile in einem fort nach einander liegen, so erstrecket sich der Cörper in die Länge; da neben den vorigen Theilen zur Seite noch andere dergleichen Theile befindlich sind, so erstrecket sich der Cörper auch in die Breite, und daraus, daß solche Theile auch über einander gesetzt sind, entstehet die Ausdehnung des Cörpers in die Höhe oder in die Tiefe.

[*Fig. 25.*] §. 2. Man kan diese Ausdehnung vor sich betrachten, indem man erweget, wie weit ein Cörper sich nach dieser oder jener Seite, oder nach dieser und jener zugleich, erstrecke. Man kan aber auch darauf Acht haben, von was Art diese Ausdehnung sey, oder wie die Theile geordnet werden müssen, wenn die besondere Ausdehnung, die dieser oder jener Cörper hat, entstehen soll. Und zu dem Ende hat man nur auf die Gränzen derselben Acht zu haben, oder auf dasjenige, so bey einer jeden Ausdehnung das äußerste ist. Wenn man die Theile, so ein ausgedehntes Wesen ausmachen sollen, wie in der 25 Zeichnung, zusammen ordnet, so bekommet man ein ausgedehntes Wesen von einer gewissen Gestalt oder Figur A B C, welche Gestalt man deutlich begreift, wenn man sich nur die äußersten Theilchen, vorstellet, und betrachtet in was Ordnung diese neben einander liegen. Denn an dem inwendigen ist hier nichts gelegen. Nachdem die äußersten Theile geordnet sind, können die innern nur

auf

auf einerley Art gesetzet werden, nemlich so, daß alles voll werde. Denn man nimmet an, daß die Ausdehnung in einem fortgehe ohne Zwischenraum oder Absatz. Und dieses ist den gemeinen Begriffen gemäß; wie man merken wird, wenn man nur darauf Acht hat, wie man sich eine Länge, eine Breite, eine Höhe, oder die Grösse eines jeden Cörpers vorstellt.

§. 3. Ob zwar ein jeder Cörper seine Ausdehnung hat; so ist doch nicht nothwendig ein jedes ausgedehntes Wesen ein Cörper. Was hindert, daß ich mir nicht etwas ausgedehntes vorstellen sol, in dessen inwendiges ich ohne Mühe und Widerstand einzudringen vermögend bin? In der Geometrie machet man dergleichen Begriffe beständig, wie auch in dem gemeinen Leben; wenn man von dem Raum in einem Zimmer redet. Ob zwar dieser Raum ohne Ausdehnung nicht kan gedacht werden, so verhindert er uns doch keinesweges in das Zimmer zu kommen, und in dasselbe etwas hineinzusetzen. Nun ist dieses eine Eigenschaft, welche von einem Cörper nicht kan abgesondert werden, daß er seiner Natur nach verhindere, daß man nicht in sein inwendiges hinein kommen könne. Es müssen erstlich die Theile Raum machen, welche sich in dem inwendigen des Cörpers befinden, ehe etwas an ihre Stelle kommen kan, welches bey dem Raum nicht ist, da alle Theile, die wir uns in demselben vorstellen, in ihrer Ordnung bleiben, man mag in denselben bringen was man wil. Demnach kan der Raum ohnmöglich ein Cörper seyn. Dem ohngeachtet nennet man in der Geometrie ein jedes Wesen, so nach allen Seiten ausgedehnet ist, einen **Cörper**, weil man in dieser Wissenschaft bey den Cörpern nichts mehr als die Ausdehnung betrachtet, und ihn nur auf dieser Seite ansiehet, ohne auf die übrigen Eigenschaften desselben Acht zu haben: daß also der Geometrische von einem eigentlichen Cörper, wie dieser in der Naturlehre betrachtet wird, wohl zu unterscheiden ist.

§. 4. Die Ausdehnung eines jeden besondern Cörpers muß sich nothwendig irgendwo endigen. Es gehet derselbe niemals beständig fort, sondern seine Ausdehnung höret irgendwo auf. Und dieses zwar auf einmal, nicht mit einem langsamen abnehmen. Ich gehe in dem Raum eines Zimmers nach einander fort. Auf einmal höret dieser Raum des Zimmers auf, und es fänget der Raum an, welchen die Wand einnimt, ohne daß etwas dazwischen wäre, welches weder zu dem Zimmer noch zu der Wand gehörete. Wo sich die Ausdehnung eines Cörpers endiget, da sind die **Gränzen** seiner Ausdehnung. Diese Gränzen haben keine Dicke. Es gehet mit denselben eben so, als mit der Abtheilung welche die Gränzen

zen zweyer neben einander liegender Aecker feste stellet, wenn diese Abtheilung nicht durch einen Graben, einen Weg, eine Wand, oder was dergleichen gemacht, sondern bloß durch eine ausgedehnte Schnur oder auf eine andere deraleichen Art bezeichnet ist. Dadurch gehet weder dem einen noch dem andern Acker etwas ab, welches nicht geschehen könte, wenn die Gränze an sich einige Breite hätte: eben so ist es mit den Gränzen der Cörper beschaffen, welche Gränzen keine Dicke haben.

§. 5. Demnach sind diese Gränzen der Cörper in die Länge und Breite ausgedehnet, denn der Cörper endiget sich an vielen Orten, die an und neben einander liegen, und ich kan in der Gränze desselben in die Länge und in die Quere fortkommen. Sie haben aber keine Ausdehnung in die Tiefe, wie die Cörper ausser den zwo vorigen diese Ausdehnung gleichfals haben. Ein dergestalt in die Länge und Breite, aber nicht in die Tiefe, ausgedehntes Wesen pflegt man eine **Oberfläche** zu nennen.

§. 6. Ich sehe nicht was bey dieser Erklärung nicht leicht und natürlich könte genennet werden: und doch haben sich einige gefunden, welche sich bey derselben und andern dergleichen aufgehalten haben. Es ist kein Ding, sagen sie, welches bloß in die Länge und Breite ausgedehnet wäre, und also ist es widersinnisch sich eine Oberfläche als bloß in die Länge und Breite ausgedehnt, vorzustellen. Wie? sind denn die Gränzen der Ausdehnung der Cörper kein Ding? Sind sie nichts, das ist, hat ein Cörper keine Gränzen seiner Ausdehnung, über welche er sich nicht erstrecket? Von diesen Gränzen aber ist gezeiget worden, daß sie zwar lang und breit, aber nicht tief oder dick seyn. Wahr ist es, daß keine Gränzen der Ausdehnung eines Cörpers vorhanden sind, wo kein Cörper ist, und daß in so ferne, wo eine Länge und Breite anzutreffen ist, auch nothwendig eine Tiefe mit verknüpft sey. Aber was hindert mich eines ohne das andere zu betrachten? Kan ich nicht die Weiße des Zuckers mir allein vorstellen, ohne auf dessen Süßigkeit Acht zu haben, und geschiehet dieses nicht alle Tage? Oder ist es nöthig zu sagen, daß der Zucker weiß und süße sey, wenn man die Gestalt eines Zuckerhutes beschreiben soll?

§. 7. Was von den Cörpern gesagt worden, ist auch auf die Oberflächen anzuwenden. Sie haben meistentheils Gränzen ihrer Ausdehnung, wo diese sich anfänat, und wo sie sich endiget. Ich sage meistentheils, denn es haben nicht alle Oberflächen dergleichen Gränzen. Einige derselben fangen eigentlich nirgends an, und endigen sich auch nirgends. Dergleichen sind die Oberflächen einer Kugel, eines eyförmigten Cörpers, und vieler anderer. Man nehme aber nur einen Theil von einer dergleichen,

oder jeden andern Oberfläche, so hat dieser Theil, welcher auch selbst eine Oberfläche ist, nothwendig seine Gränzen. Grösserer Deutlichkeit halber kan man die Oberfläche eines Blatt Papiers nehmen, welches man nach Belieben beugen kan.

§. 8. Die Gränzen der Ausdehnung einer Oberfläche haben keine Dicke; denn wie könten sie eine haben, da die Oberfläche selbst keine hat, aber sie haben auch keine Breite. Man führe die Spitze einer Nadel, welche man sich so zart vorstellen kan, als man nur will, nach und nach auf einer dergleichen Oberfläche, als wir betrachten, nach aussen fort, so komt man endlich nothwendig an die Gränze. Beweget man sie um das geringste weiter fort, so komt man ausser dieselbe. Die Spitze meiner Nadel muß sich entweder innerhalb der Oberfläche bewegen, oder außer derselben, es ist kein Mittel darzwischen. So bald sie aufgehöret hat innerhalb derselben zu gehen, so gehet sie außerhalb. Die Spitze kan, indem man sie von innen nach aussen zu fortführet, in der Gränze selbst sich nicht noch weiter auswärts bewegen. Dieses alles würde nicht so seyn, wenn die Gränze einige Breite hätte. Wohl aber hat eine dergleichen Gränze eine Länge. Denn man kan in derselben selbst fortgehen, und wenn man will um die Oberfläche, von welchen sie die Gränze ist, herum kommen. Es sind demnach die Gränzen der Oberflächen Längen, welche weder Breiten noch Dicken oder Tiefen haben.

§. 9. Man pflegt diese Längen ohne Breiten und Tiefen, **Linien** zu nennen, welche man sich wieder vor sich vorstellen kan, ohne an die Oberflächen zu gedenken, von welchen sie die Gränzen sind. Dieses thut man in dem gemeinen Leben, wenn man nach der Entfernung zweyer Oerter von einander, oder nach der Länge des Weges von einem Orte zu dem andern, fraget. Wir sind in diesem Fall nicht vergnügt, wenn wir etwas von der Breite oder Güte der Landstraßen zur Antwort bekommen, welche wir reisen sollen, da wir eigentlich die Zahl der Meilen von dem einen Ort zum andern wissen wolten. Wird uns aber diese Zahl der Meilen gesagt, und auf die Art die Entfernung des einen Orts von dem andern bekant gemacht, so sehen wir alles übrige, so etwa von der Breite der Straßen, von ihrer Güte, Sicherheit, und dergleichen, hinzugethan wird, als etwas fremdes an, so eigentlich zur Antwort auf die Frage nicht gehöret. Indem man dieses thut, und die Länge allein wissen will, ohne sich um die Breite und übrige Umstände, die mit einem Wege nothwendig verknüpft sind, zu bekümmern, so sondert man allerdings dieses

alles

alles in den Gedanken von der Länge desselben ab, und man muß es thun, wenn man alle Verwirrungen vermeiden will.

§. 10. Man stelle sich also nunmehro eine Linie vor, was man vor eine will, als die Gränze von einer Fläche, oder ohne darauf Acht zu haben, daß sie würklich eine deraleichen Gränze abgebe, weil an diesem Umstand hier nichts gelegen ist. Man kan, wie gesagt worden ist, in einer solchen Linie fortgehen, aber man komt endlich ans Ende derselben. So bald man am Ende ist, und weiter fortgehet, so komt man außer derselben. Es ist nicht möglich, den Weg um das geringste fortzusetzen, und doch weder in der Linie zu bleiben noch außer dieselbe zu kommen. Es endiget sich also wieder die Linie auf einmal, und ihr Ende hat keine Länge. Man pflegt diese Gränzen der Linien **Puncte** zu nennen, welche man sich also nicht nur wie die Linien, welche sie endigen, ohne Breite und Tiefe, sondern auch ohne Länge vorstellet, und eben hierinnen ist ein Punct von einer Linie unterschieden.

§. 11. Man siehet aus diesen allen, daß man die Begriffe eines Puncts, einer Linie und einer Oberfläche, nothwendig so annehmen müsse, wie sie angenommen worden sind, wenn man sich in diesen Dingen nicht verwirren will. Die Sache leidet es nicht anders: wir müsten uns ganz einen andern Begrif von einem ausgedehnten Wesen machen können, als wir würklich haben, wenn wir diese Begriffe, welche aus jenem nothwendig herfließen, verändern wolten.

Begriffe der Puncte und Linien.

§. 12. Es sind nunmehro die besondern Arten dieser Dinge, das ist, die besondern Arten der Linien, der Oberflächen und der Cörper zu erklären. Hiebey aber thut man am besten, wenn man, wie auch gemeiniglich geschiehet, von dem Puncte anfängt, welches man sich auch vorstellen kan, ohne dasjenige, so bisher gesagt worden ist, zum Grunde zu legen.

§. 13. Wir stellen uns im gemeinen Leben zum öftern Dinge als Puncte ohne einige Theile, und ohne Länge, Breite und Dicke vor. Man nehme zum Exempel, ein einziges Stäubchen Mehls. Niemand sagt daß ein Mehlkasten durch den Zusatz eines einzelnen solchen Stäubchens voller, oder durch dessen Abzug, leerer werde. Dieses würde man nicht sagen können, wenn man sich dabey ein dergleichen Stäubchen Mehls nur von einiger Grösse, so gering sie auch seyn möchte, vorstellte. Ob zwar also in der That ein solches Stäubchen eine Grösse und seine gewisse

wisse Gestalt hat, welche mit einem Vergrösserungs-Glaß deutlich genug zu sehen ist; so stellet man sich dasselbe doch ohne alle Grösse vor, welches nicht geschehen könte, wenn wir nicht Begriffe von solchen Dingen hätten, die ganz und gar keine Grösse haben. Wie kan jemand sagen, ein Stäubchen Mehls hat gar keine Grösse, oder wenn man will, es hat in Absicht auf einen ganzen Sack Mehls keine Grösse, oder ein Stäubchen Mehls mehr oder weniger, machet einen weder reicher noch ärmer, wie könte, sage ich, jemand dieses sagen, der keinen Begrif von einem solchen Dinge hätte, daß ganz und gar ohne Grösse ist?

§. 14. Wir haben also den Begrif des Puncts alle, und können denselben nicht einmal im gemeinen Leben entbehren; die Anwendung aber, wird am besten weisen, daß es damit gar keine Schwierigkeit habe. Solte es jedoch jemanden im Anfang allzu schwer scheinen, sich etwas ganz und gar ohne Grösse und Theile vorzustellen, so mag er an statt eines Puncts etwas so kleines annehmen, daß es in Vergleichung mit einem andern vor nichts zu halten ist. Er mag es sich als ein Stäubchen Mehl einbilden, und sagen, daß dasselbe zwar eine Länge, Breite und Tiefe habe, aber eine solche, welche nicht in Betrachtung gezogen zu werden verdienet. Thut er dieses, so wird er in der That nicht so vollkommen richtig denken, als ein geübter Geometra; doch wird ihn dieser Begrif auch in keinen Hauptfehler verleiten, und nach und nach wird er sich angewöhnen, von diesem auf den wahren Begrif eines Puncts überzugehen, wenn er denselben zum öftern anwendet.

§. 15. Ein Punct ist nicht nothwendig in der Stelle, in welche es gesetzt ist. Es kan dasselbe auch in einer jeden andern Stelle seyn; es kan sich demnach auch aus einem Ort in den andern bewegen, oder aus einem Ort in dem andern fortfließen. Diese Bewegung geschiehet allezeit nach einer gewissen Strecke, und indem sie geschiehet, entstehet eine Linie. Der Begrif des fließenden Puncts erläutert am besten, wie eine Linie erzeuget wird.

§. 16. Man stelle sich einen Tropfen Wassers vor, welcher auf einer Oberfläche liegt, und mache durch die Veränderung der Lage dieser Fläche, daß der Tropfen fortzufließen anfange. Er wird einige Nässe zurück lassen, welche die Oerter bemerken wird, wo er erst gewesen, und in welche er nach und nach gekommen ist, bis auf denjenigen, in welchem er stehen geblieben. So ist es mit der Dinte, welche in der Feder hänget, deren Spitze wir auf dem Papiere von einem Orte zu einem andern führen; und eben so lassen Kreide, Wasserbley und andere solche Cörper einige

Theile

Theile hinter sich an einer Fläche kleben, welche den Weg bezeichnen, den diese Cörper auf derselben nehmen. Auf eben die Art muß man sich ein Punct in seiner Bewegung vorstellen. Es muß, indem es sich bewegt, alle Oerter bezeichnen, in welche es nach und nach kommet. Dadurch entstehet eine Länge, ohne Breite und Tiefe, mit einem Wort, eine Linie. IV, 8.

§. 17. Das Punct kan bey dieser Bewegung der Strecke oder Richtung, nach welcher es sich einmal beweget hat, hernach beständig folgen, oder dieselbe mit einer andern verwechseln. Es ist eben so mit den Bewegungen aller andern Cörper. Wir gehen entweder von einem Ort zu dem andern gerade zu, oder wir verändern unsern Weg nach Belieben, und dieses können wir alle Augenblick thun, wie diejenigen, welche beym Spatzieren gehen zuweilen ihren eigenen Schatten folgen, welcher alle Augenblick nach verschiedenen Strecken fället und eine andere Richtung bekomt.

[*Fig. 26.*] §. 18. Verändert nun das Punct, indem es so fortfließet, seine Strecke nicht, sondern folget derjenigen, die es Anfangs gehalten hat, beständig, so lange die Bewegung dauret, so beschreibt es eine **gerade Linie**. Dergleichen ist diejenige, deren Anfang und Ende wir mit A, B bezeichnet haben. Oder vielmehr haben wir eine gerade Linie zwischen A, B nur unvollkommen vorgestellet, denn es ist eben so wenig möglich eine vollkommen gerade Linie zu ziehen, als unmöglich es ist, ihr keine Breite zu geben. Doch ist daran nicht viel gelegen. Die Figuren dienen entweder nur die Begriffe, welche mit Worten beygebracht werden, desto deutlicher und lebhafter zu machen, oder sie dienen zur Erfindung dieser oder jenen neuen Grösse aus einigen gegebenen, fast wie in der Rechenkunst aus einigen gegebenen Zahlen andere gefunden werden. In beyden Fällen sind cörperliche Linien, welche man nemlich auf Papier, Holz oder Metall gezeichnet hat, hinlänglich. Denn man kan diese so zart und so gerade machen, daß weder eine Breite, noch einige Krümme bey denselben zu merken ist. Um unmerkliche Fehler aber hat man sich in der Ausübung nicht zu bekümmern; und in der Betrachtung komt es ohnedem mehr auf richtige Begriffe, als auf nette Ziehungen an.

§. 19. Eine gerade Linie kan zwischen jeden zween Puncten, wo man diese auch annehmen will, gezogen werden. Will man dieselbe sichtlich machen, so darf man nur einen stark ausgedehnten Faden, an die gegebene Puncte anhalten. Die Länge dieses Fadens ohne seine Dicke betrachtet, ist die gerade Linie, welche zwischen denselben zweyen Puncten gezogen werden kan, im Geometrischen Verstande.

[*Fig.* 27.] §. 20. Es ist aber die gerade Linie die kürzeste unter allen Linien, welche zwischen zween Puncten können gezogen werden. Dieser Satz ist wie der vorige an sich klar, und es ist nichts anzubringen, so uns von der Wahrheit desselben mehr überzeugen könte, als wir es gegenwärtig sind. Indessen kan zum deutlichern Verstand desselben folgendes dienen. Man zeichne die Puncte A und B, lege so dann einen Faden durch A und B, und lasse ihn im übrigen nach einer beliebigen Krümmung durch C oder D gehen. So bald man ihn verkürzet, wird man finden, daß einige Theile desselben sich der geraden Linie AB, die zwischen den gedachten zweyen Puncten gezogen ist, nähere, und machet man den Faden so kurz als man kan, so wird sich derselbe in gerader Linie von A nach B erstrecken.

§. 21. Man siehet eben so deutlich, daß zwischen zween Puncten nicht mehr als eine gerade Linie könne gezogen werden. Es ist nur ein Weg der kürzeste von A nach B, die Umwege sind mannigfaltig. Diesen kürzesten Weg hält die gerade Linie. Will man es sichtlich machen, so zeichne man erstlich eine gerade Linie durch A, B, und lege so dann die Schärfe eines Linials oder einen ausgespanten Faden an dieselbe. Diese Schärfe oder dieser Faden wird mit der geraden Linie AB zusammen fallen. Wenn aber zwo gerade Linien zusammen fallen, so giebt es nur eine Linie.

§. 22. Eine gerade Linie kan nach Belieben verlängert werden. Es ist nichts, so uns zwingen könte, ein Punct, welches wir uns in Bewegung vorstellen, ruhen zu lassen. Wir können, wie lang und wie weit sich auch ein solches Punct beweget haben mag, noch immer eine fernere Bewegung bey demselben begreifen: dadurch verlängert es die Linie, welche es zu beschreiben angefangen hat, wenn es nur nicht zurück kehret, und hernach den vorigen Weg verfolget. Denn hiedurch wird die Linie eigentlich nicht verlängert, wie die Pferde, welche auf der Schule im Kreyß gehen, indem sie sich dergestalt abmatten, eben keine weite Reise thun. Dieses ist aber bey einer geraden Linie nicht. Ein Punct, welches einerley Strecke in seiner Bewegung hält, entfernet sich beständig von einem jeden Ort, in welchem es gewesen ist, und nähert sich andern Oertern, in welchen es noch nicht gewesen. Es kan also niemals wieder an einen Ort kommen, den es einmal verlassen hat. Also hat eine gerade Linie kein anderes Ende, als dasjenige, so man ihr mit Willen giebt. Es ist wahr, ich muß irgendwo aufhören, wenn ich eine gerade Linie ziehe, aber ich bin nicht nothwendig verbunden, hier oder da aufzuhören. Einige äußer-

liche

liche Umstände können mich bey cörperlichen Linien dazu zwingen, als die Grösse des Papiers, oder etwas dergleichen, aber niemals zwingt mich die Natur, oder die Beschaffenheit der Linie selbst dazu.

[*Fig.* 28.] §. 23. Die Theile einer geraden Linie liegen alle nach einerley Strecke, und wie kan dieses anders seyn, da ein jeder derselben Theile durch die Bewegung des Puncts nach einerley Strecke beschrieben worden ist? AB mag eine gerade Linie bedeuten, die wir nach Belieben bey C, D, und E getheilet haben. Weil nun, indem ein Punct den Theil der Linie AC beschrieben, es sich nach eben der Strecke beweget hat, nach welcher es fortgangen ist, indem es durch eine fernere Beweaung den Theil CD erzeuget hat, und weil es nach eben der Strecke durch D, E, und so ferner bis B fortgegangen: so ist klar genug, daß diese Theile der Linie AB nicht nach verschiedenen Strecken liegen können, wie zum Exempel die Theile FG, GH, HI, IK, die zusammen die gebrochene Linie FK ausmachen, nach gar verschiedenen Strecken liegen. Wenn man demnach die Strecke eines einzigen Theils CD einer geraden Linie AB weiß, wie klein dieser auch seyn mag, so weiß man die Strecken aller übrigen Theile derselben AC, CD, DE, EB, und die Strecke der ganzen Linie AB, wie weit dieselbe auch fortgezogen seyn mag.

[*Fig.* 29.] §. 24. Man kan demnach eine gerade Linie nur auf einerley Art verlängern. Dieses ist so zu verstehen. Wenn AB eine gerade Linie ist, und ich will sie verlängern, so ist es mir nicht frey das Punct, welches AB verlängern soll, entweder nach C oder nach einem andern Punct D fortzuführen, und nach Belieben entweder BC oder BD zu beschreiben. Ist eines von diesen zwey Stücken BC die wahre Verlängerung der geraden Linie AB, so ist es das andere BD gewiß nicht, man mag dasselbe gezogen haben wie man will. Liegt BC mit AB nach einerley Strecke, so liegen AB und BD nach verschiedenen Strecken, es kan also ABD ohnmöglich eine gerade Linie seyn.

§. 25. Aus diesem allen ist klar, daß durch jede zween Puncte A, B, die Lage einer geraden Linie bestimmet und fest gestellet werde. Denn wenn man durch diese zween gegebene Puncte die gerade Linie AB ziehet, und nach Belieben in C verlängert, so müssen alle gerade Linien, die ebenfalls durch A, B gezogen werden, in diese AC fallen, und, wenn man sie gehörig verlängert, durch alle Puncte gehen, welche in der zuerst gezogenen AC liegen: aber ein jedes Punct, so ausser dieser AC auf der Seite lieget, liegt auch außer einer jeden andern geraden Linie, die durch AB gehet.

het. Dieses will man dadurch anzeigen, wenn man spricht, es werde die Lage einer geraden Linie, durch jede zween Puncte derselben bestimmet.

[*Fig. 30.*] §. 26. Wenn man von einem Puncte A, zwo verschiedene gerade Linien AB und AC ziehet, so entfernen sich die Puncte, welche diese geraden Linien beschreiben, je mehr und mehr von einander. Denn sie entfernen sich von einander, indem sie von A ausgehen, und eines derselben nimt seinen Weg, zum Exempel, aufwärts, und beschreibt AB, das andere achet mehr unterwärts nach AC. Derowegen entfernen sich auch die geraden Linien AB, AC je mehr und mehr von einander, je weiter sie von A nach der Seite B, C fortgezogen werden, und können also von dieser Seite niemals wieder zusammen kommen, IV, 23. Im Gegentheil, wenn man sich vorstellt, daß die Puncte B und C beyde von ihren Oertern in gerader Linie nach A fließen, so nähern sie sich einander beständig, und eines derselben B gehet zum Exempel nach der linken und unterwärts, das andere C fließet nach der linken aufwärts. Dieser Bewegung folgen sie, nachdem sie in A zusammen kommen sind ferner, und es erhebt sich dadurch das Punct, welches von C ausgeflossen ist, über dasjenige, so in B war, und gehet in dieser Strecke beständig schief aufwärts nach D zu, indem das andere Punct seinen Weg schief unterwärts nach E verfolget. Demnach kommen die Puncte und die geraden Linien AD, AE auch auf dieser Seite nicht wieder zusammen. Es können also zwo gerade Linien EB, DC einander in einem Punct A schneiden, aber es ist ohnmöglich, daß sie einander in mehr als einem Punct schneiden, oder daß sie mehr als ein Punct gemeinschaftlich haben solten. Wenn zwo gerade Linien zween Puncte gemeinschaftlich hätten, so gingen sie beyde durch diese zween Puncte, also fielen sie zwischen denselben Puncten in eine gerade Linie zusammen, und gingen in einem fort, wenn man sie von beyden Seiten verlängerte: demnach wären sie nicht zwo, sondern nur eine gerade Linie.

§. 27. Dieses sind die Haupteigenschaften der geraden Linien, welche alle bekant genug sind, und leicht eingesehen werden, wenn man nur auf den Begrif Acht hat, welchen wir von den geraden Linien haben. Denn wenn man die Wahrheit gestehen will, so ist es nicht möglich, jemanden einen Begrif von einer geraden Linie, durch eine Erklärung beyzubringen, so künstlich man auch dieselbe verfassen mag: und alle Erklärungen der geraden Linie setzen würklich zum Grunde, daß man bereits wisse, was eine gerade Linie sey. Was ist die Strecke anders als eine gerade Linie, welche von einem Puncte so oder so gezogen ist? Saget man also, eine gerade Linie entstehe, indem ein Punct sich immer nach einerley Strecke bewe-

get,

get, so saget man in der That nichts anders, als eine gerade Linie entstehe, indem ein Punct sich nach einer geraden Linie beweget. Mit denen Erklärungen, welche andere von einer geraden Linie geben ist es nicht anders beschaffen, wenn sie, als wahre Erklärungen, auf den Grund zurücke gehen sollen, und nicht eine bloße Eigenschaft der geraden Linie enthalten, durch welche dieselbe zwar in der That von denen übrigen Linien unterschieden wird, die aber keines weges der Grund des übrigen ist, so wir bey der geraden Linie antreffen: als wenn man sagen wolte, die gerade Linie sey diejenige, deren Lage durch zween Puncte völlig bestimmet wird. Es sind also die Anmerkungen, welche wir von den geraden Linien beygebracht haben, nicht anders als bloße Erläuterungen eines an sich bekanten und gemeinen Begriffes anzusehen. Wir wenden uns nunmehro zu den krummen Linien.

[*Fig.* 28.] §. 28. Man muß nicht alle Linien krumm nennen, die nicht gerade sind: denn man kan sich Linien vorstellen, welche weder gerade noch krumm sind. Wenn ein Punct von F nach G gehet, daselbst die Strecke ändert, nach welcher es sich beweget hatte, und von G nach H fließet, von dannen nach I, und endlich aus I in K: so beschreibt es keine gerade Linie, aber auch keine krumme. Sein Weg ist aus verschiedenen geraden Linien zusammen gesetzt. Eine krumme Linie aber läst sich aus geraden Linien nicht zusammen setzen; sie ist von denselben ganz und gar verschieden, so daß in einer krummen Linie, kein Theil angegeben werden kan, welcher eine gerade Linie wäre.

[*Fig.* 31.] §. 29. Es wird nemlich eine krumme Linie dergestalt erzeuget. Ein Punct fließet, aber es ändert in jedem Augenblick die Strecke, nach welcher es fließet, oder es gehet nicht in zweyen der kleinsten Theilchen der Zeit nach einerley Strecke fort. Indem zum Exempel die Spitze der Feder die krumme Linie ABCD beschrieben hat, ist sie im Anfang nach der Strecke AE geführet worden, und würde die gerade Linie AE beschrieben haben, wenn sie dieser Strecke gefolget wäre, allein kaum hat sie angefangen sich nach AE zu bewegen, so hat sie schon aufgehöret diese Strecke zu verfolgen, und angefangen nach einer andern zu gehen, welche sie wieder so gleich mit einer neuen verwechselt hat, so daß in B sie nunmehro nach einer gar merklich andern Strecke BF gegangen ist. Von dannen bis in C sind wieder dergleichen beständige Veränderungen der Strecken in jedem Augenblick der Bewegung vorgegangen, bis die Spitze der Feder in C angelanget ist, allwo sie sich nach CG zu bewegen angefangen. Aber auch nach dieser Strecke hat sie sich nicht länger als einen undenklich klei-

nen Augenblick beweget, und auf die Art ist sie endlich mit beständig veränderter Bewegung in D gekommen.

§. 30. Auf die Art werden alle krumme Linien beschrieben, und das Exempel eines Menschen, welcher beym Spatzierengehen seinem eigenen Schatten folget, welches wir oben IV, 17. gegeben haben, machet dieses gar deutlich. Man siehet hieraus, daß unendlich viele Arten von unendlich vielen deraleichen Linien erdacht werden können. Denn die verschiedene Gesetze, nach welchen ein Punct bey seiner Bewegung die Strecken verändern kan, nach welchen er gehet, sind ohnmöglich alle zu erzehlen, und es bleibt noch immer eine unbeschreibliche Menge übrig, wenn man deren auch noch so viele angegeben, und noch so viele krumme Linien beschrieben hat.

§. 31. Sie gehören alle in die Geometrie, und müssen in dieser Wissenschaft betrachtet werden, aber sie gehören nicht alle in die Anfangsgründe derselben. Man hat sich einen gewissen Plan der Betrachtungen gemacht, welche in diesen Anfangsgründen vorzutragen sind, und man hat gefunden, daß die Abhandlung der krummen Linien zu dem Zweck, welchen man sich dabey vorsetzet, ohnnöthig sey, bis auf eine einzige, deren Eigenschaften man in den Anfangsgründen in Erwegung ziehen muß, weil sie bey der Auflösung der allerersten Aufgaben unentbehrlich ist. Diese ist der **Umkreis eines Cirkuls.** Wir werden sagen was dieser sey, wenn wir vorhero einige andere Begriffe werden beygebracht haben, ohne welche jener nicht deutlich werden kan.

Oberflächen.

[*Fig. 32.*] §. 32. Man kan sich vorstellen, daß die **Oberflächen** erzeuget werden, indem eine Linie, sie mag gerade oder krum seyn, fortfließet; nur muß diese Linie, wenn sie gerade ist, nicht nach ihrer eigenen Strecke gehn, weil sie sonst nichts anders als eine gerade Linie, von welcher sie selbst einen Theil abgiebt, beschreiben würde: sondern sie muß sich seitwerts bewegen. Die gerade Linie AB thut nichts anders, als daß sie sich selbst verlängert, wenn sie nach ihrer eigenen Strecke BC fortgehet, sie beschreibet aber eine Oberfläche, wenn das Punct B einen andern Weg als BC nimmet, und sich in der Linie BD beweget, es mag nun BD eine gerade oder eine krumme Linie seyn, und die übrigen Theile der Linie mögen sich bewegen wie sie wollen. Wie bereits erinnert worden ist, so kan eine krumme Linie ebenfals durch ihre Bewegung eine Oberfläche erzeugen; nur muß sie sich so bewegen, daß beständig einige Theile derselben außer die

Oerter kommen, welche vorhero andere Theile dieser krummen Linie eingenommen haben. Was von der geraden Linie und ihrer Bewegung gesaget worden ist, kan die Sache zwar vor sich klar machen: solte aber doch noch einiger Zweifel übrig bleiben, so wird die Anwendung denselben gewiß heben, und er kan nicht einmal einen großen Einfluß in das folgende haben.

§. 33. Eine Oberfläche kan entweder eben oder uneben seyn. Jene nennen wir auch schlechterdings eine **Ebene**, oder eine **Fläche**. Man kan den Begrif von beyden auf diese Art feste setzen: Eine Ebene läßet sich durch gerade Linien in so viele gleiche Theile theilen als man wil, und wie man wil. Bey einer unebenen Fläche mag man wohl zuweilen eine solche Theilung auf eine oder die andere Art angehen, aber man kan sie doch nicht vollkommen nach Belieben und beständig fort verrichten.

[*Fig.* 33.] §. 34. Man stelle sich bey A B C ein glatt abgehobeltes Brett vor. Wenn man an die zwey Puncte desselben A und B einen ausgespanneten Faden anhält, so fället derselbe ganz in die Oberfläche des Bretts, und bezeichnet auf derselben die gerade Linie AB, welche die Oberfläche in zween Theile theilet. Man hätte aber dergleichen Puncte als A und B auch anderswo in dieser Oberfläche annehmen können; und eine gerade Linie, oder unser Faden, von einem derselben bis zu den andern gezogen, würde die Fläche nach wie vor getheilet haben. Eben dergleichen läßet sich bey allen Theilen thun, in welche die Oberfläche zerschnitten werden kan. Dieses ist das Merkmaal, daß das Brett eben sey: und wenn man sich vorstellet, daß dasjenige, was bey einem Brette mit dem Faden gethan werden kan, bey einer Oberfläche recht vollkommen genau eintreffe, und daß sich dieselbe durch eine vollkommen gerade Linie so theilen lasse, wie unser Brett mit dem Faden getheilet wird, so ist dieselbe eine wahrhafte Ebene. Die Oberfläche eines gemeinen gläsernen Spiegels kommet einer wahrhaften Ebene ziemlich nahe.

[*Fig.* 34.] §. 35. Auf der andern Seite stelle man sich eine Oberfläche von der Art vor, als ohngefehr ein zusammen gerolletes Papier giebt. Es ist wahr, man kan in einer solchen Oberfläche zwey Puncte A und B nehmen, und diese mit einer geraden Linien zusammen henken, welche ganz und gar in die Oberfläche fält, und dieselbe in zween Theile theilet. Und zwar können in der Oberfläche gar viele Puncte seyn, bey welchen dieses zutrift; wie man denn würklich überall, nach der Länge einer solchen Rolle, in ihrer Oberfläche, eine gerade Linie ziehen kan. Aber auf eine andere Art gehet dieses nicht an. Man nehme die zwey Puncte C und D, und verknüpfe sie mit einer geraden Linie CD, welche man sich als einen von C nach D

straf gezogenen Faden vorstellen kan: so fält diese gerade Linie CD nicht in die Oberfläche. Oder wil man in der Oberfläche, von C nach D eine Linie CED ziehen, so kan dieselbe ohnmöglich gerade werden. Durch die gerade Linie CD aber wird die Oberfläche keines weges getheilet. Denn eine Linie, welche nicht in einer Oberfläche, sondern außer derselben gezogen wird, kan in der Oberfläche keine Gränzscheidung machen. Eine dergleichen Oberfläche ist nicht eben, sondern **uneben** oder **gekrümmet**.

§. 36. Es ist zu bemerken, daß wir unter die Merkmale einer ebenen Fläche nicht mitgesetzet haben, daß sie bloß durch gerade Linien umschlossen seyn müsse. Es kan dieses seyn, und in diesem Falle wird die Figur dieser Ebene **Geradelinicht** genennet: Aber die Gränzen einer Ebene können auch krumme Linien seyn, denn man kan in einer jeden Ebene tausend Arten von krummen Linien verzeichnen, und in eine oder etliche derselben einen Theil der Ebene einschließen. Alsdann aber wird die Figur dieser Ebene **krummlinicht**. Dadurch wird das Wesen der Ebene nicht geändert, oder uneben gemacht was eben war: gleich wie ein Spiegel eben bleibt, man mag ihn in einen runden oder eckichten Rahmen fassen. Im Gegentheile kan auch nicht geschlossen werden, daß eine Oberfläche eben sey, wenn ihre Gränzen gerade Linien sind, denn auch krumme Oberflächen können dergleichen Gränzen haben. Man verzeichene auf einer ebenen Fläche ein Viereck, und setze auf dasselbe einen kleinen Berg von Wachs. Die Oberfläche dieses Berges kan, wie man will, krum seyn, und doch wird sie von den vier geraden Linien, welche man in der Ebene gezogen hat, umschlossen.

§. 37. Wir werden die ebene Oberflächen, weil sie einfacher sind als die unebenen oder krummen, zuerst betrachten müssen, und alle Linien, sie mögen gerade oder krum seyn, welche wir von nun an ziehen oder betrachten werden, in dergleichen Oberflächen ziehen, oder voraus setzen, daß sie in ebenen Flächen gezogen sind, bis wir uns zur Betrachtung der Lagen der Flächen selbst wenden werden. In der That können wir nicht wohl anders, denn wir können die Figuren nicht anders als auf die ebene Fläche des Papieres mahlen. Aber man könte sich doch unter den dergestalt gemahlten Figuren andere Linien vorstellen, welche nicht in der Fläche des Papiers liegen. Und dieses werden wir würklich thun müssen, wenn wir von den Cörpern handeln werden, deren Theile alle ohnmöglich in einer gegebenen Oberfläche liegen können. Es muß aber diese Betrachtung noch eine Zeitlang ausgesetzt bleiben. Die in einer Ebene gezeichnete Figuren solcher Dinge, deren Theile ebenfals alle in einer Ebene liegen, stellen den Augen

alles

alles deutlich vor, so man von denselben gedenken muß, und das bloße Ansehen derselben ist öfters hinlänglich, einige ihrer Eigenschaften zu entdecken, welches ohnstreitig bey dem Nachdenken eine besondere Erleichterung giebt.

§. 38. In der Geometrie werden alle Aufgaben durch gerade oder krumme Linien aufgelöset, welche man in einer Ebene verzeichnet. Es ist also unumgänglich nöthig, daß ein angehender Geometer vor allen Dingen eine gerade Linie in einer Ebene zu verzeichnen wisse. Dieses aber ist ein leichter Handgrif, der kaum gelehret werden darf, und in der Geometrie eben deswegen, weil es ein bloßer Handgrif ist, nicht gelehret werden muß. Es komt alles auf eine richtige Regel an, welche man in die gegebene Fläche, so wie es die Umstände erfordern, leget, und an der Schneide derselben einen Stift oder eine Feder fortführet: da denn die Spitze dieses Stifts oder der Feder die verlangte gerade Linie beschreibt.

Von den Winkeln, vor sich betrachtet.

[*Fig. 35.*] §. 39. Wenn zwo gerade Linien AB, AC in einem Puncte A zusammen stoßen, übrigens aber von diesem Puncte nach verschiedenen Puncten zu gehen, so müssen sie sich nothwendig auf eine gewisse Art gegen einander neigen; und man begreift am deutlichsten, wie es mit dieser Neigung beschaffen ist, wenn man sich auch hier vorstellet, daß die Linien AB und AC beyde in einer Ebene gezogen sind. Man hätte nemlich, nachdem AB in dieser Fläche gezogen worden ist, die AC in eben der Fläche auch anders ziehen, oder an derselben Stelle AD nehmen können, wodurch die Linien AB, AC, oder AB, AD einander sich entweder mehr genähert oder weiter von einander entfernet hätten. Oder wenn man sich die beyden Linien AB, AC als zween Stäbe vorstellet, welche bey A vermittelst eines Gewindes dergestalt an einander befestiget sind, daß sie sich, wie die Füße eines Circulinstruments, öfnen oder zusammen drücken lassen, so wird die Neigung der Linie AB gegen die AC oder AD dadurch verändert, daß man eine dieser Linien AC um das Punct A gegen die andere AB beweget, oder von dieser AB nach AD, oder noch weiter, abziehet: woraus ohne Schwierigkeit, zu sehen ist, was unter dieser Neigung eigentlich verstanden wird.

§. 40. Diese Neigung der geraden Linien gegen einander hat mit der Grösse derselben nichts zu thun, und hänget von dieser nicht im geringsten ab. Die gerade Linie AC neiget sich gegen die gerade Linie AB eben so wie der Theil derselben AE sich gegen die AB neiget, wo man auch das Punct E hinsetzen wil. Es wird aber die Neigung zwoer geraden Linien

AB und AC, oder AB und AD gegen einander ein **Winkel** genennet. Also wird durch dieses Wort bloß die Lage zwoer geraden Linien AB und AC, oder AB und AD gegen einander angezeiget, die Grösse derselben aber keines weges bestimmet. Man verkürze die Linie AC und mache AE aus derselben, oder man verlängere AE wie man will in C, so wird die Lage dieser Linie nicht verändert. Sie gehet noch immer durch die zwey Puncte A und E, durch welche sie Anfangs gegangen sind, und wir haben IV, 25. gesehen, daß dadurch die Lage einer geraden Linie bestimmet werde, daß man sie durch zwey gegebene Puncte ziehet. Bleibt aber die Lage der AC nach dieser Verlängerung oder Verkürzung an sich einerley, so kan auch ihre Lage gegen AB dadurch nicht verändert werden, weil man diese Linie AB unverrücket hat liegen lassen.

§. 41. Wenn verschiedene Winkel in einer Figur vorkommen, auf deren einen oder den andern sich gewisse Worte des Textes beziehen, so würde man sich entweder sehr weitläuftiger und verdrießlicher Umschweife bedienen müssen, oder es würde sehr oft geschehen, daß man einen ganz andern Winkel der Figur den Augen und dem Verstande vorstelte, als man solte, wenn man nicht diese Winkel mit gewissen Zeichen bezeichnete, und diese sind gemeiniglich die Buchstaben des Alphabets, welcher man sich auch sonst zu dergleichen Endzweck bedienet. Und zwar kan man sich zuweilen an einem einigen Buchstaben begnügen lassen, welchen man an die **Spitze** des Winkels setzet, das ist, an das Punct, in welchem die zwo gerade Linien, welche ihn einschließen, zusammen laufen. Zuweilen aber, wenn mehr als ein Winkel an einem dergleichen Punct vorkommen, würde dieses Verwirrung machen, welche man vermeiden kan, wenn man dem ersten Buchstaben, als hier A noch zwey andere beysetzet, die man auch an die **Seiten des Winkels**, oder an die gerade Linien, welche ihn einschliessen, schreibt. Man wird also den Winkel, welchen die Linien CA und AB einschließen, BAC, oder BAE, oder auch CAB, oder EAB nennen müssen; nicht aber CBA, oder etwas dergleichen, welches deswegen zu vermeiden ist, weil bey B auch ein Winkel stehen könte, dessen eine Seite AB, und die andere eine gerade Linie wäre, die man sich zwischen C, B vorstellen mag, welchen man mit dem Winkel bey A verwechseln könte, wenn man C, B, A ohne Unterscheid nehmen wolte.

[*Fig. 36.*] §. 42. Das gewisseste und natürlichste Zeichen, das zwo gerade Linien einander gleich sind, ist, wenn sie auf einander können gepasset werden, das ist, wenn man sie so zusammen bringen kan, daß ihre äußersten Puncte beyderseits zusammen fallen, wie hier bey den geraden

den Linien zwischen A und B geschehen würde, wenn man sie einander nur noch etwas näherte: und alle Welt schließet, ohne einiger Anweisung, aus dieser so genanten **Congruenz** die Gleichheit zwoer Längen: hierauf gründen sich alle Messungen derselben, vermittelst der Elle, oder eines andern beliebigen Maaßes.

[*Fig. 37.*] §. 43. Aber aus eben dem Grunde muß man auch sagen, daß zween Winkel einander gleich sind, welche man dergestalt auf einander bringen kan, daß ihre Spitzen in einem Puncte zusammen fallen, und zugleich die Seiten auf einander zu liegen kommen, oder nach einerley Strecken fortgehen. Bey A sind die Spitzen von zween Winkeln, deren einen man nur etwas weniges fortschieben darf, um zu machen, daß die Spitze desselben mit der Spitze des andern zusammen komme, und daß die Seiten dieser Winkel ebenfals auf einander fallen, und jede zwo derselben nur eine gerade Linie ausmachen. Man siehet leicht, daß dieses geschehen könne, obgleich die geraden Linien, welche die Winkel einschließen, ungleich sind: denn man verlanget nicht, daß auch die äußersten Puncte dieser Seiten auf einander fallen sollen, und dieses desmegen, weil wie IV, 40. gesagt worden ist, die Grösse der Seiten zu der Grösse der Winkel nichts beyträgt.

[*Fig. 38.*] [*Fig. 35.*] §. 44. Und hieraus ist leicht zu erachten, woraus man schließe, daß ein Winkel grösser oder kleiner sey als ein anderer. Es ist hier wieder wie bey den geraden Linien. Gesetzt, es passe die gerade Linie zwischen AB auf das Stück der Linie AC, welches zwischen eben den Buchstaben AB lieget, so ist selbst dieses das Kennzeichen, aus welchem man schließet, daß die erstere AB kleiner, und die letztere AC grösser sey. Und eben so ist es mit den Winkeln. Wenn man einen Winkel CAB innerhalb eines andern DAB dergestalt gesetzt hat, daß so wohl ihre Spitzen zusammen fallen, als auch eine Seite AB des einen Winkels CAB, auf eine Seite des andern Winkels DAB, zu liegen kömt; und es fällt die zweyte Seite AD des einen Winkels DAB, über die zweyte Seite AC des andern CAB hinaus; so schließet man, daß der erstere Winkel DAB grösser sey als der zweyte CAB.

§. 45. Man siehet auch leicht, daß diese Sätze sich umkehren lassen. Wenn nemlich zwo gerade Linien gleich sind, so müssen sie dergestalt auf einander gebracht werden können, daß ihre äußerste Puncte so wohl, als die übrigen alle, zusammen fallen, und daß aus den zwoen Linien nur eine, von eben der Länge, wird. Und wenn zwey Winkel gleich seyn, so muß man den einen derselben dergestalt auf den andern bringen können,

daß

daß so wohl ihre Spitzen als ihre Seiten zusammen fallen. Denn wenn sie nicht dergestalt auf einander passeten, sondern nach der Art, welche wir von ungleichen geraden Linien und Winkeln angemerket haben, und aus welchen ihre Ungleichheit geschlossen wird, so könte man eben daraus schließen, daß sie ungleich sind. Doch dieses sind Dinge, welche jederman einsiehet, und wir erklären sie aus keiner andern Ursache, als daß man nicht was anders darunter verstehen möge, als die allergemeinste Grundsätze aller Messungen.

[*Fig. 39.*] §. 45. Ueberhaupt also ist daraus, daß zween Winkel nicht auf einander passen können, zu schließen, daß sie ungleich seyn. Dieses aber, ob zween Winkel auf einander passen können, oder nicht, siehet man nicht nur, wenn man die Spitzen derselben auf einander gebracht, und eine Seite des einen Winkels auf eine Seite des andern geleget hat; sondern es wird dasselbe auch eben so deutlich, wenn man einen derselben ABC auf den andern DEC dergestalt setzet, daß die Seite BC auf die Seite EC zu liegen komt, ob wol ihre Spitzen B, C nicht zusammen fallen. Berühret alsdann die andere Seite AB des einen Winkels ABC, die andere Seite DE des andern, irgendwo in einem einzigen Punct A, oder schneidet sie dieselbe, so siehet man leicht, daß der Winkel ABC niemals auf den Winkel DEC genau passen werde, man mag ihn auf der EC verschieben wie man wil. Es kan, wenn BC immer in EC fällt, ohnmöglich die andere Seite BA ganz auf ED zu liegen kommen, welches erfordert wird, wenn ABC in DEC passen sol.

[*Fig. 40.*] §. 47. Dieses noch deutlicher einzusehen, stelle man sich vor, daß der Winkel DEC in einer ebenen Fläche beschrieben, der Winkel ABC aber aus Papier, Holz oder etwas dergleichen gebildet sey, und daß man untersuchen wolle, ob diese Winkel gleich sind oder nicht. Man kan zwar diesen Zweck erhalten, wenn man gleich anfangs die Spitze B auf die Spitze des andern Winkels E dergestalt bringt, daß auch die Seite BC in die EC falle. Denn fällt alsdann die Seite BA auf die ED, so sind die Winkel gleich; wo nicht, so sind sie ungleich, und man siehet leicht welcher der grössere sey. Man kan aber auch die Untersuchung damit anfangen, daß man nur die BC an die EC leget, ohne die Spitze B auf die E zu bringen. Schneidet nun die BA die ED nicht, welches bey der gegenwärtigen Zeichnung so seyn wird, wenn sich diese ED würklich bey D endiget; so kan man nicht immer wissen ob die Winkel DEC, ABC gleich sind, oder nicht: noch viel weniger kan man sagen, welcher von diesen beyden Winkeln DEC, ABC der grössere sey. Hat man aber die Linie ED

bis

bis in F genugsam verlängert, oder das Punct B der Spitze E so lange genähert, daß nunmehro die EF an die AB anlauft, so daß das Punct F in die BA fällt; so ist man gewiß versichert, daß der Winkel ABC dem Winkel DEC unmöglich gleich seyn könne. Denn es ist in diesem Fall nicht möglich die BC auf der EC dergestalt fortzuschieben, daß endlich das Punct B auf E und zugleich die Seite BA auf ED zu liegen komme.

§. 48. Man kan aber auch in dem Fall, wenn die EF an die BA anlauft, das ist, wenn das äußerste Punct derselben F in die AB fält, mit Gewisheit schließen, daß der Winkel ABC größer sey als DEC. Man nehme anstatt dieses Winkels DEC den größern GEC, und stelle sich vor, daß man die Seite BC noch immer auf der EC fortschieben, und dadurch die Spitze B der Spitze E nähern wolle, damit man gewiß werde, ob der Winkel ABC größer oder kleiner sey als GEC, oder ob diese Winkel gleich sind. So ist klar, daß sich der Winkel ABC frey in den Winkel GEC hineinschieben lassen müsse, wenn ABC nicht größer seyn soll, als GEC. Und zwar muß das Punct B ehe das Punct E erreichen, als die Seite AB das Ende G der Seite EG erreichet, wenn ABE kleiner seyn soll als GEC. Soll aber ABC den Winkel GEC gleich seyn, so muß zugleich B die Spitze E und die Seite BA das Punct G erreichen, und also EG auf die AB zu liegen kommen. Geschichet also keines von beyden: lässet sich der Winkel ABC nicht frey in die GEC hineinschieben, so daß B auf E falle, sondern es erreichet die Seite AB das Punct G ehe, als B auf E fällt: so kan der Winkel ABC weder kleiner als GEC noch diesen Winkel GEC gleich seyn. Es ist also ABC nothwendig größer als GEC, gleich wie ABC aus diesem Grunde größer ist, als FEC.

[*Fig.* 39.] §. 49. Wird nun dieses auf die 39 Zeichnung angewendet, welche wir eben betrachtet haben, da nemlich von einem Punct A an eine gerade Linie EC zwo andere gerade Linien AE und AB gezogen sind, so siehet man, daß nicht nur die Winkel AEC, ABC, welche diese letztern Linien mit der erstern EC einschließen, ungleich sind, sondern man begreift zugleich, daß der äußere Winkel ABC größer sey als der innere AEC. Es ist nemlich von solchen Winkeln die Rede, deren Oefnungen nach einer Seite gekehret sind. Diese sind AEC, ABC. Die Oefnungen der Winkel AEC und ABC sind nicht nach einerley Seite gekehret, sondern sie sehen einander entgegen.

[*Fig.* 40.] §. 50. Wenn demnach an einer geraden Linie EC zwo gerade Linien ED, BA dergestalt liegen, daß sie mit der EC die gleiche Winkel DEC und ABC, deren Oefnungen nach einer Seite zu gekehret sind,

einschließen, so können diese Linien ED und BA nicht zusammen laufen, man mag sie von E gegen D, und von B gegen A, verlängern wie man will. Denn, wenn die Linien ED, BA irgendwo zusammmen laufen, wie die Linien ED, BA der vorigen 39 Figur in A zusammen kommen, so müssen die Winkel DEC und ABC ungleich seyn, welches demjenigen widerspricht, so von demselben angenommen wird. Wir werden hernach sehen, daß die Linien AB, DE auch nicht an der andern Seite der EC zusammen laufen können.

[*Fig.* 407.] §. 51. Setzet man aber an eine gerade Linie EC einen Winkel ABC, und noch einen andern DEC, welcher DEC kleiner ist als der vorige ABC, dergestalt daß der kleinere Winkel der innere, der größere aber der äußere wird; so müssen die Seiten dieser Winkel BA, ED, wenn man sie so sehr als nöthig ist, verlängert, einander nothwendig antreffen und schneiden. Es wird auch hier, wie beständig, angenommen, daß die Winkel ABC, DEC in eben der Fläche verzeichnet sind. Denn wenn dieses nicht wäre, so müste allerdings eine der Seiten ED bey der andern BA vorbey gehen, und könte diese nirgends antreffen. Liegen aber die Winkel ABC, DEC beyde in eben der Fläche, und man schiebet in Gedanken den Winkel ABC dergestalt gegen die Spitze des kleinern E, daß die Seite BC immer in der Linie EC bleibt, so siehet man, daß AB endlich daß äußerste Punct D der Seite ED antreffen müsse, so klein auch diese ED seyn mag. Denn wenn dieses nicht wäre, so könte IV, 48. der Winkel ABC nicht größer seyn als DEC, welches doch angenommen wird. Gesetzt nun, es falle das Punct D in die Linie AB, nachdem der Winkel ABC dergestalt an der EC fortgeschoben worden ist, daß nunmehro B in b und AB in ab fällt; so folgt aus der Beschaffenheit der geraden Linie ED, welche man ohne Ende verlängern kan, daß, wenn man sie verlängert, sie die ab schneiden müsse. Denn wie solte sie sonst von dem Punct D an weiter fortlaufen? Es gehet also die verlängerte ED nunmehro diesseits der ab fort; endiget man sie wie man will bey d, so fällt dieses Punct d zwischen die Linien ab und AB, und man siehet, daß bey unverändertem Winkel abc man die ab der AB näher bringen könne, ohne daß sie aufhöre ein Punct, und wenn man will, selbst das letzte Punct d, mit der verlängerten ED gemeinschaftlich zu haben. Stellet man sich aber vor daß die ab nunmehro durch d gehe, gleichwie sie durch D gezeichnet ist, so kan eben dieser Schluß wiederholet, und dadurch gezeiget werden, daß die verlängerte AD auch eine Linie erreichen werde, welche der AB noch näher liegt, indem sie, wie alle übrigen deraleichen Linien, mit der EC einen Winkel einschließet, der dem ABC gleich ist. Endlich komt, indem die ED beständig verlängert, und ab auf die angezeigte Art fortgeschoben wird, diese ab selbst

selbst auf die AB zu liegen: und weil die ab in jeder Lage von der ED geschnitten wird; so wird auch die AB von eben der verlängerten ED geschnitten, wenn man nur auch die AB hinlänglich vergrößert, falls dieses nöthig ist.

§. 52. Die Winkel werden in drey Arten eingetheilet. Man hat **rechte** oder **gerade**, **spitzige** und **stumpfe** Winkel, ihre Verschiedenheit bestehet nur in ihrer Größe. Die spitzigen Winkel sind die kleinesten, die rechten sind etwas größer, und die stumpfen die allergrösten. Doch dieses setzet die Begriffe nicht vollkommen fest, wir werden uns netter erklären müssen.

[*Fig.* 41.] §. 53. Man stelle sich demnach eine gerade Linie auf einer beugsamen Fläche, zum Exempel auf einem Blat Papier gezogen vor. Diese sey AB. Man falte das Papier zusammen, aber so, daß das eine Ende der geraden Linie B wieder in eben diese gerade Linie zu liegen komme. Wenn man nun das Papier bricht, und machet, daß seine zwey Theile dichte auf einander liegen, so muß auch der eine Theil der Linie AB ganz und gar auf dem andern zu liegen kommen IV,21. Gesetzt das Papier sey nun wieder aufgethan, die Biegung aber oder der Bruch, welcher in demselben durch das Zusammenfalten gemacht worden, sey CD, so ist leicht einzusehen, daß indem die Linie DB dergestalt auf die AD geleget worden, auch der Winkel CDB mit den Winkel CDA zusammen gefallen sey: woraus folget, daß der Winkel ADC dem Winkel CDB gleich seyn müsse. Man kan demnach auf eine jede gerade Linie AB eine andere gerade Linie so setzen, wie wir uns hier den Bruch des Papiers CD vorstellen, daß nemlich diese letztere Linie CD mit der erstern zween neben einander stehende Winkel CDA und CDB machet, welche einander gleich sind. Und die angegebene Art dieses zu verrichten kan uns indessen hinlänglich seyn, bis wir eine bessere und bequemere finden.

§. 54. Wenn aber eine gerade Linie CD auf einer andern AB so stehet, daß sie mit derselben zween gleiche Winkel machet, ADC, CDB, welche beyde an einander, und an einer Seite der letztern Linie AB liegen; so sagt man, die erstere Linie CD stehe **gerade auf** der letztern AB, oder sey auf diese AB **perpendicular**, und wir werden hernach sehen, daß in diesem Fall auch die Linie AB oder ein Stück derselben AD, oder DB auf CD perpendicular sey. Im Gegentheil, wenn eine Linie auf eine andere dergestalt fället, daß die zween neben einander stehende Winkel ungleich werden; so saget man, daß jene Linie auf dieser schief stehe. Auf der geraden Linie AB stehet DE dergestalt, daß sie mit derselben zween ungleiche Winkel ADE, EDB machet. Dieses ist dasjenige, was man damit ausdrücken will, wenn man saget die DE stehe schief auf der AB.

§. 55. Man kan auf eine jede gerade Linie AB eine andere CD perpendicular setzen. Dieses ist eben dasjenige, so ohnlängst mit andern Worten gesagt worden ist. Man kan machen, daß diese perpendicular-Linie durch ein jedes Punct gehe, es mag dasselbe liegen, wo es will: Wir schränken uns aber hier nur auf den Fall ein, wenn dieses Punct nicht außer der Fläche lieget, in welcher die Linie AB gezogen ist. Man darf zu dem Ende nur das Papier nach der angegebenen Art also falzen, daß der Bruch durch das gegebene Punct C oder D gehe. Dieses fließet aus dem IV, 53. gegebenen Begrif der perpendicular-Linie, eben so deutlich, als ob wir dergleichen Linien bereits auf eine bequemere und der Geometrie gemässe Art zu ziehen wüsten, welche erst künftig wird können gezeiget werden. Denn diese gegenwärtige Anweisung wird bloß zu dem Ende gegeben, damit der Begrif desto deutlicher werde, und ist von derjenigen Art, nach welcher die Geometrie etwas verfertigen oder heraus bringen lehret, weit unterschieden.

§. 56. Der Winkel nun, welchen eine gerade Linie CD mit einer andern AB einschließet, auf welcher sie perpendicular stehet, das ist der Winkel ADC, oder der Winkel CDB wird ein **gerader** oder **rechter** Winkel genennet. Alle übrige Winkel, die keine gerade sind, heißen schiefe Winkel. Es sind nicht allein die beyden Winkel ADC und CDB einander gleich; sondern auch alle übrige gerade Winkel, die man nur machen oder sich vorstellen kan, sind ebenfals einem dieser beyden geraden Winkeln ADC, CDB, und einander selbst, gleich. Denn woher solte die Ungleichheit bey denselben herkommen? Sie entstehen alle vollkommen auf einerley Art, indem man nemlich auf gerade Linien, welche nicht anders als nach der Größe von einander unterschieden seyn können, andere gerade Linien dergestalt setzet, daß diese mit jenen zu beyden Seiten gleiche Winkel machen. Die verschiedene Größe der Seiten verändert in der Größe der Winkel nichts, IV, 40. dieses aber ist das einzige, welches bey so gestalten Sachen bey geraden Winkeln verschieden werden kan.

§. 57. Wenn nemlich auf einer geraden Linie AB eine andere CD perpendicular stehet: so kan keine neue Linie gezogen werden, welche auf eben der Linie AB perpendicular ist, und durch eben das Punct D der Linie AB gehet, durch welches CD gezogen worden. Solte man hiebey Schwürigkeiten finden, so werden sich dieselben bald verlieren, wenn man betrachtet, daß die perpendicular-Linie CD die Gleichheit der Winkel ADC, CDB erfodere, welche ohnmöglich kan erhalten werden, wenn man CD im geringsten auf diese oder die andere Seite neiget. Ist CD auf AB perpendicular, und man ziehet noch eine andere Linie DE durch das Punct D; so ist

der

der Winkel EDB ohnstreitig kleiner als CDB, der nebenstehende aber EDA ist größer als CDA, und folgends auch größer als CDB. Wie können denn also die Winkel EDA und EDB einander gleich seyn? Diese Gleichheit der Winkel EDA und EDB aber muß man annehmen, wenn man behauptet, es sey ED auf AB perpendicular.

[*Fig.* 42.] §. 58. Es kan aber auch durch das Punct C außer der AB, durch welches bereits CD auf AB perpendicular gezogen worden ist, keine andere Linie gehen, welche ebenfals auf die AB perpendicular fiele. Denn wenn man sich außer der perpendicular-Linie CD eine andere Linie CF vorstellet, welche durch C an AB gehet, so siehet man leicht, daß der Winkel CFB dem Winkel CDB ohnmöglich gleich seyn könne; weil die Linien FC, DC in den Punct C zusammen kommen, IV, 49. Ist aber der Winkel CFB dem Winkel CDB nicht gleich, so ist er kein gerader Winkel, denn CDB ist ein gerader Winkel, folgends ist auch CF auf AB nicht perpendicular.

§. 59. Da man einen geraden Winkel leicht machen, und denselben sich nach seiner vollkommenen Größe vorstellen kan, so pflegt man einen geraden Winkel zu dem Maaße aller übrigen anzunehmen, nicht allein wenn diese einzeln betrachtet werden, sondern auch dann, wenn man die Summe von zween, dreyen oder mehrern Winkel anzeigen wil. Man begreift aber die Summe zwener, dreyer, oder mehrerer Winkel gar leicht. Dieselbige zu erhalten, muß man die Winkel, deren Summe man verlangt, bey ihren Spitzen zusammensetzen, dergestalt, daß diese zusammen fallen, und eine Seite des einen eine Seite des andern berühret, die Winkel aber selbst außer einander liegen, wie in der 35 Figur mit den beyden Winkeln BAC, CAD geschehen ist: der Winkel DAB, welcher von den beyden äußersten Seiten eingeschlossen wird, ist alsdenn die Summe welche gesucht wird.

[*Fig.* 41.] §. 60. Wenn man auf die Art zween gerade Winkel zusammen setzet, so machen allezeit ihre äußersten Seiten mit einander eine gerade Linie aus. Denn man stelle sich die gerade Linie AB als bereits gezogen vor, und setze an dieselbige den geraden Winkel CDB: so wird CD auf AB perpendicular, und CDA ebenfals ein gerader Winkel seyn. Wenn man demnach an diese CD einen andern geraden Winkel dergestalt setzet, daß seine Spitze in D falle, und seine Oefnung nach A gekehret sey, so kan die andere Seite desselben nicht außer AD fallen, weil sonst zween gerade Winkel einander nicht decken würden, und folgends einer derselben grösser wäre als der andere. IV, 45. Man kan sich demnach eine jede gerade Linie AB vorstellen, als ob sie aus zweyen Theilen, AD und DB zu-

sammen gesetzet wäre, welche mit einander einen Winkel ADB einschließen, der zween rechten Winkeln gleich ist.

§. 61. Aus der erwehnten Ursache, weil man einen geraden Winkel so leicht haben kan, wird er auch zur Bestimmung der Art der übrigen Winkel angenommen. Die Winkel können nichts anders als nach ihrer Grösse von einander verschieden seyn. Hätte man kein gewisses Maaß, nach welchem man ihre Grösse beurtheilen könte, so wäre es ohnmöglich diese verschiedene Grösse genau und verständlich anzugeben, und die besondern Arten der Winkel fest zu setzen. Da wir aber die geraden Winkel haben, können wir bey dieser Eintheilung nachfolgender maßen verfahren.

§. 62. Wenn ADC und CDB gerade Winkel sind, und man hat durch D eine andere gerade Linie DE gezogen, welche auf der AB nicht perpendicular sondern schief stehen wird, so ist der Winkel EDB, kleiner, und EDA grösser als ein gerader Winkel CDB, oder CDA. Ein jeder Winkel der wie EDB kleiner ist als ein gerader Winkel, heisset ein **spitziger** Winkel, und ein jeder Winkel, der grösser ist als ein gerader Winkel, als EDA, wird ein **stumpfer** Winkel genennet. Die rechten Winkel, die spitzigen, und die stumpfen sind die drey Arten der Winkel, welche man von einander insonderheit zu unterscheiden hat. So wohl die spitzigen als die stumpfen werden **schiefe** Winkel genennet. IV, 56.

§. 63. Ziehet man, wie eben geschehen ist, von der Spitze eines geraden Winkels CDB, eine gerade Linie DE innerhalb desselben, so bekomt man zween Winkel BDE und EDC, welche zusammen einen geraden Winkel ausmachen. Einer derselben, welchen man nehmen will, heißet die **Ergänzung** des andern zu einem rechten Winkel, oder auch schlecht weg, seine Ergänzung. Denn da man einen rechten Winkel als eine ganze Einheit ansieht, nach welcher man die übrigen Winkel misset IV, 59. so hat man allerdings einen spitzigen Winkel EDB nicht anders als einen Theil, welcher durch den Zusatz eines andern Theils CDE ein Ganzes wird, zu betrachten. Ist der Winkel grösser als ein gerader Winkel, so nennet man, wie wol nicht so eigentlich, denjenigen Winkel, um welchen er einen geraden Winkel übertrift, und welcher also abgezogen werden muß, wenn ein gerader Winkel übrig bleiben soll, seine **Ergänzung** zu einen geraden Winkel.

§. 64. Ist nun wiederum auf eine gerade Linie AB eine andere CD perpendicular gestellet worden, und man ziehet so dann von D eine andere Linie DE, nach welcher Seite man wil, so machen die zween Winkel CDE + EDB zusammen einen rechten Winkel CDB aus. Da nun ADC

auch

auch ein rechter Winkel ist: so müssen die drey Winkel ADC+CDE+EDB zween rechten Winkeln gleich seyn. Setzet man die zween erstern Winkel zusammen, und machet aus ADC+CDE den einzigen Winkel ADE, so ist dieser Winkel ADE mit dem Winkel EDB zusammen ebenfalls zween rechten Winkeln gleich. Und so ist es mit jeden zween Winkeln, welche eine gerade Linie ED machet, indem sie schief auf eine andere gerade Linie AB fället. Sie sind allezeit zusammen zween rechten Winkeln gleich. Denn wenn die Perpendicular-Linie CD noch nicht gezogen ist, so kan man doch allezeit eine ziehen, oder sich eine als gezogen vorstellen, und so dann eben den Beweiß führen. Wenn also eine gerade Linie CD oder ED auf eine andere AB fällt, so macht sie mit dieser entweder würklich zween rechte Winkel, oder doch zween solche, die zween rechten Winkeln gleich sind.

§. 65. Man kan diesen Beweis etwas kürzer verfassen. Die Summe der Winkel ADE+EDB gibt den Winkel ADB. Nun ist ADB eine gerade Linie, und folgends der Winkel ADB, welchen die Theile derselben AD und DB mit einander machen, zween rechten Winkeln gleich IV, 60. Demnach beträget auch die Summe der Winkel ADE und EDB zween rechte Winkel.

§. 66. Ein Winkel wie EDB, welcher mit einem andern EDA eine Summe giebt, die zween geraden Winkeln gleich ist, heißet des erstern seine Ergänzung zu zweyen geraden Winkeln. Denn Grund dieser Benennung haben wir IV, 63. berühret.

[*Fig.* 43.] §. 67. Wenn, nachdem DE aus dem Punct D einer geraden Linie AB gezogen ist, man aus eben dem Punct D noch mehrere gerade Linien DF, DG ziehet, welche die Winkel ADE und EDB theilen, so kan die Summe der Winkel, die auf die Art kommen, ADF, FDE, EDG und GDB nicht mehr und nicht weniger betragen, als die Summe der zween vorigen ADE und EDB. Da nun die beyden Winkel ADE, EDB zween rechten Winkeln gleich sind, so müssen auch alle Winkel über der AB deren Spitzen in dem Punct D zusammen fallen, zween rechte Winkel geben. Wenn man also einen Punct D, in einer geraden Linie AB annimt, und von demselben so viele gerade Linien ziehet als man wil DF, DE, DG, alle an einer Seite der AB, so geben die Winkel, die auf die Art heraus kommen, zusammen genommen, immer zween gerade Winkel.

§. 68. Und das Kennzeichen, daß verschiedene Winkel zusammen genommen zween gerade Winkel ausmachen, ist, wenn sie sich neben einander auf eine gerade Linie setzen lassen, oder wenn, indem man sie zusammen

men setzet, ihre Summe zu finden, wie die Winkel BDG, GDE, EDF, FDA, neben einander stehen, die beyden äußersten Seiten DA, DB keinen eigentlichen Winkel einschließen, oder sich nicht gegen einander neigen, sondern mit einander eine gerade Linie ADB ausmachen. Geschiehet dieses nicht, und machen die beyden äußersten Seiten der dergestalt zusammen gesetzten Winkel nicht eine gerade Linie, so beträgt die Summe der Winkel, welche man zusammen gesetzt hat, weniger oder mehr als zween rechte Winkel: und es ist leicht zu sehen, in welchem Fall das erstere oder das letztere statt habe, wenn man sich nur daran hält, daß die Theile AD, DB der geraden Linie AB mit einander einen Winkel machen, der zween rechten gleich ist.

§. 69. Wenn demnach die Summe verschiedener Winkel zween rechten Winkeln gleich ist, und man setzt sie, wie eben gesagt worden ist, zusammen, so müssen die äußersten Seiten DB, DA mit einander eine gerade Linie ausmachen. Wäre dieses nicht, so betrügen die zusammengesetzte Winkel weniger oder mehr als zween gerade. Es könte demnach ihre Summe nicht zween geraden Winkeln gleich seyn.

[*Fig. 44.*] §. 70. Ziehet man aus einem Punct D der geraden Linie AB nicht allein an der einen Seite dieser geraden Linie verschiedene andere, DG, DE, sondern thut dieses auch auf der andern Seiten, indem man DF, und wenn man will, noch andere gerade Linien ziehet; so beträgt die Summe aller Winkel, welche disseits der geraden Linie AB stehen, BDF+FDA, so wohl zween gerade Winkel, als die Summe aller Winkel jenseits BDG+GDE+EDA zween gerade Winkel beträgt. Demnach macht die Summe aller Winkel disseits, wenn man sie zu der Summe aller Winkel jenseits hinzu setzet, zwey mal zween, oder vier gerade Winkel aus. Das ist, die Summe aller Winkel, die rings herum um das Punct D stehen, beträgt vier gerade Winkel. Löschet man eine oder die andere dieser Linien weg, oder ziehet eine neue von dem Punct D nach welcher Seite man will, so wird die Summe der Winkel weder vermehret noch verringert; sie bleibt demnach ebenfals noch vier rechten Winkeln gleich. Es ist demnach die angegebene Grösse der Summe aller Winkel, die um einen Punct stehen, richtig, ob zwar keine derselben Linien, wie in unserer Zeichnung ADB, in einem gerade durchgehet.

§. 71. Dieser Satz brauchet noch eine kleine Erläuterung; denn es hat bey demselben ein Zweifel statt. Wenn man so viele der aus dem Puncte D gezogenen Linien weglassen kan, als man will, ohne daß dadurch in der Summe aller Winkel, die um das Punct D stehen, eine Verände-

änderung vorgehe: so müssen auch jede zwo Linien, die bey D zusammen stoßen, als ED, DB um dieses Punct Winkel machen, deren Summe vier geraden Winkeln gleich ist. Nun scheint es, daß die Linien ED, DB keinen andern als den Winkel EDB mit einander einschließen, und dieser ist in unserer Zeichnung nicht einmal so groß als zween rechte Winkel. Die Antwort auf diesen Einwurf ist: die Linien ED, DB machen würklich zween Winkel mit einander. Der erste ist derjenige, so aus den zween Winkeln EDG, GDB zusammen gesetzet ist, und dieser ist allerdings in der gegenwärtigen Zeichnung kleiner als zween rechte Winkel. Der zweyte aber bestehet in dieser Zeichnung aus den drey Winkeln EDA, ADF, FDB, und ist grösser als zween gerade Winkel. Die Summe aber dieser zween Winkel, welche die ED mit der DB einschließet, des inwendigen nemlich und des äußern, beträgt genau vier gerade Winkel. Man ist nicht nur in diesem Satz gezwungen, dergleichen äußere Winkel anzunehmen, die größer sind als zween gerade, sondern auch in verschiedenen andern: und wenn man sie nicht annehmen wolte, würden verschiedene Sätze, nicht allgemein, oder falsch und unrichtig werden.

[*Fig. 30.*] §. 72. Dieses sind Sätze, welche aus dem Begrif eines Winkels und seiner Größe unmittelbar folgten. Es ist noch ein dergleichen Satz übrig, welcher sich nicht viel schwerer, ja fast noch leichter einsehen lässet. Wenn zwo gerade Linien einander schneiden, und mit einander vier Winkel machen, so sind diejenige, welche einander entgegen gesetzet sind, und von welchen bloß die Spitzen einander berühren, einander gleich. Die 30 Zeichnung erkläret die Sache deutlich. Um das Punct A stehen vier Winkel, welche entstanden sind, indem die geraden Linien EB, DC einander geschnitten haben. Zween dieser Winkel DAE, BAC liegen nirgends an einander, als an ihren Spitzen; eben so ist es mit den DAB und EAC. Und von diesen wird gesaget, daß sie einander gleich sind, nemlich DAE=BAC, und DAB=EAC, nicht aber DAE=DAB, oder BAC=CAE, denn diese haben die angezeigete Lage nicht, und es ist auch bloß aus der Zeichnung sichtlich, daß sie ungleich seyn können.

§. 73. Ich sage, dieses sey noch einiger maßen leichter einzusehen als das vorige, denn der bloße natürliche Verstand giebt es. Man stelle sich vor, daß man die gerade Linien EB, DC nach Belieben gezogen habe; und fraae sich selbst, auf welcher Seite der größere Winkel liege? ob BAC größer sey als DAE, oder ob umgekehrt DAE der größere und BAC der

kleinere Winkel sey? Man wird nichts finden so einen vermögen könte, vielmehr das eine als das andere zu antworten; denn es ist würklich nichts da, wodurch diese Winkel verschieden werden könten.

§. 74. Dergleichen Beweise sind gar gut, aber in der Geometrie erfordert man ein mehreres. Man ist in dieser Wissenschaft nicht mit jedem Beweise zufrieden, sondern erfordert solche, welche eine vollkommene Ueberzeugung geben, ohne den geringsten Zweifel übrig zu lassen: von welcher Art der gegebene Beweiß nicht ist. Man kan noch allezeit die Furcht hegen, daß vielleicht dennoch bey dem Winkel BAC etwas seyn möchte, so bey dem DAE nicht anzutreffen ist, welches man nur wegen Mangel genugsamer Einsicht, nicht bemerken können. Zu dem ist es in dieser Wissenschaft um einen beständigen Zusammenhang zu thun. Man suchet immer Satz mit Satz, das nachfolgende mit dem vorhergehenden, zu verknüpfen. Der nachfolgende Beweiß wird beydes leisten: wobey, wie im künftigen, wenn von Winkeln die Rede seyn wird, beständig R einen rechten Winkel bedeuten soll, und folgends 2 R, zween rechte Winkel, 3 R, drey rechte Winkel, und so fort.

§. 75. Auf der geraden Linie EB stehet die gerade Linie AD, und ist aus einem Punct der EB, nemlich aus A, fortgezogen. Es ist also die Summe der beyden Winkel DAE und DAB zween rechten Winkeln gleich, oder kurz, DAE+DAB=2R. IV, 64. Eben so stehet auf der geraden Linie DC die Linie AB, also ist wie vorher, DAB+BAC=2R. Das ist, DAE+DAB=2R, und DAB+BAC=2R, woraus folget, EAD +DAB=DAB+BAC. Wenn man aber auf diese Summen Acht hat, so findet man, daß so wohl in der einen als in der andern der Winkel DAB vorkomt, und daß derselbe in der einen durch den Zusatz des Winkels EAD so sehr vermehret worden sey, als in der andern durch den Zusatz des Winkels BAC. Es können aber zween Winkel DAE und BAC, welche, wenn man sie dergestalt zu einem Winkel DAB hinzusetzet, gleiche Summen bringen, ohnmöglich ungleich seyn.

§. 76. Oder will man etwas anders verfahren, so nehme so wohl man von der einen als von der andern der zwo Summen EAD+DAB= DAB+BAC den Winkel DAB hinweg. Da die Summen gleich sind, so muß nach diesem Abzug wieder beyderseits gleiches übrig bleiben. Nimt man aber von der ersten Summe EAD+DAB den Winkel DAB hinweg, so bleibt der Winkel DAE allein übrig, und bey der letztern Summe DAB +BAC bleibt der Winkel BAC. Es muß also nothwendig der Winkel DAE dem Winkel BAC gleich seyn.

§. 77.

§. 77. Schneiden demnach zwo gerade Linien einander, und es ist einer der vier Winkel, welche sie machen, gegeben oder bekant, so sind die übrigen drey auch bekant. Denn gesetzt, es wäre uns der Winkel DAE gegeben, wir wüsten seine Grösse, und könten sie anzeigen, oder nach Belieben einen Winkel machen der so groß ist, als DAE, so wäre uns eben dadurch der Winkel BAC auch bekant, weil er jenem gleich ist. Der Winkel DAB aber ist die Ergänzung des erstern DAE zu zween geraden Winkeln, weil diese Winkel EAD und DAB neben einander auf der geraden Linie EAB stehen, IV, 64: und demnach ist DAB leicht zu haben, und kan vor bekant angenommen werden; und so auch EAC, welcher dem DAB gleich ist. Auch siehet man leicht, daß, wenn einer dieser vier Winkel gerade ist, die übrigen dreye ebenfals gerade seyn müssen.

§. 78. Dieses sind Eigenschaften der vor sich betrachteten Winkel: und wir haben die erste Verknüpfung gerader Linien gemacht, welche zu machen war, da wir sie so an einander gesetzt haben, daß sie in einem Punct zusammen kamen und einen Winkel machten, von dessen Seiten wir entweder nur eine oder alle beyde weiter fortgezogen. Wir müssen nunmehro zu geraden Linien, welche nicht zusammen stoßen, oder einander nicht berühren, übergehen.

Parallellinien.

[*Fig.* 45.] §. 79. Wir haben IV, 50. gesehen, daß zwo gerade Linien AB und DE, welche beyde mit einer dritten EC, gleiche Winkel ABC und DEC machen, nicht zusammen laufen können, wenn man sie nach der Seite ED und BA, verlängert. Man verlängere sie aber nach der andern Seite, AB in F und DE in G, und ziehe auch EC in H fort, so ist der Winkel ABC dem Winkel HBF gleich, und der Winkel DEC = HEG. IV, 72. Da nun die Winkel ABC und DEC einander gleich sind, so können die andern zween, HBF und HEG, unmöglich ungleich seyn. Es ist also HEG = HBF, und auf der geraden Linie HC stehen zwo gerade Linien EG und BF, welche mit derselben zween gleiche Winkel HEG, HBF einschließen, die beyde nach einer Seite gerichtet sind. Also laufen die geraden Linien BF und EG auch nicht zusammen, wenn man sie beyde nach EG, BF verlängert, IV, 50. und die geraden Linien AF, DG liegen so, daß sie gar nicht zusammen kommen können, man mag sie auf dieser oder jener Seite fortziehen. Alle gerade Linien, welche mit einer dritten gleiche Winkel einschließen, die nach einer Seite gekehret sind, haben diese Eigenschaft.

§. 80. Gerade Linien aber, welche nicht zusammen laufen, man mag sie auch verlängern wie man will, heißen **Parallellinien**, oder man pfleget die Lage einer derselben in Ansehung der andern dadurch anzuzeigen, daß man saget, sie sey dieser **parallel**. So ist DG der AF parallel und AF der DG. Wir haben schon gesagt, daß hier alle Linien, welche wir betrachten, in einerley Ebene angenommen werden, und dieses ist bey den Parallellinien am wenigsten zu vergessen. Denn liegen zwo Linien nicht in einer Ebene, so ist es wohl möglich daß sie niemals zusammen laufen, ohne daß sie einander parallel sind; und ist auf dieselbe dasjenige, so von den Parallellinien zu sagen ist, keines weges anzuwenden. Zwo gerade Linien, deren eine auf dem Tisch, die andern aber auf dem Boden des Zimmers nach verschiedenen Strecken gezogen sind, eine ohngefehr von Mittag nach Mitternacht, und die andern von Morgen gegen Abend, geben ein Exempel von solchen Linien, welche einander niemals antreffen, und doch keine Parallellinien sind. Sie sind nemlich nicht in einer einigen Fläche gezogen, oder man kan sich keine ebene Fläche vorstellen, in welcher diese Linien beyde befindlich wären.

§. 81. Man siehet leicht, daß eben diese Lage der geraden Linien AF und DG auch daraus könne geschlossen werden, wenn der Winkel DEB, dem Winkel EBF gleich ist; und daß jede zwo gerade Linien AF, DG parallel sind, welche von einer dritten HC dergestalt geschnitten werden können, daß die eben genanten Winkel DEB, EBF einander gleich sind, welche beyde zwischen den zwo Linien DG und AF, und an verschiedenen Seiten der Linie HC liegen, der eine zum Exempel wie hier DEB über dieser Linie, und der andern EBF unter derselben. Denn der Winkel EBF ist dem Winkel ABC nothwendig gleich, weil die geraden Linien AF und HC einander in B schneiden, und diese Winkel einander entgegen stehen, IV, 72. Ist nun also der Winkel EBF dem Winkel DEB gleich, so muß nothwendig auch ABC (=EBF) eben dem Winkel DEB gleich seyn. Ist aber ABC = DEB, so sind die geraden Linien DG und AF parallel, IV, 79. Demnach sind sie auch parallel, wenn die Winkel DEB und EBF gleich sind.

§. 82. Auch hier kan man sich einer gar natürlichen Art zu schließen bedienen, um dasjenige zu erweisen, so wir eben gezeiget haben. Die geraden Linien AF und DG werden von einer dritten geraden Linie EB beyde geschnitten, und es sind die Winkel DEB und EBF einander gleich. Dieses ist angenommen worden, und man siehet leicht ein, daß auch die übrigen Winkel ABE, BEG, als jener ihre Ergänzungen zu zween geraden Winkeln, gleich seyn müssen. Ist aber dieses, so ist alles zu beyden Seiten

ten der Linie EB einerley. Die Theile der geraden Linien AB, DE, welche an der einen Seite der EB liegen, machen eben solche Winkel mit derselben, als diejenigen Theile, die an der andern Seite derselben liegen EG und BF. Sind nun die Linien AB und DG nicht parallel, so müssen sie, wenn man sie verlängert, zusammen laufen, entweder auf einer Seite der Linie EB, oder auf der andern. Denn wenn sie weder da noch dort zusammen kommen, so sind sie parallel. Aber warum sollen sie mehr auf dieser als auf jener Seite zusammen kommen? warum zur rechten und nicht zur linken? denn zu beyden Seiten können sie einander nicht erreichen, weil es nicht möglich ist, daß zwo gerade Linien mehr als ein gemeinschaftliches Punct haben, IV, 26.

§. 83. Es kan eben dieses, daß nemlich AF und DG einander parallel sind, auch daraus geschlossen werden, wenn man findet, daß die Winkel ABC und HEG, welche beyde außerhalb dieser Linien AF und DG liegen, und deren Oefnungen nach verschiedenen Seiten gekehret sind, einander gleich sind. Denn weil ABC dem Winkel EBF gleich ist, und HEG dem Winkel DEB, IV, 72. so müssen nothwendig auch die Winkel EBF und DEB gleich werden, so bald ABC und HEG einerley Größe bekommen. Also sind wir wieder auf den Gründen, aus welchen wir eben IV, 81. geschlossen haben, daß AF und DG parallel sind.

§. 84. Ferner können wir noch eben dieses schließen, wenn wir finden, daß die beyden Winkel DEB und EBA, welche zwischen den zwo gegebenen und von der HC geschnittenen Linien AF und DG enthalten sind, und nach einerley Seite gerichtet stehen, zusammen gesetzet, zween geraden Winkeln gleich sind. Denn wenn dieses angenommen wird, so kan man daraus die Gleichheit der Winkel ABC und DEC folgendergestalt schließen. Die Winkel DEB und EBA sind zween rechten Winkeln gleich. Dieses wird angenommen. Nun sind auch die Winkel EBA und ABC zween rechten Winkeln gleich, weil sie neben einander auf der geraden Linie HC stehen, IV, 64. Derowegen ist die Summe der Winkel DEB + EBA (= 2 R) der Summe der Winkel EBA + ABC gleich, und wenn man von diesen Summen gleiches wegnimmet, so muß gleiches übrig bleiben. Man nehme beyderseits den Winkel EBA weg, so bleibt auf einer Seite DEB, und auf der andern ABC übrig. Diese Winkel sind demnach gleich. Aus der Gleichheit dieser Winkel DEB, ABC aber haben wir gleich Anfangs IV, 79. schließen können, daß die geraden Linien DG und AF einander parallel sind.

§. 85. Wir könten in der Betrachtung der Parallellinien fortfahren,

zu welcher wir mit hinlänglichen Grundsätzen versehen sind, IV, 51. Man pfleget aber meistentheils die Eigenschaften dieser Linien nicht eher zu betrachten, als nachdem man gezeiget hat, wie eine gerade Linie einer andern parallel zu machen sey, und ich habe in der ersten Auflage dieses Buchs diese Ordnung ebenfals beobachtet. Solte sie geändert werden, so müste die Folge der Figuren ebenfals geändert, oder der Leser in die Nothwendigkeit versetzt werden, die zu jedem Satz gehörige Figur bald dort bald da in den Tafeln aufzusuchen. Beydes hat Schwürigkeiten, welche mich bewogen haben, die einmal beliebte Ordnung beyzubehalten. Es ist endlich nicht viel daran gelegen, ob man einen Satz etwas eher oder später lieset, wenn man ihm nur deutlich und in der rechten Verbindung mit dem übrigen einsiehet.

Von dem Umkreis der Figuren überhaupt.

[*Fig. 46.*] §. 86. Zwo gerade Linien können einer ebenen Fläche, in welcher sie gezogen sind, keine Figur geben. Darzu wird erfordert, daß die Gränzen der Ebene von allen Seiten fest gesetzet und bestimmet werden. Denn aus den Gränzen allein bekomt man den Begrif einer Figur, IV, 2. Daß aber zwo gerade Linien eine Ebene von allen Seiten einschränken solten, ist gar nicht zu gedenken. Sie können nur in einem Puncte zusammen stoßen, sie können aber auch so liegen, daß sie gar nicht zusammen kommen. In dem ersten Falle, da sie einen Winkel machen, lassen sie die Fläche von einer Seite offen und unbeschränkt, in dem andern Falle aber von beyden Seiten. Man muß demnach, einer Ebene eine Figur zu geben, wenigstens drey derade Linien nehmen, und dieselben so zusammen setzen, daß immer eine mit der nächsten in einem Puncte zusammen laufe. Eine solche Figur nennet man ein **Dreyeck**: dergleichen ist ABC.

[*Fig. 47. 48. 49.*] §. 87. Man kan aber einer Figur auch mehr als drey Seiten geben, und die Zahl der Seiten ohne einziges Ende vermehren wie man will. Bekomt die Figur vier Seiten, so heißet sie ein geradelinichtes **Viereck** als ABD; eine fünfseitige Figur heißet ein **Fünfeck** ABE; eine Figur die sechs Seiten hat ein **Sechseck** ABF, und so fort. Es ist nemlich sichtlich, daß eine jede geradelinichte Figur so viele Winkel hat, als viele ihrer Seiten sind, und daß man also die Zahl der Seiten angiebt, indem man die Zahl der Winkel nennet. Denn es wird eine jede von den geraden Linien, welche eine dergleichen Figur einschließen, eine **Seite** derselben genennet.

§. 88.

§. 88. Es werden diese Benennungen auch bey denen Figuren gebraucht, die zwar eben, aber krumlinicht sind, ja auch bey denjenigen, die nicht einmal eine ebene Fläche in ihren Umfang einschließen; mit einem Wort, bey den krummen, IV, 35. Es wird aber eine ebene Figur **krumlinicht** genant, nicht nur, wenn sie bloß von krummen Linien umschlossen wird; sondern auch, wenn nicht alle Seiten derselben gerade sind, oder wenn unter ihren Seiten eine oder mehrere krumme Linien angetroffen werden. Es ist nicht möglich hier recht deutlich zu erklären, welche Theile des Umfangs einer krumlinichten Figur man als besondere Seiten derselben ansehen müsse, und was es mit den Winkeln, die diese Seiten mit einander einschließen, vor eine Bewandtniß habe. Es ist aber auch nicht nöthig, daß man sich hier um diese Dinge bekümmere, die zum Theil in eine höhere Geometrie gehören. Dieses siehet man leicht, daß eine einzige krumme Linie hinlange eine Ebene rings herum einzuschließen, und derselben dadurch eine gewisse Gestalt zu geben; daß man aber auch zwo, drey, viere, oder mehrere Linien dazu brauchen könne, wenn unter denenselben eine krum ist, oder wenn etliche derselben krum sind: wie auch daß man einer krumlinichten Figur so viele Winkel zuschreiben müsse, als viele Seiten sie hat, oder als viele Seiten man sich bey derselben vorstellet.

§. 89. Ueberhaupt siehet man leicht ein, daß bey einer jeden Figur eine jede geradelinichte Seite, kleiner sey als der übrige Umfang, es mag dieser aus geraden Linien bestehen, oder aus einer oder etlichen krummen, oder theils aus geraden, theils aus krummen IV, 20. Die gerade Linie AB ist in allen Figuren, welche wir eben angezeiget haben, die kleinste unter allen, die von A nach B gezogen werden kan, und folgends kleiner als der übrige Umkreis ACB bey dem Dreyeck, ADB bey dem Viereck, AEB bey dem Fünfeck, und AFB bey dem Sechseck. Denn man kan diese Theile des Umkreises sich als gebrochene Linien vorstellen, welche von A nach B gezogen sind: Und man siehet leicht, daß dieses auch in dem Fall richtig seyn müsse, wenn dieser übrige Umkreis hier oder da gekrümmet ist.

§. 90. Wir fallen demnach eben dadurch, daß wir in der Zusammensetzung der geraden Linien fortfahren, in die Betrachtung des Umkreises der geradelinichten Figuren. Denn von diesen muß der Anfang gemacht werden. Die krumlinichten Figuren bleiben grösstentheils ausgesetzt, außer derjenigen, von welcher gesagt worden ist, daß sie auch von der leichtesten Betrachtung nicht ausgeschlossen werden könne, IV, 31. Wir müssen würklich, ehe wir in der Betrachtung der geradelinichten Figuren fortfahren,

ren, den Begrif dieser krumlinichten, und des Umkreises derselben, uns deutlich vorstellen.

[*Fig. 50.*] §. 91. Es lieget auf einer Ebene ein Punct A, und um dasselbe herum gehet eine krumme Linie BCD dergestalt, daß alle die geraden Linien, welche man von dem Punct A bis an dieselbige ziehen kan, einander gleich werden. Diese krumme Linie BCD ist diejenige, von welcher wir reden, und welche auch bey Betrachtung der geradelinichten Figuren, und bey den Auflösungen der Aufgaben, so bey denselben vorkommen, überall gebrauchet wird.

§. 92. Man siehet leicht ein wie dieselbe entstehe, und wie sie zu zeichnen sey. Man nimmet eine beständige Länge AB nach Belieben, und träat dieselbe Länge von A in der Ebene nach allen Seiten. Damit dieses geschehen könne, läst man das eine Ende der gedachten Länge oder Linie AB in A ruhen, die ganze Länge aber sich in der Ebene herum b wegen; so beschreibt das äußerste Punct derselben B, indem es dergestalt herum fließet, die verlangte krumme Linie BCD.

§. 93. Hieraus folgert man ohne Schwierigkeit, daß sich die Linie BCD endlich schließen werde, und daß, so bald das fließende Punct wieder in B angekommen ist, allwo es seine Bewegung angefangen hatte, dasselbe, wenn man die Linie AB noch weiter herum drehet, wieder in seinen vorigen Weg fortgehen müsse. Ist die Linie ABC an ihren Anfang angeschlossen, so heißet sie der **Umkreis** eines **Cirkels**, oder auch nur schlechterdings ein **Kreis** oder **Umkreis**. Denn die krumlinichte Figur BCD selbst wird ein **Cirkel** oder eine Scheibe genennet. Ist aber die Linie BC nur bis auf einige Weite fortgeführet worden, und die Figur noch nicht geschlossen, oder nimmet man von einem ganzen Umkreis ein Stück von beliebiger Größe, als BC, so wird dasselbe ein **Cirkelbogen** genennet. Das Punct A von welchem der Umkreis überall gleich weit entfernet ist, heißet der **Mittelpunct** des Cirkels; und die gerade Linie, welche von diesem Mittelpunct bis an den Umkreis gezogen ist, AB, wird der **Radius**, oder **Halbmesser** genennet.

§. 94. Einerley Radius kan nicht verschiedene Umkreise beschreiben: und wenn demnach das Mittelpunct einerley bleibet, und man wolte mit eben dem Halbmesser verschiedene Umkreise machen, so würden sie zusammen fallen; nimmet man aber verschiedene Mittelpuncte, so werden doch die Cirkel selbst, so wohl als ihre Umkreise, von einerley Größe, die Halbmesser aber alle, die man in dergleichen Cirkeln ziehen kan, haben einerley Länge, wie man sie auch mit einander vergleichen mag. Daß man

um einen jeden gegebenen Mittelpunct in einer Ebene einen Cirkelkreis beschreiben könne, ist bereits IV, 92. mit andern Worten gesaget worden, und wie dieses vermittelst des bekanten Werkzeuges zu verrichten sey, ist niemanden unbewust. Es ist dieses ein Handgrif, welcher hier voraus gesetzet wird.

[*Fig. 51.*] §. 95. Vermittelst eines Cirkelkreises wird eine gerade Linie von gegebener Länge nach einer jeden Strecke, an ein gegebenes Punct gelegt. Denn gesetzt, es sey die gerade Linie AB gegeben, welche man aus dem Punct C auf die gerade Linie DE legen sol, so nehme man die Linie AB vor den Halbmesser, oder man fasse sie mit dem Cirkelinstrument, und beschreibe um den Mittelpunct C einen Kreis, welcher von DE das Stück CF oder CG abschneiden wird, welches der gegebenen geraden Linie AB gleich ist. Oder man beschreibe zuerst mit dem Radius AB einen Umkreis um das Punct C, an welches eine gerade Linie von der Grösse AB geleget werden sol, so kan man von C eine gerade Linie nach beliebiger Strecke bis an den Umkreis dieses Cirkels ziehen, welche der gegebenen AB gleich seyn wird.

§. 96. Weil CF so groß ist als AB, so ist die Linie DF die Summe der beyden Linien DC und AB, und FE ist der Unterscheid der beyden Linien CE und AB. Es beruhet also die Addition zwoer geraden Linien, oder die Subtraction der kleinern von der grössern, bloß auf demjenigen so eben gewiesen worden ist, wie man nemlich auf eine gerade Linie eine andere von gegebener Länge legen müsse. Man siehet aber auch hieraus, daß, wenn man von dem Mittelpunct eines Cirkels nach den Umkreis desselben eine gerade Linie ziehet, die kleiner ist als der Radius, das äußerste Punct dieser geraden Linie in den Cirkel fallen müsse, und außer denselben, wenn man die also gezogene gerade Linie größer machet, als der Radius ist

§. 97. Und diese Bestimmung der Längen solcher geraden Linien, welche von einem gegebenen Punct anfangen, ist das einzige, worzu der Umkreis des Cirkels im Anfang wird gebraucht werden, daß also hier nicht nöthig ist seine übrigen Eigenschaften zu betrachten. Doch können wir noch etwas anmerken, welches derselbe mit dem Umkreis einer jeden andern Figur gemeinschaftlich hat, daß nemlich, wenn wir eine gerade Linie durch irgend ein Punct innerhalb des Cirkels ziehen, und dieselbe nach Belieben verlängern, sie den Umkreis desselben nothwendig in zweyen Puncten schneiden müsse. Denn weil sie in einem fortgehet, muß sie endlich nothwendig den Umkreis des Cirkels, wenn sie fortgezogen wird, erreichen, und denselben schneiden, und dieses zwar so wohl auf der einen als auf der andern

Seite, wie dieses auch bey einer jeden andern Figur, aus eben der Ursache erfolget.

[*Fig. 52.*] §. 98. Wir setzen, daß die gerade Linie den Umkreis nothwendig zwey mal schneiden müsse, und bekümmern uns hier nicht, ob sie denselben auch noch öfter schneide oder nicht. Dieses kan bey verschiedenen Figuren geschehen, und die 52 Zeichnung stellet eine Figur vor, deren Umkreis die gerade Linie AB viermal schneidet. Der Augenschein giebt es, daß dieses bey dem Cirkel nicht angehe, aber uns ist hier daran nichts gelegen. Wir gebrauchen zur Zeit nichts mehr, als was wir eben gesaget haben, und sind um die übrigen Eigenschaften der Cirkelkreise, bis wir sie insbesondere zu betrachten anfangen werden, unbemühet.

§. 99. Was aber die geradelinichten Figuren anlanget, so folget hieraus, daß eine gerade Linie, welche wie AB durch ein Punct innerhalb derselben gehet, wenigstens zwo Seiten derselben schneiden müsse. Denn sie muß den Umkreis zwey mal schneiden; diese Schnitte aber können nicht beyde in eine Seite fallen, weil sonst zwo gerade Linien einander zwey mal schneiden müsten: sie fallen also wenigstens in zwo Seiten.

[*Fig. 53.*] §. 100. Zween Cirkelkreise schneiden einander nicht nothwendig. Sie haben beyde ihre bestimte Gränzen, über welche sie nicht kommen können. Sie können beyde aus einander fallen, es kan aber auch der eine ganz innerhalb des andern enthalten seyn. Aber so bald der Umkreis eines Cirkels zum Theil außer den Umkreis eines andern fället, zum Theil aber innerhalb desselben, oder so bald der Umkreis eines Cirkels durch zween Puncte gehet, deren einer innerhalb eines andern Cirkels befindlich ist, der andere aber außerhalb desselben, so kan es nicht anders seyn, diese Umkreise müssen einander in mehr als einem Punct schneiden. Der Cirkelkreis, dessen Mittelpunct A ist, gehet durch die zween Puncte B und C, deren einer B innerhalb des andern Cirkels lieget, welcher um den Mittelpunct D beschrieben worden, der andere C aber außerhalb desselben. Er schneidet also den Umkreis dieses letzten Cirkels gewiß zweymal. Es ist nichts leichter als dieses, auf die Umkreise aller Figuren anzuwenden: wovon wir aber gegenwärtig keinen Nutzen sehen.

[*Fig. 54.*] §. 101. Uebrigens ist bey dieser Anmerkung eben dergleichen zu sagen, als unlängst gesaget worden ist. Wir haben uns nicht darum zu bekümmern, ob dergleichen Umkreise einander in mehr als zween Puncten schneiden können, wie dieses bey andern Figuren geschehen kan, oder nicht. Denn die Umkreise der beyden Dreyecke ABC und DEF schneiden einander in sechs Puncten. Genug daß wir deutlich sehen, daß in den an-

angezeigten Umständen wenigstens zween Schnitte nothwendig erfolgen müssen. Die übrigen alle, wenn auch die Umkreise zweyer Cirkel einander in mehr als zween Puncten schneiden könten, können uns zu unserm gegenwärtigen Vorhaben nichts nützen.

Wie der Umkreis eines Dreyecks durch zwo Seiten bestimmet wird, die einen Winkel einschließen.

[*Fig. 55. 56.*] §. 102. Nunmehro können wir uns, ohne weiter aufgehalten zu werden, zur genauen Betrachtung des Umkreises der geradelinichten Figuren, und insbesondere der Dreyecke wenden, und die Aufgaben, welche bey denselben vorkommen, nach und nach auflösen. Das natürlichste ist, daß wir da wieder anfangen, wo wir bey der Betrachtung der geraden Linien stehen geblieben sind. Die zwo geraden Linien AB und BC machen einen Winkel ABC. Man ziehe mit einer dritten geraden Linie AC, die äußersten Puncte dieser Linien zusammen, so bekomt man ein Dreyeck ABC. Und ist uns ein Winkel vorgeleget, zusamt zween Seiten, welche denselben Winkel in einem Dreyeck einschließen sollen, so ist nichts leichter, als ein dergleichen Dreyeck auszumachen. Es sey dieser gegebene Winkel ABC, und die Seiten D und E. Man setze einer der gegebenen Seiten auf die Linie BA von der Spitze B nach A. Wir haben dieses mit der Linie D gethan, deren äußerstes Punct dadurch in F gefallen ist. Eben dieses thue man mit der zweyten Linie E, da denn ihr äußerstes Punct in G fället. Ist dieses geschehen, so hat man nunmehro nur noch die Puncte F und G vermittelst einer geraden Linie FG zusammen zu ziehen, so ist das Dreyeck FBG an dem gegebenen Winkel ABC, und aus den Seiten D, E, verfertiget.

§. 103. Man siehet leicht, daß man mit dem gegebenen Winkel und Seiten, nicht anders verfahren können, um aus denselben ein Dreyeck zu machen, als geschehen ist. Die einzige Veränderung, welche zu machen wäre, ist, daß man die erstere Linie D nicht auf BA sondern auf BC, und hingegen die andere E auf BA brächte. Es ist aber sichtlich, daß dadurch kein anderes Dreyeck heraus kommen würde, als dasjenige, welches wir eben gemacht haben; nur würde dasselbe verkehrt zu liegen kommen; sonst aber kan man nichts verändern, IV, 21. Es werden also die Dreyecke, die man nach dieser Art verfertiget, alle einerley, nur können sie verkehrt zu liegen kommen, das ist, die gerade Linie FG wird beständig so groß, als in unserer Figur, es behalten auch die Winkel bey F und G ihre Größe, so

lang der Winkel bey B, und die Seiten BF, BG einerley bleiben, ob zwar, wenn man BG der D, und BE der E gleichnimt, der Winkel F an statt G unten, und G an statt F oben zu liegen komt. Hievon werden wir uns nach diesem noch deutlicher überzeugen.

§. 104. Der Winkel bey B kan so groß oder so klein seyn als man will, und die Seiten D und E können ebenfals von nur beliebiger Länge gegeben werden, ohne daß zu befürchten wäre, daß man hernach aus denselben Winkel und diesen Seiten das Dreyeck nicht solte ausmachen können. Denn es wird, so bald als die Linien BF, BG richtig gesetzet worden sind, hernach zur gänzlichen Verfertigung des Dreyeckes nichts anders erfordert, als daß man die gerade Linie FG ziehe. Eine gerade Linie aber kan zwischen jeden zwey Puncten gezogen werden, wie sie auch liegen mögen.

[*Fig. 57. 58.*] §. 105. Ist es aber erlaubt den Winkel bey B anzunehmen von was vor Größe man will, so kan man ihn gerade, spitzig oder stumpf nehmen. Thut man das erste, und nimt vor B einen geraden Winkel an, so bekommet man ein Dreyeck, welches einen geraden Winkel hat. Dergleichen ist FBG in der 57 Figur. Nimmet man aber vor B einen stumpfen Winkel, so erhält man ein Dreyeck in welchem ein stumpfer Winkel vorkomt, als FBG in der 58 Figur.

§. 106. Die erste Art der Dreyecke, in welchen nemlich ein gerader Winkel vorkomt, die übrigen Winkel mögen beschaffen seyn wie sie wollen, heißen **rechtwinklichte** Dreyecke, und die andere Art, in welchen ein stumpfer Winkel befindlich ist, werden **stumpfwinklicht** genennet, ohne daß man sich auch hier um die Größe der übrigen Winkel zu bekümmern habe.

§. 107. Wenn man aber vor den Winkel bey B einen spitzigen Winkel nimt, so wird das Dreyeck, welches herauskomt, derowegen nicht **spitzwinklicht** müssen genennet werden. Denn man pflegt nicht alle Dreyecke so zu nennen, welche einen spitzigen Winkel haben, sondern es müssen alle Winkel eines Dreyecks spitzig seyn, wenn es diesen Namen bekommen soll, oder es muß in einem spitzwinklichten Dreyeck weder ein gerader noch ein stumpfer Winkel vorkommen, weil man es sonst mit dem Namen eines geradewinklichten oder stumpfwinklichten Dreyecks belegen würde. Nimmet man aber gleich den Winkel bey B spitzig, so folget daraus nicht nothwendig, daß die Winkel bey F und G auch spitzig fallen müssen. Also kan es seyn, daß ein Dreyeck, dessen Winkel bey B spitzig ist, bey F oder G einen geraden oder stumpfen Winkel bekomt, nachdem nemlich die Seiten BF und BG angenommen werden. Denn von dem angenommenen

Win-

Winkel B, und von der Größe dieser Seiten hänget die Größe derer Winkel bey F und G, lediglich ab.

[*Fig. 56. 57. 58. 59.*] §. 108. Da aber auch die Seiten BF, BG nach Belieben angenommen und verlängert werden können, man mag den Winkel B angenommen haben wie man will: so siehet man erstlich, daß man sie so weit verlängern könne, daß hernach die dritte Seite FG ein jedes Punct einschließe, so innerhalb des Winkels ABC gegeben seyn mag, wo man will. Es sey das Punct H, innerhalb dem Winkel ABC, aber außerhalb dem Dreyeck FBG gegeben. Man verlängere die Seiten BF, BG in Gedanken, und entferne mit den Puncten F und G auch die Seite FG immer weiter von der Spitze B. Da nun das Punct H seine Lage behält, FG aber immer weiter auswärts gebracht wird: so muß endlich diese Seite sich so weit von B entfernen, daß sie außer H vorbey gehet, und also dieses Punct, wie in der 57, 58, 59 Zeichnung, in das Dreyeck einschließet. Ist dieses geschehen, und man ziehet, durch das dergestalt eingeschlossene Punct H eine gerade Linie wie man will; so muß dieselbe nothwendig zwo Seiten des Dreyecks FBG schneiden, IV, 99. Diese geschnittene Seiten können seyn FB und BG oder FB und FG, oder BG und FG; und also ist unter denselben allezeit wenigstens eine der zwo Seiten FB, BG, die den Winkel B einschließen, in welchen man das Punct H gesetzt hatte. Eine gerade Linie also, welche man durch ein Punct H innerhalb eines Winkels FBG ziehet, nach welcher Seite man will, schneidet allezeit wenigstens eine der Seiten dieses Winkels FB oder BG, wenn man nemlich beydes, so wol diese Seiten als auch die durch H gezogene gerade Linie, so weit als nöthig ist, verlängert.

[*Fig. 408.*] §. 109. Dieser nützliche Satz, daß eine durch irgend ein Punct in der Oefnung eines Winkels gezogene gerade Linie wenigstens eine Seite dieses Winkels schneiden müsse, kan auch auf eine andere Art erwiesen werden, welche, wo nicht bündiger, wenigstens natürlicher scheinen kan. Der Winkel sey ABC, und DE sey in der Fläche dieses Winkels, wie gesetzt wird, beschrieben. Man ziehe von der Spitze des Winkels B eine gerade Linie BF dergestalt, daß sie die angenommene DE irgendwo, als in G, schneidet. Wird nun der Winkel CBF mit dem Winkel EFG verglichen, so siehet man, daß, wenn diese Winkel nicht gleich sind, entweder jener oder dieser der größere seyn müsse. Es stehen diese Winkel CBF, EGF beyde an der geraden Linie BF; und CBF ist der innere, EGF aber der äußere. Ist nun der innere CBF kleiner als der äußere Winkel EGF, so schneidet die bey C verlängerte Seite BC die bey E ebenfalls nach Nothdurft verlängerte GE, gewiß, IV, 51. Ist aber der Winkel CBF grö-

ßer als der Winkel EGF, oder diesem gleich, so können zwar die verlängerten BC, GE an dieser Seite C, E nicht zusammen laufen: Es wird aber alsdenn der Winkel ABF welcher an der andern Seite der BF der innere ist, kleiner als der äußere DGF, und die bey A verlängerte BA läuft mit der DG zusammen, wenn diese ebenfals bey D nach Nothdurft verlängert wird. Denn die beyden Winkel CBF + FBA in welche der gegebene ABC getheilet worden ist, geben weniger als 2 R, weil ABC ein eigentlicher Winkel und keine gerade Linie ist; im Gegentheil aber ist EFG + FGD = 2 R, IV, 64. Also ist die letztere Summe EFG + FGD größer als die erstere CBF + FBA. Wenn also EGF in der größern Summe kleiner ist als CBF in der kleinern, so muß allerdings der zweyte Theil FGD der größern Summe größer seyn als der zweyte Theil FBA der kleinern: Und eben dieses muß auch folgen, wenn EFG in der größern Summe dem Theil CBF der kleinern gleich ist. Es wird also immer wenigstens eine der zwo Seiten BC, BA von der DE geschnitten. Sie können aber auch beyde geschnitten werden, weil nichts hindert, daß, wenn CBF kleiner ist als EFG, nicht auch zugleich FBA kleiner seyn solte als FGD.

[*Fig. 59.*] §. 110. Wir fahren nunmehr in der Betrachtung der Dreyecke fort, indem wir bemerken, daß man auch die nach Belieben anzunehmende Seiten BF, BG einander gleich machen könne. In diesem Fall entstehet ein Dreyeck, welches **gleichschenklicht** genennet wird. Dergleichen ist FBG in der 59 Figur, in welchem FB = BG. Der Winkel B kan hier ebenfals angenommen werden, wie man will, und also spitzig, gerad oder stumpf. Es kan also ein gleichschenklichtes Dreyeck zugleich geradewinklicht oder stumpfwinklicht seyn.

[*Fig. 60. 61.*] §. 111. Was aber die Grösse der Seite FG in einem gleichschenklichten Dreyecke anlanget, so wird diese Seite länger oder kürzer, nachdem man den Winkel B mehr oder weniger öfnet, welche Seite demnach von gar verschiedener Größe seyn kan. Ist nemlich der Winkel B in einem gleichschenklichten Dreyeck erstlich sehr spitzig, so ist die Seite FG fast von gar keiner Länge. Oefnet sich der Winkel je mehr und mehr, so wird auch die Seite FG je größer und größer, bis, wenn der Winkel B so groß geworden ist, als er nur hat werden können, die Seite FG fast doppelt so groß ist, als einer von den Schenkeln BG oder BF. Größer kan die Seite FG nicht werden. Man siehet hieraus leicht, daß unter allen diesen Größen, die der Winkel B haben kan, auch eine seyn müsse, bey welcher FG der Seite BF = BG eben gleich ist. Die 61 Figur stellet ein dergleichen Dreyeck vor: und weil in demselben FG so groß ist

als

als BF, diese BF aber gleich Anfangs so groß angenommen worden als BG, so sind in demselben alle Seiten gleich. Ein Dreyeck, in welchem alle Seiten einander gleich sind, heißet ein **gleichseitiges** Dreyeck.

[*Fig. 62.*] §. 112. Um aber wieder auf die Dreyecke zu kommen, in welchen die zwo Seiten BF und BG ungleich sind; so übertrift in einem solchen Dreyeck, wenn man den Winkel bey B so klein annimmet als er nur seyn kan, die dritte Seite FG den Ueberschuß der größern, der zuerst angenommenen Seiten BG über die kleinere BF, sehr wenig. Denn BFG ist in diesem Fall fast eine gerade Linie, welche auf die BG fället. Wäre aber dieses, und fiele BFG auf BG, so wäre FG der wahrhafte Ueberschuß der größern Linie BG über die kleinern BF. Oefnet man so dann den Winkel B immer mehr und mehr, so wird auch FG größer und größer, bis endlich, wenn man B so groß machet, als nur möglich ist, die Seite FG fast den beyden Seiten BF und BG zusammen gleich wird. Es wächset also durch diese Oefnung des Winkels B die ihm entgegen gesetzte Seite FG, von dem Unterscheide der beyden Seiten BF, BG, bis fast auf die Summe derselben: und es ist in einem jeden Dreyeck BFG eine jede Seite FG größer als der Unterscheid der beyden übrigen BG — BF, aber kleiner als ihre Summe BG + BF.

§. 113. Dieses kan man sehr deutlich einsehen, wenn man sich vorstellet, daß an die gerade Linie BG die Linie BF von beliebiger Länge dergestalt gesetzt sey, daß sie sich um das Punct B drehen läßt, wodurch der Winkel B nach und nach geöfnet oder vergrößert werden kan, und daß um G eine andere gerade Linie GH von genugsamer Länge auf eben die Art beweget werden könne. Man bringe BF erst fast ganz auf BG, und lege GH durch das Punct F derselben: So dann öfne man den Winkel B nach und nach, neige aber dabey die Linie GH dergestalt, daß sie beständig durch das Punct F der vorigen BF gehe, und mit derselben das Dreyeck FBG einschließe.

§. 114. Es kan nicht anders seyn, es müssen unter diesen Oefnungen des Winkels B sehr viele, ja die allermeisten seyn, bey welchen FG weder der BF noch der BG gleich ist; und ist dieses, so sind in einem solchen Dreyeck alle Seiten ungleich, weil wir die beyden Seiten BF, BG gleich Anfangs ungleich angenommen haben. Ein dergleichen Dreyeck, welches keine einzige Seite hat, die einer andern Seite eben desselben Dreyecks gleich wäre, heißet ein **ungleichseitiges Dreyeck.**

[*Fig. 63.*] §. 115. Es ist bereits IV, 103. angemerket worden, daß, wenn man zwey Dreyecke ABC, und abc nach der Art, die wir betrach-

trachten, aus einerley Winkel und Seiten zusammen gesetzet hat, diese Dreyecke in keinem Stück verschieden seyn können. Dieses ist nunmehro recht bündig zu erweisen, zu welchem Ende wir unsern Satz etwas umständlicher ausdrücken wollen.

§. 116. Wenn bey dem Dreyeck ABC wir einen Winkel B antreffen, welcher einem Winkel eines andern Dreyecks abc gleich ist, und zwo Seiten BA, BC, welche den Winkel B einschließen, die den Seiten ba, bc des Winkels b in dem zweyten Dreyecke gleich sind, AB nemlich = ab, und BC = bc, so sind diese Dreyecke ABC und abc von einander gar nicht unterschieden, weder in der Größe der übrigen Seiten AC, ac noch in der Größe der übrigen Winkel A, a und C, c wenn man nur in Acht nimmet, keine andere Winkel mit einander zu vergleichen, als, die zwischen gleichen Seiten liegen; noch sind die Dreyecke selbst von verschiedener Größe: sondern es ist AC = ac, A = a, C = c und das Dreyeck ABC gleich dem Dreyecke abc.

§. 117. Der Grund, woraus wir dieses nunmehro schließen wollen, lieget in der gemeinen vollkommen überzeugenden Art, ausgedehnte Dinge mit einander zu vergleichen, indem man sie auf einander passet, welcher IV, 42. bey geraden Linien und Winkeln bereits gebrauchet worden ist, und sich nicht weniger auch auf die Figuren schicket. Denn wer wil zweifeln, daß diejenige ebene Figuren gleich seyn, welche dergestalt auf einander gelegt werden können, daß ihre Gränzen zusammen fallen. Sie fallen in diesen Umständen ganz und gar auf einander, und machen eine einzige Figur aus, eben wie zwo gleiche gerade Linien zusammen fallen, wenn man eine derselben zwischen die äußerste Puncte der andern leget. Um nun diesen Grundsatz hier anzuwenden, muß gezeigt werden, daß, wenn man eines der zwey Dreyecke ABC, abc aus dem Papier ausschnitte, und würklich auf das andere brächte, allerdings seine Gränzen oder sein Umkreis in allen Stücken, mit dem Umkreis des andern überein kommen würde. Denn man hat eben nicht nöthig würklich ein dergleichen Dreyeck auszuschneiden und auf das andere zu legen, wiewohl es nicht schaden könte, wenn es jemand, alles desto deutlicher einzusehen, thun wollte.

§. 118. Man stelle sich also vor, daß man das Dreyeck abc von seiner Stelle wegnehmen und auf das andere ABC bringen wolle, aber man verfahre darinnen ordentlich. Erstlich lege man die Spitze des Winkels b, welcher dem Winkel B gleich ist, dergestalt auf die Spitze dieses Winkels B, daß auch die Linie bc auf die Linie BC zu liegen komme. So bald dieses geschehen ist, wird sich auch c auf C, und ba auf BA befinden.

Da

Da nun die gerade Linie ac zwischen den Puncten a und c liegt, die mit den Puncten A und C zusammen fallen, so kan es nicht anders seyn, sie muß nunmehro auch selbst mit der geraden Linie AC zusammen fallen. Also sind die geraden Linien ac und AC einander gleich, denn ihre äußerste Puncte fallen zusammen. Also ist der Winkel A dem Winkel a gleich, denn die Seiten, welche diesen Winkel einschließen, liegen ebenfalls auf einander, und eben so ist es mit den Winkeln C, c beschaffen. Und da dergestalt der ganze Umfang des Dreyecks abc, mit dem Umfang des Dreyecks ABC, zusammen gefallen ist, so müssen auch die Flächen der Dreyecke selbst gleich seyn.

§. 119. Dieser und einige folgende dergleichen Sätze, welche von der Gleichheit der Seiten und Winkel in verschiedenen Dreyecken handeln, sind von ungemeinem Nutzen. Die Fertigkeit diese Gleichheiten einzusehen, trägt ungemein vieles dazu bey, daß wir auch die Eigenschaften der übrigen Figuren bald übersehen können, weil dieselben alle so oder anders aus Dreyecken heraus gebracht werden können. Man muß sich also, wenn man zu dieser Einsicht gelangen will, diese Kleinigkeiten wohl bekant machen. Wir werden aber auch aus einer andern Ursache uns noch etwas bey diesem Satz aufhalten, indem wir ihn auf eine besondere Art von Dreyecken anwenden wollen.

[*Fig.* 64.] §. 120. Gesetzt, es seyn die zwey Dreyecke ABC und abc gleichschenklicht, nemlich AB sey der Seite BC, und ab der bc gleich, das übrige aber bleibe, wie wir es in dieser Betrachtung angenommen haben. Es sey nemlich der Winkel B dem Winkel b gleich, und BA der ba; denn mehr haben wir nicht nöthig zu setzen, weil aus diesem vor sich folget, daß auch BC der bc gleich sey. So müssen erstlich, wie vorher die Winkel A und a, C und c, die Seiten AC und ac, und die Dreyecke selbst gleich seyn. Aber es folget hier auch etwas mehrers. Weil BA = ba, und ba = bc, das ist, weil jede der zwo Seiten BA und bc der Seite ba gleich ist, so ist auch BA der Seite bc gleich, und aus eben dem Grund ist auch BC = ba. Demnach, da jederzeit in zwey Dreyecken, unter den Umständen, welche wir gegenwärtig betrachten, die Winkel gleich sind, welche zwischen gleichen Seiten liegen, so muß auch der Winkel C dem Winkel a gleich seyn. Da nun also beständig A = a, hier aber auch C = a, so sind die Winkel A und C beyde einem dritten gleich, es müssen also diese Winkel A und C einander ebenfalls gleich seyn, nemlich A = C.

§. 121. Dieses ist ein neuer Satz. Ein jedes gleichschenklichtes Dreyeck kan man, wie hier mit zweyen geschehen ist, mit sich selbst vergleichen:

oder wenn man ja wil, so kan man sich vorstellen, daß abc ein Abdruck von dem Dreyeck ABC sey, und einen dergleichen Abdruck kan man in Gedanken von einem jeden Dreyecke machen. Die eben gebrauchte Schlüsse können demnach bey einem jeden gleichschenklichten Dreyeck angebracht werden, und es folget überall, daß die zween Winkel A und C, welche an den gleichen Seiten BA und BC (nicht zwischen denselben) liegen, einander gleich seyn. Oder, da man die dritte Linie des Dreyecks AC, welche außer den zwo gleichen Seiten BA und BC in demselben befindlich sind, insgemein die **Grundlinie** des gleichschenklichten Dreyecks zu nennen pflegt; so kan man diesen Satz kurz also verfassen: In einem jeden gleichschenklichten Dreyeck sind die Winket an der Grundlinie einander gleich.

§. 122. Aber auch hier kan uns die natürliche Einsicht in einem Blick dazu führen, wozu wir durch gekünstelte Vernunftsschlüsse langsam gelanget sind. In einem gleichschenklichten Dreyeck ist alles auf einer Seite wie auf der andern. Die Seite AB ist der Seite BC eben so wohl gleich, als BC der AB gleich ist, und AC liegt zwischen AB und CB auf einerley Art. Warum solte also der eine der beyden Winkel A und C größer seyn als der andere? Man versuche es den einen größer zu setzen, und wehle unter beyden zu welchem man gläubt Recht zu haben. Die Ohnmöglichkeit, welche man finden wird sich zu etwas zu entschließen, wird den Satz gnugsam beweisen.

[*Fig. 61.*] §. 123. Ist demnach ein Dreyeck gleichseitig, oder sind in einem Dreyeck alle drey Seiten einander gleich, so müssen auch alle drey Wintel desselben gleich seyn. BGF sey ein dergleichen Dreyeck. Aus der Gleichheit der Seiten BF und FG folget das B = G. Weil aber ferner auch die Seite BF der Seite BG gleich ist, so muß auch der Winkel F dem Winkel G gleich seyn. Und eben so ist, wegen der Gleichheit der Seiten BG und FG, auch B = F: das ist, jede zween Winkel, wie man sie auch mit einander vergleichen will, sind einander gleich. Und warum solte auch der erste größer seyn, als der zweyte, oder der dritte, da die den Winkeln entgegen gesetzte Seiten, einander gleich sind. Man frage sich wieder, wenn man zweifelt, ob die Winkel gleich seyn, welcher wohl von allen der gröste sey? Die Ohnmöglichkeit der Antwort wird an statt eines Beweises seyn. Denn, ist nichts, welches uns dahin bringen kan, daß wir einen oder den andern der Winkel vor den grösten halten, so ist auch nichts, welches verursachen könte, daß einer wirklich größer als der andere wäre.

Der Umkreis eines Dreyecks wird durch zween Winkel und eine Seite bestimmet.

[*Fig. 65.*] §. 124. Es lässet sich der Satz, welchen wir bisher betrachtet und aus welchen wir verschiedene Eigenschaften der Dreyecke hergeleitet haben, umkehren; und dadurch werden uns noch andere Eigenschaften dieser Figuren bekant. Wir haben gesetzet, daß in den Dreyecken ABC und abc, die Winkel B und b, wie auch die Seiten AB und ab, BC und bc, einander gleich seyn, und daraus geschlossen, daß auch die Seite AC, der ac, der Winkel BAC den Winkel a, und der Winkel C dem Winkel c gleich seyn müsse. Es ist aber auch umgekehrt richtig, daß, wenn die Seite AC der Seite ac gleich ist, und der Winkel BAC dem Winkel a, wie auch C dem c; auch die übrigen Winkel B und b einander gleich seyn werden, wie auch AB=ab, und BC=bc. Das ist, wenn in zwey Dreyecken ABC und abc zween Winkel gleich sind, A dem a, und C dem c, und es sind auch die Seiten AC und ac gleich, die zwischen diesen Winkeln liegen, so sind auch die übrigen Winkel B und b gleich, und die Seiten die zwischen gleichen Winkeln liegen, woraus, wie vorher, die Gleichheit der Dreyecke selbst geschlossen wird.

§. 125. Der Beweiß hievon lässt sich gar leicht geben. Es wird gesetzt, daß der Winkel c dem Winkel C gleich sey. Man bringe in Gedanken den Winkel c auf C, so nemlich, daß die Spitzen dieser Winkel in C zusammen fallen, und daß die Seiten ca auf CA und cb auf CB fallen, welches bey gleichen Winkeln allezeit geschehen kan: weil nun ca der CA gleich angenommen ist, so wird dadurch auch das Punct a auf A gebracht. Nun ist entweder cb der CB gleich oder nicht. Ist das erstere, wie es in dem Satz als richtig angegeben wird, so ist kein Zweifel übrig, daß das Dreyeck ABC dem Dreyeck abc in allen Stücken gleich sey. Denn in diesem Fall werden in diesen Dreyeck n gleiche Winkel c und C von gleichen Seiten AC=ac und BC=bc eingeschlossen. Allein weil eben dieses zu beweisen ist, daß BC=bc, so kan man es so schlechterdings nicht annehmen. Wir wollen also setzen, bc sey nicht so groß als BC, sondern größer oder kleiner, und sehen, ob dieses bestehen könne, und ob es nichts widersprechendes in sich hält. Denn wenn es unvernünftig ist zu gedenken, daß bc größer oder kleiner sey, als BC, so können diese Seiten ohnmöglich ungleich seyn.

§. 126. Ist aber bc der BC ungleich, so kan das Punct b, nach-

dem man den Winkel acb auf den Winkel ACB gebracht hat, nicht in B fallen, sondern es muß irgendwo außer B, in D zum Exempel, zu liegen kommen. Man nehme dieses an, und ziehe AD. Weil nun in den Dreyecken ABC und abc, c=C, AC=ac, und über dieses, wie gesetzt wird, CD=bc, so muß man schließen, daß auch der Winkel DAC dem Winkel bac gleich sey, IV,116. Es war aber auch BAC=bac, derowegen sind die Winkel DAC und BAC beyde einem dritten Winkel bac gleich, und also ist DAC=BAC. Dieses nun ist widersinnisch. Wenn D in der Linie BC außer B fällt, so ist der Winkel DAC nothwendig entweder größer oder kleiner als der Winkel BAC; also können diese Winkel ohnmöglich gleich seyn. Und also ist dasjenige falsch, woraus geschlossen worden, daß D außer B falle, das ist, es ist falsch, daß bc der BC ungleich sey. Demnach sind diese Linien gleich, woraus, wie wir schon gesehen, die gänzliche Gleichheit der Dreyecke abc und ABC, bey welchen C=c und BC=bc, wie auch AC=ac, nach dem Satz folget, welchen wir jetzo verkehret haben.

§. 127. Es ist in dem Beweiß hoffentlich keine Schwierigkeit, und der Satz selbst desto leichter zuzugeben, weil er auch daraus zu schließen ist, daß in einem Dreyecke sich keine Seite verändern läst, wenn man nicht auch den ihr entgegen gesetzten Winkel ändert, welches wir oben IV,112. angemerket haben. Sind nun also in dem Dreyecke BAC, die Seite AC und der Winkel C von bestimter Größe, wie dieses angenommen wird, indem man setzet AC sey=ac, und C=c, so kan man zwar an statt der Seite AB, sich eine andere Seite AD vorstellen, welche machet, daß CD länger oder kürzer wird als CB: aber es wird damit auch der Winkel BAC verändert, und man bekommet an statt desselben DAC. Soll der Winkel BAC unverändert bleiben, so muß auch die Seite BC bleiben wie sie ist. Kan aber bey unveränderter Seite AC und bey unveränderten Winkeln C und BAC die Seite CB nicht größer oder kleiner werden, so kan auch in dem Dreyecke abc, bey den oft wiederholten Bedingungen, cb nicht größer oder kleiner seyn als CB.

§. 128. Auf eben die Art können wir auch schließen, wenn angenommen wird, daß in den Dreyecken ABC und abc die Seiten AC und ac, und die Winkel c und C einander gleich sind, wie auch der Winkel ABC dem Winkel b. Auch bey diesen Umständen wird die Seite AB der ab, wie auch BC der bc und der Winkel BAC dem a gleich seyn. Es ist dieser Satz von dem letzten darinnen unterschieden, daß wir hier nicht annehmen, daß die Seiten AC, ac von welchen als bekant vorausgesetzt wird, daß

sie

sie gleich seyn, zwischen den beyden Winkeln liegen, deren Gleichheit in den beyden Dreyecken angenommen wird: sondern es ist hier die Rede von solchen Winkeln b und c, oder C und ABC, deren einer der Seite ac oder AC entgegen stehet.

§. 129. Da der Beweiß dieses Satzes von dem Beweiß des vorigen wenig unterschieden ist, so kan er desto kürzer gefasset werden. Man bringe wieder den Winkel c auf den Winkel C, welcher ihm gleich ist, und ac auf AC, so wird a in A fallen: und weil cb auf CB gebracht worden ist, so fällt b entweder in B, oder außer dieses Punct in D. Man nehme das letztere an, und ziehe AD. Weil nun in den Dreyecken ACD und acb die Winkel C, c gleich sind, und die Seiten, die diese Winkel einschließen, AC=ac, und DC=bc, so müssen auch die Winkel ADC und b gleich seyn, IV, 116. Nun ist b=ABC, also auch ADC=ABC. Wir wissen aber, daß dieses falsch sey. Denn es ist ohnmöglich, daß von einer geraden Linie BC zwo andere gerade Linien DA und BA nach einem Punct A solten können gezogen werden, welche mit der BC zween gleiche Winkel ABC und ADC machten, die beyde nach einer Seite gerichtet sind, IV, 50. Folgends ist es falsch, daß das Punct b außer B in D fallen könne. Es fält also b in B, und demnach ist die Seite cb der Seite CB gleich, weil jene auf diese passet. Und da also c=C und AC=ac, aber auch cb=CB, so sind die Dreyecke ABC und abc wiederum in allen Stücken gleich; das ist, der Winkel BAC ist gleich dem Winkel a, die Seite AB der Seite ab, wie auch BC der bc, und der Raum, welchen die Seiten AB, BC, AC beschließen, dem Raum, welcher von ab, bc, ca beschlossen wird.

§. 130. Man kan diese zween Sätze in einen bringen, und überhaupt sagen, daß, wenn man zwey Dreyecke hat, ABC und abc, und es ist eine Seite des einen AC einer Seite des andern ac gleich, und von zween Winkeln, welche in dem ersten Dreyeck ABC in Ansehung der AC auf gewisse Art liegen, ist ein jeder einem Winkel des Dreyecks abc gleich, welcher in Ansehung der Seite ac eben so lieget; so sind die Dreyecke selbst in allen Stücken, welche wir eben erzehlet haben, gleich. Man verstehet aber darunter, wenn man saget, daß die Winkel in Ansehung der AC auf gewisse Art liegen sollen, nichts anders, als daß sie entweder der AC entgegengesetzet seyn, wie ABC, oder an derselben dergestalt liegen, daß diese AC eine Seite derselben abgiebt. ABC lieget in Ansehung der AC wie b in Ansehung der ac lieget, und dieses ist auch von den Winkeln BAC, und a, wie auch von C und c, richtig.

[*Fig. 64.*] §. 131. Sehen wir auch hier besondere Arten von Dreyecken an, wie die-

dieses bey dem Satze geschehen ist, da wir die Dreyecke, in welchen gleiche Winkel von gleichen Seiten beschlossen werden, verglichen, so können wir auf eben die Weise einige Eigenschaften dieser Dreyecke heraus bringen, IV, 120. Wir stellen uns zuerst zwey Dreyecke vor ABC und abc, in welchen nicht nur die Seiten AC und ac einander gleich sind, wie auch die Winkel A = a und C = c, sondern wir setzen auch, daß die Winkel A und C, wie auch a und c einander gleich sind. Dadurch werden die vier Winkel, A, C, und a, c einander alle gleich, und man kan auch sagen, es sey A = c, und C = a. Aus dem erstern nun, nemlich AC = ac, und A = a, wie auch C = c, folget, daß B = b, AB = ab, und daß die Seite BC der Seite bc gleich sey, weil diese Seiten zwischen den gleichen Winkeln liegen. Aus dem letztern aber AC = ac, und A = c, C = a folget außer der Gleichheit der Winkel B und b, auch, AB = bc, und BC = ab, weil nunmehro dieses die Seiten sind, welche zwischen den gleichen Winkeln liegen. Es sind demnach jede zwo der vier Seiten AB, BC, ab, bc, einander gleich, wie man sie auch mit einander vergleichen will, folgends ist auch AB = BC. Oder kürzer, es ist AB = ab, wie zuerst gewiesen worden ist, aber auch BC = ab, folgends sind die zwo Seiten AB, BC einer dritten Seite ab gleich, welches nicht seyn könte, wenn nicht AB der BC gleich wäre.

§. 132. Es folget demnach die Gleichheit der Seiten AB und BC in einem jeden Dreyecke, aus der Gleichheit der Winkel, welche an denselben Seiten liegen: denn man kan ein jedes dergleichen Dreyeck eben so mit sich selbst vergleichen, wie wir ABC mit abc verglichen haben, oder man kan sich vorstellen, daß abc ein Abdruck des Dreyecks ABC sey. Und in der That, da in dem Dreyeck ABC die Winkel A und C gleich gesetzet werden, von der Größe aber dieser Winkel die Größe der gegenübergelegenen Seiten AB und BC, lediglich abhänget, nachdem einmal die Seite BC von bestimmter Größe angenommen worden ist: wie ist es möglich, daß eine dieser Seiten AB, BC größer oder kleiner seyn solte, als die andere? welche ist die größere und welche ist die kleinere?

[*Fig. 61.*] §. 133. Es sind demnach alle Dreyecke welche zween gleiche Winkel haben, gleichschenklichte Dreyecke, und die Linie AC, welche zwischen den zwey gleichen Winkeln A und C lieget, ist ihre Grundlinie. Sind aber in einem Dreyeck alle drey Winkel einander gleich, so muß dasselbe auch aus lauter gleichen Seiten bestehen, oder es muß gleichseitig seyn. Denn gesetzet, es sey in dem Dreyeck FBG der Winkel F = B, und B = G, woraus denn folget, daß auch F dem G gleich sey, so kan

man

man aus dem erstern F=B schließen, es sey FG=BG, aus dem zweyten B=G folget, daß FB=FG und aus dem dritten F=G, es sey auch BG =FB, welches zwar auch aus dem vorigen fließet. Denn ist BG=FG und FG=FB, so ist auch nothwendig BG=FB.

Ein Dreyeck aus drey gegebenen Seiten zusammen zu setzen.

[*Fig. 66.*] §. 134. Und also hätten wir die Dreyecke auf einer Seite angesehen, wie sie nemlich aus einem Winkel und zwo Seiten, die den Winkel einschließen, erzeuget werden. Wir gehen weiter und sehen, wie ein Dreyeck aus drey gegebenen geraden Linien A, B und C, so seine Seiten abgeben sollen, zusammen zu setzen sey.

§. 135. Aus demjenigen, so bereits gesaget worden ist, siehet man so gleich, daß dieses nicht mit jeden gegebenen drey Linten angehe. Es müssen jede zwo der gegebenen Seiten größer seyn als die dritte. Das ist, A+B muß größer seyn, als C; A+C größer als B, und B+C größer als A, IV, 89. Oder eine jede Seite, welche man nehmen will, muß kleiner seyn, als die Summe der beyden übrigen, und größer als ihr Unterscheid, IV, 112. Diese letztere Einschränkung scheinet uns bequemer als die erstere, wir wollen uns also an dieselbe halten, ob man sich zwar gemeiniglich der erstern bedienet. Sie fließet aus derselben, wie man leicht sehen wird, wenn man sich die Mühe geben will etwas nachzudenken.

§. 136. Fehlen die drey gegebenen Seiten wider diese Bedingung nicht, und ist würklich eine derselben größer als der Unterscheid der beyden übrigen, und kleiner als ihre Summe; so kan aus denselben allezeit ein Dreyeck zusammen gesetzet werden; und man darf nur auf die nachfolgende Anweisung Acht haben, wenn man sich davon überführen will. Wobey noch zu erinnern ist, daß die Dreyecke, von welchen die Rede seyn wird, zwar alle aus den Seiten A, B, C zusammen gesetzet sind; aber die Ordnung dieser Seiten ist auf alle mögliche Arten verändert worden, so daß bald A, bald B, bald C die erste Seite genennet wird, und so die zweyte und dritte: welches in der Anwendung selbst keine Schwierigkeit geben kan.

[*Fig. 67. 68. 69. 70.*] §. 137. Man mache die gerade Linie AB der ersten der gegebenen Seiten gleich, und beschreibe um das Punct A einen Cirkelkreis, dessen Radius der zweyten der gegebenen Seiten gleich sey. Wenn man nun die AB, so oft dieses nöthig ist, zu beyden Seiten bis an die-

diesen Umkreis in C und D verlängert, so ist allezeit BD = DA + AB die Summe der ersten und zweyten Seite; und CB = AB — AC oder AC — AB ist der Unterscheid derselben, IV, 96. Man beschreibe um B ebenfals einen Cirkelkreis, dessen Radius die dritte der gegebenen Seiten sey. Weil nun diese dritte Seite kleiner ist als die Summe der beyden erstern, daß ist kleiner als DB, so schneidet dieser Umkeis die gerade Linie DB bey E innerhalb dem Punct D, und es fället ein Theil des um B beschriebenen Umkreises innerhalb den vorigen, welcher um A beschrieben ist. Weil aber eben diese dritte Seite, größer ist als der Unterscheid der beyden erstern Seiten AB — AC, oder AC — AB mit einem Worte BC, so siehet man, daß in allen Fällen ein Punct dieses Umkreises, nemlich F, in welchem derselbe die verlängerte AB nochmals schneidet, außer den um A beschriebenen Umkreis fallen müsse. Demnach schneiden die beyden Umkreise einander irgendwo, als in G. Man bemerke dieses Punct, und ziehe von demselben die geraden Linien GA, GB nach A und B. Diese werden mit der zuerst angenommenen AB ein Dreyeck GAB machen, welches aus den drey gegebenen Seiten A, B, C zusammen gesetzet ist.

§. 138. Die Sache ist leicht einzusehen. Die Seite AB ist selbst die gegebene erste Seite. Die Seite AG aber ist ein Radius des um das Punct A beschriebenen Circulkreises, und folgends so groß als AC, welches ein Radius eben dieses Kreises ist. AC aber ist so groß als die zweyte der gegebenen Seiten, und demnach auch AG so groß als diese zweyte Seite. Und eben so ist es mit der BG welche ein Radius des andern Cirkels ist, welchen man um das Punct B mit dem Radius BE beschrieben hat, daß also nothwendig BG der dritten gegebenen Seiten gleich ist: man hat also würklich das Dreyeck ABG aus den drey Seiten gemacht, welche zu dessen Verfertigung gegeben waren.

§. 139. Es sind zu diesem Satz vier Figuren gezeichnet worden, um die verschiedenen Fälle deutlich vor Augen zu legen, welche bey der Zusammensetzung eines Dreyecks aus seinen Seiten vorkommen können; welche aus der Größe der gegebenen Seiten fließen, und aus der Ordnung, in welcher man dieselbe zusammen setzet. Denn AB ist bald die größeste Seite, bald eine von den kleinern, und so ist es auch mit den übrigen. Es fällt demnach das Punct E entweder zwischen A und B, oder zwischen A und D. Denn über D kan es niemals hinaus fallen, wie wir gesehen haben, und C fällt entweder zwischen A und B, oder zwischen B und F, und kan niemals weiter als F nach dieser Seite liegen: weil eben dasjenige auf der einen Seite von dem Puncte C richtig ist, was auf der andern bey

den

dem Punct E statt hat. Diese verschiedene Lagen stellen die vier Zeichnungen vor, die zu diesem Satz gehören.

§. 140. Man sieht übrigens leicht, daß, wenn einem nur um die Verfertigung des Dreyecks zu thun ist, man eben nicht nöthig habe, die Umkreise der hier zu beschreibenden Cirkel ganz auszumachen. Man siehet das Punct, wo diese Kreise einander schneiden werden, leicht ohngefehr zum voraus, und darf also nur anstatt der ganzen Umkreise, mit eben den Oefnungen, mit welchen diese zu beschreiben waren, Bogen machen, ohngefehr an der Stelle, wo man glaubet, daß das Punct G hinfallen werde.

[*Fig. 71. 72. 73.*] §. 141. Auf diese Art nun werden aus jeden drey Seiten Dreyecke beschrieben, und die gleichseitigen oder auch die gleichschenklichten Dreyecke sind davon nicht ausgenommen. Nur darf zu einem gleichseitigen Dreyeck nur eine einzige Linie gegeben werden; weil, wenn man eine Seite bey einem gleichseitigen Dreyeck hat, dadurch die übrigen alle bekant werden, IV, 111. Bey einem gleichschenklichten Dreyeck aber darf nur die Grundlinie und einer von den Schenkeln angegeben werden, denn der andere Schenkel ist nothwendig dem gegebenen gleich, IV, 110. und wird also mit jenem zugleich bekant. Es muß aber der gegebene Schenkel größer seyn als die Helfte der Grundlinie, weil er sonst mit dem andern Schenkel zusammen gesetzt, das ist, zwey mal genommen, eine Summe brächte die kleiner wäre als die Grundlinie, so ohnmöglich statt haben kan. Bloß die Betrachtung der Figuren kan im übrigen weisen, wie dergleichen Dreyecke aus ihren Seiten zusammen gesetzet werden: und ein Anfänger thut wohl, wenn er sich in der Zusammensetzung allerhand Dreyecke aus ihren Seiten etwas übet. Denn außer dem, daß wir hierinnen einige Fertigkeit haben müssen, so träget diese Uebung zu dem Verstand desjenigen, so gesaget worden und noch hiebey zu sagen ist, sehr vieles bey.

[*Fig. 67. 68. 69. 70*] §. 142. Da nun also aus jeden drey gegebenen Linien, welche die gehörige Größe haben, ein Dreyeck beschrieben wird, und man doch in der Zusammensetzung dieser Dreyecke aus ihren gegebenen Seiten auf so verschiedene Art verfahren, und bald diese bald jene der drey gegebenen Linien vor AB, und wieder eine jede von den zwo übrigen vor AG setzen kan, auch die Cirkel, durch deren Durchschnitt man das Punct G findet, sich außer G noch einmal schneiden, IV, 100. so fällt nunmehro die Frage vor, ob die aus einerley Seiten, aber auf verschiedene Art, beschriebene Dreyecke alle von einerley Größe sind, oder ob ihre

Größen verschieden werden können? wie auch, ob ihre Winkel immer einerley Größe haben, oder nicht?

[*Fig.* 63.] §. 143. Die Antwort auf diese Fragen ist: es können zwar die Dreyecke, wenn man sie aus einerley Seiten nach der gegebenen Anweisung zusammen setzet, der Lage nach verschieden werden. Eine jede Seite derselben kan auf DF zu liegen kommen, eine jede der übrigen Seiten kan entweder an die rechte oder an die linke Seite über oder unter der Linie DF fallen. Aber es ist nicht möglich, daß dergleichen Dreyecke verschiedene Größen erhalten, noch daß zwischen zwo gleiche Seiten derselben ungleiche Winkel kommen solten. Alle Dreyecke als ABC und abc, welche aus gleichen Seiten zusammen gesetzet sind, so nemlich, daß eine Seite des einen AB einer Seite des andern ab gleich ist, und so ferner BC der bc und AC der ac; sind auch ihren Flächen nach einander gleich, und es sind über dieses alle Winkel derselben, welche zwischen gleichen Seiten liegen, von einerley Größe; demnach ist der Winkel A dem Winkel a gleich, der Winkel B dem Winkel b, und C dem c.

[*Fig.* 74.] §. 144. Wer bloß dem natürlichen Verstande folgen will, ohne dasjenige, so nunmehro von den Linien, Winkeln und Dreyecken bekant seyn muß, zum Grund zu legen, kan dieses auf nachfolgende Weise einsehen. Man stelle sich vor, daß die geraden Linien AB und DC dergestalt an die dritte gerade Linie BC befestiget sind, daß sie sich um die Puncte B, C, drehen lassen, wodurch die Winkel bey B und C größer oder kleiner werden können, wie wir eben dieses bereits oben IV, 112. fast in eben der Absicht, vorgestellet haben. Nun stelle man sich vor, daß die zwo Linien AB und CD so gesetzet seyn, wie die Figur weiset, daß nemlich das Ende der einen AB die andere CD berühre, so hat man ein Dreyeck ABC. Man kan, indem man den Winkel bey B nach und nach vergrößert, das äußerste Punct A der Linie BA in der Linie CD fortführen, und auf die Art das Dreyeck ABC verändern, aber es wird der Winkel B, mit der ihm entgegen gesetzten Seite AC, zugleich verändert, und weder der Winkel B kan vergrößert oder vermindert werden, wenn man die Seite AC behalten will, wie sie ist, noch kan die Seite AC größer oder kleiner werden, wenn man nicht zugleich den Winkel bey B ändert. Behält man demnach die Seite AC von der Größe, welche sie hat, und lässet auch die übrigen Seiten BC und AB unverändert, so muß auch der Winkel B bleiben wie er ist, und es können demnach aus den drey Seiten BC, AB, und AC, nicht andere und andere Dreyecke, mit verschiedenen Winkeln,

keln, gemacht werden. Denn was hier von einer Seite gesaget worden ist, lässet sich von den übrigen allen sagen.

[*Fig. 63.*] [*Fig. 75. 76.*] §. 145. Um aber die Sache in ein vollkommenes Licht zu setzen, und deutlich einzusehen, daß jede Dreyecke als ABC, abc, welche von gleichen Seiten beschlossen werden, einander gleich sind, und daß ihre Winkel, welche zwischen den gleichen Seiten liegen, ohnmöglich von verschiedener Größe seyn können; so bringe man in Gedanken die Seite bc dergestalt an die Seite BC, daß die äußersten Puncte b und c dieser letzten Linie mit den äußersten Puncten der ersten B und C zusammen fallen, welches geschehen kan, weil diese Seiten bc und BC einander gleich sind. Man mache aber, daß auch die beyden gleichen Linien BA und ba von eben dem Punct B anfangen: und daß demnach auch CA und ca in dem Puncte C zusammen stoßen. Uebrigens wende man das Dreyeck abc dergestalt, daß die Spitze desselben a unter die Seite BC zu liegen komme, wenn A über derselben lieget. Mit einem Wort, man füge die beyden Dreyecke dergestalt an einander wie in der 75 und 76 Figur die Dreyecke ABC und BCD an einander gefüget sind, bey welchen man sich vorzustellen hat, daß das Dreyeck BCD das Dreyeck bca der 63 Zeichnung sey, welches man dergestalt an ABC gefüget hat, daß BD = ba = BA, und CD = ca = CA; alsdann ziehe man von A nach D die gerade Linie AD.

§. 146. Man bekommet dadurch zwey gleichschenklichte Dreyecke, deren Grundlinien an einander gesetzt sind, nemlich ABD und ACD, in deren jedem die Winkel, so an der Grundlinie desselben liegen, einander gleich sind. Das ist, in dem Dreyecke ABD ist der Winkel BAD dem Winkel BDA, und in dem Dreyeck ACD; der Winkel DAC, dem Winkel ADC gleich, IV, 120. Setzet man nun beyderseits diese gleiche Winkel in der 75 Figur zusammen, oder ziehet in der 76 Figur die kleinern von dem größern ab, so müssen auch die Summen oder die Unterscheide derselben gleich seyn. Man siehet leicht, daß in der 75 Figur die Winkel BAC, BDC diese Summen, und in der 76, die Winkel BAC, BDC diese Unterscheide sind. Es sind also diese Winkel BAC und BDC einander gleich. Ist aber dieses, so sind auch die Dreyecke BAC und BDC einander gleich, und ihre übrige Winkel bey B und C. Denn es sind außer diesen Winkeln BAC und BDC auch die Seiten gleich, die sie einschließen, BA nemlich der BD, und AC der DC, und es ist IV, 116. gezeiget worden, daß alle Dreyecke, in welchen gleiche Winkel von gleichen Seiten eingeschlossen werden, einander gleich sind, sowohl als ihre übrigen Winkel, welche

zwischen den gleichen Seiten liegen. Es ist demnach der Winkel ABC gleich dem Winkel DBC, der Winkel ACB dem Winkel DCB, und weil wir vorher gesehen, daß auch der Winkel BAC dem Winkel BDC, und das Dreyeck BAC, dem Dreyeck BDC gleich sey: so ist ohnstreitig von den zwey Dreyecken, deren Seiten einander gleich sind, dasjenige richtig, welches wir von ihnen angegeben haben und erweisen solten.

§. 147. Wolte man das Dreyeck BDC umwenden, daß es ebenfals oben auf die Linie BC zu stehen käme, so würde es ganz und gar auf das Dreyeck BAC fallen. Denn weil der Winkel DBC dem Winkel CBA gleich ist, so kan BD nicht anders als auf BA fallen, weil, wenn BD nicht auf BA fiele, diese Winkel nicht gleich seyn würden. Aus eben dem Grunde folget, daß durch dieses Umwenden des Dreyecks BCD auch die Seite CD auf die Seite CA gebracht werden müsse: denn es sind die Winkel BCD, BCA einander ebenfals gleich. Es ist also nicht möglich, auf eine gerade Linien BC zwey verschiedene Dreyecke ABC und aBC dergestalt zu setzen, daß Ba = BA, und AC = aC, weil, wenn man es unternehmen wolte, diese Dreyecke in eins zusammen fallen, und nicht verschieden seyn wurden. Und so viel von der Zusammensetzung der Dreyecke aus ihren drey Seiten.

Verschiedene Aufgaben von gleichen Linien und Winkeln.

[*Fig. 78.*] §. 148. Der Nutzen dieser Betrachtungen erstrecket sich sehr weit. Wir haben nunmehro verschiedene gewisse Kennzeichen, aus welchen wir von der Gleichheit der Winkel urtheilen können, und sichere Gründe einen Winkel einem andern gleich zu machen. Wir wollen von diesem letztern anfangen. Es sey ein Winkel ABC, und eine andere gerade Linie DE gegeben, an welche man einen Winkel setzen soll, so groß als ABC, und zwar so, daß die Spitze desselben an das Punct F falle, welches in der geraden Linie DE gegeben seyn mag, wo man will. So verfertiget man aus ABC ein Dreyeck, indem man die Seiten BA und BC nach Belieben annimmet. Will man, so kan man AB der BC gleich machen, aber es ist dieses nicht nothwendig. Man darf nur zwey nach Belieben in BA und BC angenommene Puncte A und C zusammen ziehen, so ist geschehen, was zur Vorbereitung erfordert wird. Nun setze man, nach der IV, 137. gegebenen Anweisung, auf FE ein anders Dreyeck GFE, dessen Seiten den Seiten des Dreyecks ABC gleich sind, FE nemlich der BC, FG der BA,

und

und EG der CA. Ist dieses geschehen, so stehet bey F der Winkel GFE, welcher dem Winkel ABC gleich ist, wie erfordert worden.

§. 149. Es ist gar leicht dieses einzusehen. Man hat die Seiten des Dreyecks GFE den Seiten des Dreyecks ABC gleich gemacht. Wir wissen, daß bey allen Dreyecken, die aus gleichen Seiten zusammen gesetzt sind, auch die Winkel gleich sind, welche zwischen gleichen Seiten liegen, IV, 143. Eben dieses muß demnach auch bey unsern Dreyecken ABC, GFE eintreffen. Nun ist aus dem, was gemacht worden ist, klar, daß die Winkel ABC und GFE allerdings zwischen gleichen Seiten enthalten sind. Also sind sie einander gleich.

§. 150. Es ist hiebey wenig anzumerken, und dieses sind Kleinigkeiten. In der Ausübung darf die gerade Linie CA nicht ausgezogen werden, sondern es ist genug ihre äußerste Puncte A und C zu bemerken. Man kan sie eben sowohl mit dem Cirkel fassen und in EG übertragen, wenn nur diese Puncte bezeichnet sind, als wenn sie ganz ausgezogen wäre. So ist es auch mit der Linie EG. So bald die Linie FG gezogen ist, hat man der Aufgabe ein Genüge gethan, und es ist weiter nichts zu thun übrig, also kan diese Linie EG wegbleiben. Man kan aber GF ziehen, so bald das Punct G durch den Schnitt zweyer Bogen gefunden worden, wie bekant ist. Diesen Schnitt zu machen, braucht man EG = CA, weiter aber zu gar nichts. Nimmet man BA der BC gleich, so hat man diesen Vortheil, daß man mit einer Oefnung des Cirkels sogleich zwo Seiten, nemlich BA und BC, übertragen kan.

[*Fig. 75. 76.*] §. 151. Es können auch noch andere Aufgaben vorgeleget werden, bey welchen allen es dahinaus kommet, daß ein Winkel dem andern gleich gemachet werden soll, ob zwar verschiedene andere Umstände damit verknüpfet sind; und diese alle löset man durch eben die Gründe auf, welche wir bisher gesehen haben, als welche am leichtesten und geschwindesten zu dem Zweck führen. Dergleichen ist, wenn aufgegeben wird, einen Winkel in zween gleiche Winkel zu theilen, das ist, zween Winkel zu machen, die einander gleich sind, und welche zusammengesetzt den gegebenen Winkel ausmachen. Wenn man die Figuren, welche ohnlängst betrachtet worden sind, wieder nachsiehet, so wird man unter denselben welche finden, in denen ein Winkel, so wie hier erfodert wird, getheilet ist, nemlich diejenige, aus deren Betrachtung geschlossen worden ist, daß zwey Dreyecke, welche aus gleichen Seiten zusammengesetzt werden, auch im übrigen nicht verschieden sind. Denn weil in diesen Figuren die Winkel ABC und CBD einander gleich sind, so ist allerdings ein jeder derselben die Hälfte des Win-

kels ABD, und dieser Winkel wird durch die Linie BC in zwey gleiche Winkel geschnitten.

[*Fig. 79. 80.*] §. 152. Man darf demnach nur eine dergleichen Zeichnung machen, als diese Figuren vorstellen, wenn man einen jeden gegebenen Winkel in zwey gleiche Theile theilen will; aber man muß dieselbe gehörig anfangen. Es sey der Winkel, welcher zu theilen ist, EBF. Man schneide von seinen Seiten BE, BF zwey gleiche Theile ab, welche man in B anfängt. Diese sind hier BA und BD. Man stelle sich eine gerade Linie vor, zwischen den äußersten Puncten dieser Seiten A und D, oder man ziehe, wie hier geschehen ist, diese gerade Linie AD würklich. Man setze so dann auf diese Linie AD ein gleichschenklichtes Dreyeck, zu welchen man die Schenkel von beliebiger Größe annehmen kan. Dieses ist ACD. Die gerade Linie BC, welche zwischen den Spitzen der zwey gleichschenklichten Dreyecke ABD und ACD gezogen ist, theilet den Winkel ABD oder EBF, in zwey gleiche Theile.

§. 153. Es ist nach demjenigen, so allbereit gesagt worden ist, nichts mehr übrig, so uns deutlicher überführen könte, daß die Auflösung richtig sey, und daß durch dieselbe ein Winkel jederzeit genau in zwey gleiche Theile getheilet werde. Die Seite AB des Dreyecks ABC ist der Seite BD des Dreyecks DBC gleich genommen worden, und AC der CD, BC aber ist beyden Dreyecken gemeinschaftlich. Es sind also die drey Seiten des einen Dreyecks ABC, den drey Seiten des andern DBC gleich, folgends sind auch die Winkel derselben bey B gleich, und ein jeder ist die Helfte des Winkels ABD oder EBF, welcher Winkel EBF demnach durch BC in zwey gleiche Theile richtig getheilet wird. Dieses ist, was man zum Beweiß sagen muß, welches wir allbereit in dem vorhergehenden haben einfließen lassen.

§. 154. Gleichwie es in der Ausübung unnöthig ist, die Linie AD zu ziehen, also kan man auch die Seiten AC und CD weglassen. Man braucht nichts als C, die Spitze des gleichschenklichten Dreyecks ADC, damit man die gesuchte Linie BC, ziehen könne, welche Spitze man durch den Schnitt zweyer Bogen gleich im Anfang findet. Im übrigen ist fast nicht nöthig zu erinnern, daß nur eine einzige gerade Linie BC seyn könne, welche einen gegebenen Winkel EBF in zwey gleiche Theile schneidet.

§. 155. Sonst ist in den bisher gebrauchten Beweisen dieser Lehrsatz enthalten: Wenn man auf eine gerade Linie AD zwey gleichschenklichte Dreyecke ABD und ACD setzet, und durch deren Spitzen die gerade Linie BC ziehet, welche man nach Belieben in G verlängern kan, so theilet diese gerade

rade Linie BC die Winkel an den Spitzen des gleichschenklichten Dreyecke ABD und ACD in zwey gleiche Theile. Es ist dieser Satz aus dem erwehnten Beweiß genugsam klar: und solte jemand bey den Winkeln der 80 Figur ACG und GCD anstoßen, und nicht gleich einsehen können, daß auch diese gleich sind, so müste er sich erinnern, daß aus der Gleichheit der Dreyecke ABC und DBC folge, daß der Winkel ACB dem Winkel DCB gleich sey. Ist aber dieses, so müssen auch die Winkel ACG und DCG gleich seyn, weil sie mit den vorigen ACB und DCB gleiche Summen, nemlich zween rechte Winkel ausmachen, IV,64.

§. 156. Wir können diese Figuren noch nicht verlassen. Eine weitere Betrachtung derselben zeiget uns, daß die gerade Linie BC, welche wir gezogen haben, um den Winkel ABD in zwey gleiche Theile zu theilen, auch die Linie AD bey G in zwey gleiche Theile schneide, oder daß AG der GD gleich sey; und daß BG noch über dieses auf AD perpendicular stehe. Denn daraus, daß die Seite AB der Seite BD, und der Winkel ABG dem Winkel GBD, gleich ist, sehen wir ein, daß in den Dreyecken ABG und DBG auch die übrigen Seiten gleich sind, und die übrigen Winkel, welche zwischen den gleichen Seiten liegen: weil die Seite BG den beyden Dreyecken ABG und GBD gemeinschaftlich ist, und also in diesen Dreyecken gleiche Winkel ABG und DBG von gleichen Seiten eingeschlossen werden. Es ist demnach die Seite AG der Seite GD gleich, und der Winkel AGB dem Winkel DGB, IV, 116. Denn daß auch der Winkel BAG dem Winkel BDG gleich sey, dürfen wir nicht jetzt erst schließen, weil bereits IV, 121. gezeiget worden ist, daß in dem gleichschenklichten Dreyeck ABD, die Winkel an der Grundlinie AD, einander gleich sind. Sind aber die Winkel BGA und BGD einander gleich, so fällt die gerade Linie BG auf AD dergestalt, daß sie mit derselben bey G zween gleiche Winkel einschließet. Es ist demnach, dem Begrif einer Perpendicularlinie IV, 54. gemäß, diese BG allerdings auf die AD perpendicular.

§. 157. Wenn man also den Winkel ABD in zween gleiche Theile theilet, so wird eben dadurch auch die Linie AD in zwey gleiche Theile geschnitten, und auf dieselbe eine Perpendicularlinie BG gezogen. Und weil aus B auf AD nur eine einzige Perpendicularlinie fallen kan, nemlich eben die BG, IV, 58. so kan man auch den Satz umkehren und sagen, daß, indem aus B auf AD eine Perpendicularlinie BG gezogen wird, die Linie AD so wohl als der Winkel ABD in zwey gleiche Theile getheilet werde. Endlich, weil wieder nur ein einziges Punct G seyn kan, welches die AD genau in zwey gleiche Theile theilet, und demnach eine einzige Linie BG, so diese Theilung ver-

verrichtet, so kan eben der Satz auch so ausgedrückt werden: die gerade Linie BG, welche durch B so gezogen ist, daß sie die AD in zwey gleiche Theile theilet, theilet auch den Winkel ABD in zwey gleiche Theile, und stehet auf der AD perpendicular.

§. 158. Der Winkel ABD ist der Winkel des gleichschenklichten Dreyecks ABD, welcher seiner Grundlinie AD entgegen stehet, und von diesen Winkel und dieser Grundlinie ist das angezeigte jederzeit richtig, man mag das gleichschenklichte Dreyeck angenommen haben, wie man will. Den Winkel ABD in zwey gleiche Theile theilen, eine Linie auf die Grundlinie AD durch die Spitze B senkrecht oder perpendicular ziehen; eine Linie durch die Spitze eben des Winkels ABD ziehen, welche die Grundlinie AD in zwey gleiche Theile theilet, ist eine Arbeit, und eben die Linie BG, welche das eine thut, thut auch das übrige beydes.

§. 159. Wir wollen dieses zu allem Ueberfluß noch etwas umständlicher zeigen. Wenn man zuerst setzet, daß in dem gleichschenklichten Dreyeck ABD die Linie BG den Winkel ABD, welcher der Grundlinie entgegen stehet, in zwey gleiche Theile theilet, so haben wir schon IV,156. gezeiget, daß aus der Gleichheit der Winkel ABG und GBD, und der geraden Linien, welche sie einschließen AB=BD, und BG=BG, folge, daß so wohl die Seiten AG, GD als auch die beyden Winkel bey G gleich seyn, und daß demnach BG auf AD perpendicular stehe.

§. 160. Setzet man aber BG sey dergestalt gezogen, daß sie die AD in zwey gleiche Theile theilet, AG=GD, so sind in den Dreyecken BAG und BGD, alle Seiten einander gleich, nemlich AG=GD, welches gesetzet wird, BA=BD, weil das Dreyeck ABD gleichschenklicht ist, und BG=BG. Demnach sind auch die Winkel ABG und GBD gleich, wie auch die beyden bey G, IV,143. und es theilet eben die BG, welche die Grundlinie des gleichschenklichten Dreyecks ABD in zwey gleiche Theile theilet, auch den Winkel ABD in zwey solche Theile, und stehet auf der Grundlinie AD perpendicular.

§. 161. Und wenn man endlich annimt, daß die BG auf der AD perpendicular stehe, so ist der Winkel BGA gleich dem Winkel BGD, denn sie sind beyde gerade Winkel. Da nun über dieses die Winkel BAG und BDG in dem gleichschenklichten Dreyeck ABD eben so wohl, als die Seiten AB, BD gleich sind; so ist eine Seite des Dreyecks BAG, nemlich die AB gleich einer Seite des Dreyecks BDG, nemlich der BD, und zween Winkel des erstern Dreyecks, BAG und AGB sind gleich zween Winkeln des zweyten Dreyecks BDG, DGB, welche Winkel in den beyden Dreyecken

ecken in Ansehung der gleichen Seiten BA und BD auf einerley Art liegen. Demnach sind auch IV, 130. die übrigen Winkel dieser Dreyecke einander gleich ABG=GBD, und die übrigen Seiten AG=GD. Es schneidet also die Linie BG, die aus der Spitze des gleichschenklichten Dreyecks ABD auf die Grundlinie desselben AD perpendicular fället, diese AD so wohl als den Winkel ABD in zwey gleiche Theile.

§. 162. Es ist leicht einzusehen, daß eben diese Linie BG auch das Dreyeck ABD in zwey gleiche Dreyecke ABG und GBD theile. Dieses ist ein Schluß, welcher aus allen Beweisen folgt, die wir eben gegeben haben. Wenn man also in einem gleichschenklichten Dreyeck den Winkel ABD in zwey gleiche Theile theilet, oder aus B auf AD die Linie BG perpendicular, oder auf die Mitte der AD ziehet: so wird jederzeit das gleichschenklichte Dreyeck ABD in zwey gleiche Dreyecke zerschnitten.

§. 163. Da wir nun also die gerade Linie zu ziehen wissen, welche einen gegebenen Winkel in zwey gleiche Theile theilet, so wissen wir auch auf eine gerade Linie AD eine Perpendicularlinie BG durch ein jedes gegebenes Punct zu ziehen, und dieselbe AD in zwey gleiche Theile zu theilen. Alles dieses verrichtet einerley Zeichnung, nur muß man dieselben, nachdem dieses oder jenes zu verrichten ist, anders und anders zu verfertigen anfangen.

[*Fig. 81.*] §. 164. Es sey erstlich eine gerade Linie AD in zwey gleiche Theile zu theilen. Man sehe diese als die Grundlinie eines gleichschenklichten Dreyecks an, und setze ein dergleichen Dreyeck von beliebigen Schenkeln drauf. Dieses sey ABD. So dann setze man auf eben diese AC noch ein anders dergleichen Dreyeck ACD, und ziehe BC, welche, wenn sie verlängert wird, so oft als dieses nöthig ist, die gegebene Linie AC in G in zwey gleiche Theile schneiden wird.

§. 165. Man siehet hier wieder, daß an den Seiten AB, BC, AC und CD nichts gelegen sey, und daß dieselben nicht das geringste zur Linie BC beytragen. So bald die Spitzen der gleichschenklichten Dreyecke ABD, und ACD gefunden sind, welche die Durchschnitte zweyer Bogen geben, so hat man alles, was erfordert wird, die Linie BC zu ziehen, welche die AD in zwey gleiche Theile schneidet.

§. 166. Das Punct C ist bloß gefunden worden, damit die Linie BC, welche nothwendig durch B gehet, ihre richtige Lage bekomme. Diese aber hat sie, wenn sie auf AD perpendicular stehet, IV, 161. Kan man also auf eine andere Art, als vermittelst eines Winkelhakens, durch B auf AD eine Perpendicularlinie ziehen, so braucht man das Punct C gar nicht,

und man kan die Arbeit, dasselbe zu suchen, ersparen. Denn eben diese Perpendicularlinie verrichtet, wie bekant ist, die verlangte Theilung.

[*Fig. 82.*] §. 167. Es sey zum zweyten auf eine gerade Linie IK eine Perpendicularlinie zu ziehen, welche durch ein Punct G gehe, so in derselben nach Belieben gegeben ist. Damit wir die Zeichnung hier so anfangen, daß wir wiederum auf unsere Haupt-Figur, oder eine andere, so aus derselben geflossen ist, hinaus kommen, so setzen wir von G nach beyden Seiten zwo gerade Linien, GA, GD von beliebiger, aber gleicher Länge, und beschreiben so dann auf AD ein gleichschenklichtes Dreyeck ABD, dessen Spitze B wir mit dem Punct G verknüpfen. Die gerade Linie BG fällt auf AD und folgends auf IK, perpendicular, weil sie die Grundlinie AD des gleichschenklichten Dreyecks ABD in zwey gleiche Theile theilet, IV, 160. Aber auch hier können in der Ausübung die geraden Linien AB, BD, wegbleiben.

§. 168. Wenn man die IG und GK als zwo gerade Linien ansiehet, welche bey G einen Winkel einschließen, der zween geraden Winkeln gleich ist, wie denn alle gerade Linien von dieser Seite angesehen werden können, IV, 60. so heist die Perpendicularlinie GB ziehen nichts anders, als diesen eingebildeten Winkel IGK in zwey gleiche Theile theilen. Und in der That komt auch die gegenwärtige Zeichnung mit derjenigen überein, welche oben IV, 152. angegeben worden ist, einen Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen, wie man am besten einsehen wird, wenn man diese zwo Aufgaben mit einander auflöset, und die Zeichnungen zusammen hält.

§. 169. Hat man auf diese Art, oder sonst wie man wil, eine Perpendicularlinie auf eine andere gegebene Linie gezogen, wie hier BG auf der IK perpendicular stehet, und man nimmet in dieser letztern Linie ein Punct B an, wo man wil, und in der geraden Linie IK zwey andere Puncte A und D, welche von G gleich weit entfernet sind, und ziehet so dann die geraden Linien BA, BD, so müssen diese nothwendig gleich seyn. Dieses ist selbst aus dem einzusehen, was eben IV, 168. gesagt worden ist. Vollkommen deutlich aber wird alles wenn wir so schließen. In den beyden Dreyecken BGA, BGD, sind die Winkel BGA, BGD gleich, weil BG auf der IK perpendicular stehet, und diese gleiche Winkel werden beiderseits von den gleichen Seiten AG = GD und BG = BG eingeschlossen. Also müssen auch IV, 116. die dritten Seiten BA, BD einander gleich seyn.

§. 170. Wil man dieses etwas anders ausdrücken, so kan man auch sagen, daß, wenn man in der geraden Linie IK zwey Puncte, A und D nimt, welche von G gleich weit entfernet sind, so sey auch ein jedes Punct

B der Perpendicularlinie auf IK, die durch G gehet, von den Puncten A nnd D gleich weit entfernet. Denn die Entfernungen des Puncts B von A und D sind die geraden Linien BA und BD, von welchen eben erwiesen worden ist, daß sie gleich sind.

[*Fig. 83. 84.*] §. 171. Nun kommen wir auf die dritte Anwendung unserer Figur, indem wir zeigen wollen, wie auf eine gegebene gerade Linie eine andere perpendicular zu ziehen ist, durch ein Punct, welches außer derselben lieget. Die gegebene gerade Linie ist IK, das Punct außer derselben B; durch B sol eine gerade Linie, auf IK perpendicular, gezogen werden.

§. 172. Wir sehen, daß wir hier unsere Figur von B zu zeichnen anfangen, und machen müssen, daß IK, oder ein Stück davon, die Linie AD der 79 oder 80 Figur abgebe. Dieses zu erhalten nehme man ein Punct an, disseits der geraden Linie IK, wenn B jenseits liegt, als hier L, und beschreibe durch L um das Mittelpunct B einen Cirkelkreis. Weil nun die gerade Linie IK durch ein Punct innerhalb dieses Cirkels gehet, so muß die gerade Linie IK den Umkreis in mehr als einem Puncte schneiden, IV, 98. und diese Durchschnitte müssen sich zeigen. Man bezeichne zween derselben mit A und D, und ziehe BA, BD, welche gleich seyn werden, weil sie zwey Halbmesser eines Cirkels sind, so hat man ein gleichschenklichtes Dreyeck ABD fertig.

§. 173. Man kan sich an diesem begnügen lassen, wenn man AD mit Versetzung des Cirkels in zwey gleiche Theile schneiden wil, indem man nemlich so lange probiret, bis die Helfte richtig gefunden ist. Denn wenn G die Linie AD in zwey gleiche Theile theilet, so ist BG nothwendig auf AD oder IK perpendicular, IV, 160. Man kan aber auch den Winkel ABD in zwey gleiche Theile theilen. Die gerade Linie BG, welche dieses thut, ist ebenfals durch B auf AD perpendicular, IV, 159. Will man dabey geometrisch verfahren, so muß man auf die AD noch ein gleichschenklichtes Dreyeck ADC setzen, dessen Spitze C außer B fällt. Ist dieses geschehen, so kan durch die beiden Spitzen B und C die Perpendicularlinie BGC oder BCG gezogen werden. Aber auch hier sind die geraden Linien AB, BD, wie auch AC, und CD in der Ausübung unnütze, wie nunmehro ohne vieles Erinnern bekant seyn muß.

§. 174. Es sind nemlich bey den Auflösungen der Aufgaben, wenn diese geometrisch seyn sollen, keine Versuche erlaubt, da man erstlich dem bloßen Augenmaas folget, und dadurch dasjenige ohngefehr bestimmet, so man suchet, so dann nachmisset, ob man es richtig getroffen sey, und wenn die-

dieses nicht geschehen ist, die begangene Fehler auf eben die Art verbessert. Auch darf man sich zu dem Ende keiner Instrumente außer dem Cirkel und Linial, bey irgend einer Zeichnung, bedienen. Man kan zum Exempel eine gegebene gerade Linie dem Augenmaas nach in zwey gleiche Theile theilen, und wenn dieses geschehen ist, nachmessen, ob diese Theile gleich sind, wodurch man zugleich siehet, ob viel oder wenig gefehlet sey, wenn sich, wie meistentheils geschiehet, Fehler ereignet haben. Man hat auch Instrumente, vermittelst welcher leicht die Helfte einer jeden geraden Linie zu schaffen ist, und man könte derselben ohne Mühe mehrere von verschiedenen Arten ausdenken. Wer wil demjenigen, welcher bloß einiges Nutzens wegen, eine Linie in zwo gleiche Helften theilen wil, wehren, daß er sich derjenigen Weise bediene zu seinem Zweck zu gelangen, welche ihm die bequemste scheinet? Aber in der Geometrie ist es nicht eines, ob man es so oder so mache. Der Zweck dieser Wissenschaft ist, daß wir einsehen, wie die Größen, welche wir in derselben betrachten, von einander abhängen, um so bald eine oder die andere bekant ist, auf die übrigen alle schließen zu können, welche mit derselben verknüpft sind. Darzu können uns dergleichen Versuche nicht helfen. Ich werde niemals einsehen, daß eben die gerade Linie, welche von der Spitze eines gleichseitigen Dreyecks auf seine Grundlinie perpendicular fället, und die den Winkel, welcher der Grundlinie entgegen gesetzet ist, in zwey gleiche Theile theilet, auch die Grundlinie in zwey gleiche Theile theile, und daß diese drey Dinge beständig verknüpft sind, und vermittelst einer einzigen geraden Linie geschehen, wenn ich mich um keine andere Theilung der geraden Linie, als die durch Versuche oder Instrumente geschiehet, bekümmert habe. Die Geometrie soll den Grund von allen Instrumenten zeigen, die zu einer bequemen Ausübung können erfunden werden, und uns in den Stand setzen dieselbe anzugeben und mit Verstand zu gebrauchen. Diesen Zweck aber würde sie nicht erhalten, wenn sie gleich Anfangs diese Instrumente gebrauchen, und zum Grund unserer Erkäntniß in diesen Dingen legen wolte.

Wie Parallellinien entstehen, und deren Eigenschaften.

§. 175. Nachdem wir gesehen haben, wie an eine gegebene gerade Linie und an ein gegebenes Punct derselben ein Winkel zu setzen ist, welcher einem gegebenen Winkel gleich sey, kan nunmehro auch gezeiget werden, wie mit einer gegebenen geraden Linie durch ein Punct, außer derselben, eine Parallellinie zu ziehen ist. Wir haben geschlossen, daß zwo gerade Linien paral-

parallel sind, wenn sie mit einer dritten Winkel einschließen, die einander gleich sind, und entweder gänzlich auf einerley Art liegen, IV,79. oder einander in allen Stücken entgegen stehen, IV,81. Also erfordert diese Aufgabe nichts anders als die Verfertigung eines Winkels, welcher einem andern aleich sey, und es ist nichts daran gelegen, von was vor einer Größe diese Winkel angenommen werden.

[*Fig. 85.*] §. 176. Es sey also die Linie AB gegeben, mit welcher man durch das ebenfals gegebene Punct C, eine andere gerade Linie parallel ziehen soll: so ziehe man durch C nach Belieben eine Linie an AB, welche mit derselben einen Winkel bey D machet, der so groß oder so klein seyn kan, als man will, setze so dann an die Linie CD, und an das Punct derselben C einen Winkel, welcher dem bey D gleich und entgegen gesetzet sey. Dieses ist so zu verstehen. Da der Winkel CDB nach B siehet, so setze man an C einen Winkel ECD = CDB, welcher seine Oefnung nach A richtet. Die Linie EC, welche man nach Belieben bis in F verlängern kan, wird der gegebenen AB parallel seyn.

[*Fig. 86.*] §. 177. Man mag übrigens den Winkel ECD dem Winkel CDB gleich machen, nach welcher Anweisung man will, es ist nichts daran gelegen, wie leicht einzusehen ist. Man kan sich der IV,148. beschriebenen bedienen; man kan aber auch anders verfahren, und sich auf andere Sätze gründen, die entweder jetzo schon bekant sind, oder hernach werden angebracht werden. Man kan zum Exempel wie vorher die Linie CD nach Belieben ziehen, dieselbe sodann in G in zwey gleiche Theile schneiden, und durch das Punct G eine andere Linie nach Belieben legen, welche sich ebenfals in H an der geraden Linie AB endiget. Hat man dieses, so mache man so dann den Theil dieser Linie GI, dem Theil derselben GH gleich, so kan man durch die zwey Puncte I und C eine gerade Linie EF ziehen, welche der AB parallel seyn wird. Denn in den Dreyecken DGH, IGC sind die Winkel DGH, IGC nothwendig gleich, weil sie entstanden sind, indem die zwo geraden Linien CD und IH einander geschnitten haben, IV,72. Es sind aber auch die Seiten gleich, welche diese Winkel in den beyden Dreyecken einschließen, GC nemlich der GD, und GI der GH, also müssen auch die Winkel CDB und ECD gleich seyn, IV,116. welche man gleich machen sollen, damit die gerade Linie EF, die verlangte Parallellinie würde.

[*Fig. 87.*] §. 178. Man kan sich aber auch, dieser Aufgabe ein Genüge zu thun, und durch ein gegebenes Punct C, einer gegebenen geraden Linie eine andere parallel zu ziehen, des äußern Winkels bedienen, welcher mit dem innern nach einer Seite zu stehet, und jenen diesem gleich ma-

chen. Die gegebene gerade Linie ist wieder AB, das Punct C. Man ziehet durch C eine gerade Linie wie man will, welche die AB erreiche, verlängert sie aber hier über C hinaus. Diese ist GD. Man setzet so dann an C und an die Seite CG einen Winkel, welcher dem Winkel CDB gleich ist. Die Linie CF, welche demselben von der andern Seite einschließet, ist die gesuchte Parallellinie, und kan nach Belieben in E verlängert werden. Wir haben IV,79. gesehen, daß aus der Gleichheit dieser Winkel GCF und GDB folge, daß die geraden Linien EF und AB parallel seyn.

[*Fig.* 88.] §. 179. Wenn man bey der erstern Art IV, 176. einer Linie AB durch ein gegebenes Punct C eine andere parallel zu ziehen, die schiefe Linie CA ans Ende der gegebenen Linie AB ziehet, und hernach um den Winkel CAB, nach IV, 148. abzutragen, durch die Linie CB das Dreyeck CAB schließet, und auf CA aus den Seiten AB und CB ein Dreyeck ADC setzet: so bekommet man eine viereckigte Figur ABCD, in welcher nicht allein die Seiten AB und CD parallel sind, sondern auch AD und BC. Denn weil die Seiten des Dreyecks ADC den Seiten des Dreyecks ABC gleich genommen worden: so sind auch die Winkel DAC und ACB einander gleich, woraus eben so folget, daß die Seite AD der Seite BC parallel sey, wie man dieses von den zwo geraden Linien AB und CD aus der Gleichheit der Winkel CAB und ACD schließen kan, IV,81.

§. 180. Ein dergleichen Viereck, dessen entgegen gesetzte Seiten AB, CD, wie auch AD, CB einander parallel laufen, heißet ein **Parallelogrammum**, dessen Möglichkeit wir also deutlich einsehen. Nemlich wenn eine gerade Linie wie AB gegeben ist, und ein Punct C, in welches die eine Ecke eines dergleichen Vierecks fallen soll, so kan man das Parallelogrammum, wie eben gewiesen ist, beschreiben, indem man von dem Punct C die schiefe Linie CA ziehet, und so dann das Dreyeck ABC in ADC überträgt.

§. 181. Wenn das Punct C zusamt der Linie AB gegeben wird, so kan man die Seite CB gleich im Anfange ziehen; es sind also die Seiten AB und CB zusamt dem Winkel den sie einschließen ABC, bekant. Es wird demnach das Parallelogrammum beschrieben, wenn zwo Seiten desselben, die einen Winkel einschließen, gegeben sind, zusamt diesem Winkel. Man machet aus den gegebenen Seiten AB, CB, und dem gegebenen Winkel ABC das Dreyeck ABC aus und verfähret übrigens wie gesaget worden ist. Auch wird jederman von selbst einsehen, daß es eben nicht nöthig sey, die gerade Linie CA zu ziehen, weil man leicht auf die bloß eingebildete Linie CA das Dreyeck ACD, wie erfordert wird, setzen kan.

§. 182. Eben so siehet man, daß man aus einem jeden Dreyecke, wie

hier

hier aus ABC, ein Parallelogrammum machen könne, von welchem alsdenn das Dreyeck ABC die Helfte ist. Denn weil die drey Seiten des Dreyecks ABC den drey Seiten des Dreyecks ADC gleich sind, so ist auch das erstere Dreyeck selbst dem zweyten gleich, IV, 143. und folgends ein jedes derselben die Helfte des Vierecks ABCD.

§. 183. Es ist ein jedes Viereck, dessen einander entgegen gesetzte Seiten gleich sind, ein Parallelogrammum. Denn man setze, daß AB = CD und AD = CB; so kan man die Seite AC entweder ziehen, oder sich nur in Gedanken vorstellen, und aus der Gleichheit der Seiten in den zwey Dreyecken ABC, ACD schließen, daß auch die Winkel DCA, CAB gleich seyn, woraus folget, daß die Seiten AB und CD einander parallel liegen. Und weil aus eben der Gleichheit der Seiten auch folget, daß die Winkel CAD und ACB gleich sind, so müssen auch die Seiten AD und CB parallel seyn. Es sind demnach bey einem jeden Viereck, dessen entgegen gesetzte Seiten einander gleich sind, eben diese Seiten auch einander parallel.

§. 184. Diese Sätze von den Parallelogrammen flossen unmittelbar aus demjenigen, so wir von den Parallellinien eingesehen haben, und wir musten sie hier anmerken, da sie sich uns so natürlich darstellten. An einem andern Ort, würden diese Dinge einen weitläuftigern Beweiß erfordert haben.

§. 185. Wir können nun fortfahren uns die übrige Eigenschaften der Parallellinien vorzustellen. Man siehet leicht, daß dergleichen Linien beständig in einerley Entfernung von einander bleiben, oder daß sie nicht nur nicht zusammen laufen, man mag sie verlängern wie man will, sondern daß sie auch einander nicht einmal näher kommen. Der bloße Begrif der geraden Linie kan uns hierauf bringen. Gerade Linien gehen beständig auf einerley Art fort. Nähern sie sich also einander in ihrem Anfang, so nähern sie sich einander auch im Fortgang immer fort. Es ist nicht möglich, daß sie im Anfang sich einander nähern, hernach aber wieder von einander entfernen solten, ehe sie einander erreichet haben, oder daß sie wenigstens aufhören solten, sich einander zu nähern. Die geraden Linien AB, CD welche beyde in einer Ebene von A und C nach E und F laufen, nähern sich einander, indem sie bis B und D fortgehen; sie nähern sich aber einander noch immer, indem die eine von B bis an E, und die andere von D bis an F sich erstrecket. Wenn sich aber gerade Linien, indem sie fortgezogen werden, einander beständig auf einerley Art nähern, so müssen sie endlich zusammen kommen, es mag dieses geschehen wo es will. Ihre Entfernung von ein-

ander, die sie im Anfang gehabt haben, vermindert sich im Fortgang beständig; sie vermindert sich immer auf einerley Art, endlich muß sie nichts werden, und ist dieses geschehen, so berühren die Linien einander. Demnach kommen gerade Linien, welche sich gegen einander neigen, oder welche sich einander nähern, endlich gewiß zusammen. Da nun also zwo Parallellinien niemals zusammen kommen, ob sie wol beyde in einer Fläche liegen, so können sie sich auch einander niemals nähern, und bleiben demnach beständig in einerley Entfernung von einander.

[*Fig. 90.*] §. 186. Wenn die zwo geraden Linien AB, DE einander parallel liegen, und eine dritte Linie FG schneidet eine derselben DE, so muß eben die Linie FG, wenn sie verlängert wird, auch die andere AB schneiden, wenn man nur auch diese Linie gehörig verlängert. Dieser Satz folgt unmittelbar aus demjenigen, welcher oben IV, 108. 109. auf verschiedene Arten erwiesen worden ist. Die Linien DE, FG, welche einander schneiden, machen den Winkel DCG mit einander, und die AB ist durch ein Punct innerhalb diesem Winkel DCG in seiner Ebene gezogen, welches Punct man sich in der AB, so weit sie gezeichnet ist, vorstellen kan wo man will, in A zum Exempel, oder B. Folgends muß AB wenigstens eine der Linien DC, CG, oder DE, FG schneiden, und von derselben hinwiederum geschnitten werden. Es ist aber nicht möglich, daß die Linien AB, DE einander schneiden, weil sie parallel sind: also schneidet AB die FG und wird von derselben geschnitten.

§. 187. Hieraus folget so gleich, daß durch ein gegebenes Punct C nur eine einzige gerade Linie gezogen werden könne, welche einer ebenfals gegebenen geraden Linie AB parallel laufe. Denn wenn DE diese Linie ist, welche durch C der AB parallel läuft; und man wil durch eben das Punct C noch eine andere gerade Linie FG ziehen, so muß diese FG die vorige DE nothwendig in C schneiden. Sie schneidet also auch die AB, wenn sowohl sie, als die AB, gehörig verlängert wird, und kan dieser AB nicht parallel seyn.

[*Fig. 91.*] §. 188. Hieraus aber lassen sich ferner folgende Eigenschaften der Parallellinien begreifen. Wenn zwo gerade Linien AB und CD parallel liegen, und man schneidet sie durch eine beliebige dritte Linie EF, so sind die Wechselswinkel, welche zwischen den Parallellinien nach verschiedenen Seiten liegen CEF und EFB einander gleich. Dieses ist einer von den Sätzen, welche wir gleich Anfangs angegeben haben, verkehrt gesetzt. Wir haben IV, 81. gesehen, daß, wenn die Winkel CEF und EFB gleich sind, die Linien AB und CD nothwendig einander parallel

seyn

seyn müssen: jetzt wird gesagt, wenn die Linien AB und CD parallel sind, so seyn auch die Winkel CEF und EFB gleich; in beyden Fällen ist die Linie EF nach Belieben gezogen worden. Es lässet sich aber auch der gegenwärtige Satz aus dem vorigen gar leicht beweisen, indem man zeiget, daß, so bald als man das Gegentheil desselben annehmen wil, man in Dinge verfället, von welchen man weiß, daß sie widersinnisch sind. Wir setzen, daß die Winkel EFB und CEF gleich sind. Wer diesem widerspricht, muß sagen, daß sie ungleich seyn können: wir wollen sehen, worzu dieser Widerspruch leiten kan.

§. 189. Obschon gesetzt wird, daß der Winkel CEF, dem Winkel EFB ungleich sey, so kan doch dieses nicht hindern, daß man nicht an das Punct E der Linie EF einen Winkel setzen könte, welcher dem Winkel EFB gleich ist. Wir wollen annehmen dieser Winkel sey GEF. Denn weil gesetzt wird, daß der Winkel EFB dem Winkel CEF ungleich sey, so muß daraus folgen, daß auch der Winkel CEF dem Winkel GEF, welchen wir dem Winkel EFB gleich angenommen haben, ungleich sey. Demnach muß die Linie EG außer EC fallen, entweder zwischen die zwo Parallellinien AB, CD, wie sie gezeichnet ist, oder außerhalb denselben. Ist man mit diesem einig, so schließen wir nun, um zu zeigen, daß dieses nicht statt haben könne, und daß es folgends falsch sey, daß der Winkel CEF größer oder kleiner sey, als der Winkel EFB, folgender maßen. Es wird zum Grund gesetzt, daß die Linie CD der Linie AB parallel sey: da man aber auch setzet daß der Winkel GEF dem Winkel EFB gleich sey, so folget hieraus, daß auch GE mit eben der Linie AB parallel laufe, IV, 81. Es gehen aber die geraden Linien CD und GE beyde durch das Punct E, demnach sind der geraden Linie AB zwo andere CD und GE parallel gezogen, welche beyde durch ein Punct gehen. Dieses kan ohnmöglich seyn, denn wir haben IV, 187. deutlich eingesehen, daß nur eine dergleichen Linie möglich sey. Also ist auch der Winkel CEF dem Winkel EFB nicht ungleich, sondern diese Winkel sind einander gleich.

§. 190. Hieraus aber ist gar leicht zu schließen, daß, wenn man die gerade Linie EF nach außen zu, in H und I verlängert hat, auch die Winkel IED und EFB einander gleich seyn müssen. Denn die Winkel IED und CEF sind allzeit gleich. Nun ist eben gezeiget worden, daß die Winkel CEF und EFB einander gleich seyn, also müssen auch die Winkel IED, EFB, die beyde einem dritten Winkel CEF gleich sind, einander gleich seyn. Eben so ist es auch mit dem Winkeln IED und AFH. Sie sind

gleich, weil die Winkel CEF und EFB gleich sind, und IED = CEF, wie auch AFH = EFB.

§. 191. Endlich sind auch die Winkel DEF, und EFB, welche zwischen zwo Parallellinien nach einer Seite fallen, nachdem diese von einer dritten Linie IH geschnitten worden ist, zween geraden Winkeln gleich. Denn es ist EFB so groß als FEC; nun aber ersetzet FEC was dem Winkel FED an zween geraden Winkeln abgehet, denn FEC und FED zusammen machen zween gerade Winkel aus, IV, 62. also muß auch der Winkel EFB, wenn man ihn zu dem Winkel DEF hinzu setzet, dieses Winkels DEF Abgang von zween geraden Winkeln ersetzen, und folgends mit demselben zween gerade Winkel ausmachen.

[*Fig. 92.*] §. 192. Hat man demnach so viele gerade Linien als man will, als AB und CD, in einer Ebene einer gegebenen Linie EF parallel gezogen, und man ziehet auf eine derselben EF, eine Perpendicularlinie GH, und verlängert dieselbe, bis sie auch die übrigen Linien in H und I schneidet: so ist diese IG auch auf alle übrige Linien AB und CD perpendicular. Denn weil die Linien CD und EF parallel, die Winkel aber bey G rechte Winkel sind: so kan es nicht anders seyn, die Winkel bey H müssen ebenfals rechte Winkel seyn, welches man aus den eben gegebenen allgemeinen Sätzen auf mehr als eine Art einsehen kan. Eben diese Gründe erweisen, daß auch die Winkel bey I gerade seyn, und daß also GH so wohl auf CD, als auf AB, perpendicular stehe.

§. 193. Hieraus siehet man, daß die geraden Linien AB und CD, welche beyde einer dritten EF parallel laufen, und mit dieser in einerley Fläche liegen, auch einander parallel seyn; oder daß, indem man die zwo Linien AB und CD, durch verschiedene Puncte, mit der EF parallel ziehet, man eben dadurch die Linie AB der Linie CD parallel mache. Denn weil, wie gezeiget worden ist, die Winkel bey H und I gerade Winkel sind, so stehen die Linien AB und CD beyde auf der GI perpendicular, und sind deswegen mit einander parallel, weil die Winkel AIH, IHC, mit einander zween rechte Winkel ausmachen, IV, 84. oder auch, weil AIH und IHD einander gleich sind, IV, 81.

§. 194. Wenn man die Entfernung zwoer Parallellinien von einander genau anzeigen will, ziehet man eine Perpendicularlinie von einer derselben auf die andere, wie hier IHG gezogen ist, welche dann nothwendig auf alle diese Linien, so viel ihrer auch seyn mögen, perpendicular seyn wird. Das Stück dieser Perpendicularlinie, welches zwischen den Parallellinien enthalten ist, ist die Entfernung derselben von einander. Demnach

nach ist in unserer Zeichnung die Entfernung der geraden Linie AB von der CD die Länge IH, die Entfernung der AB von der EF ist IG, und CD ist von der EF um die Länge HG entfernet. Es gilt gleich, wo man eine solche Perpendicularlinie ziehet, denn es sind die Entfernungen der Parallellinien, so weit man sie auch verlängern wil, aller Orten einerley, wie wir theils gesehen haben, theils bald noch deutlicher sehen werden.

[*Fig. 93.*] §. 195. Hat man nun eine beliebige Zahl von Parallellinien gezogen, welche alle gleiche Entfernung von einander haben, als AB, CD, EF, und man ziehet eine schiefe Linie GHI, wie man wil, zwischen den äußersten dieser Parallellinien, so sind die Theile dieser schiefen Linie GHI, zwischen jeden zwo derselben, die einander am nächsten liegen, einander gleich: GH nemlich ist = HI. Denn wenn, wie in unserer Figur, nur drey Parallellinien sind, und man ziehet durch das Punct H, in welchem die mittlere von der schiefen Linie GHI geschnitten wird, eine Perpendicularlinie auf diese Parallellinien KL, so sind in den Dreyecken GKH und HIL die geraden Winkel bey K und L einander gleich: und über dieses ist auch der Winkel KHG dem Winkel IHL gleich. Nun aber ist auch die Seite KH der Seite HL gleich: denn KH ist die Entfernung der AB von der CD, und HL die Entfernung der CD von der EF und wir haben diese Entfernungen einander gleich angenommen. Es liegen also in diesen Dreyecken GKH und HIL die gleichen Seiten KH und HL zwischen gleichen Winkeln K = L, und KHG = IHL, folgends sind in denselben auch die dritten Seiten GH und HI einander gleich, IV, 130. Das ist, das Stück GH der schiefen Linie GI, welches zwischen der ersten und zweyten Parallellinie lieget, ist dem Stück HI eben dieser Linie GI gleich, so zwischen der zweyten und dritten Parallellinie lieget. Auf eben die Art aber kan man auch zeigen, daß, wenn der Parallellinien mehrere sind als dreye, und die Entfernung der dritten von der vierten ist der Entfernung der zweyten von der dritten gleich, und so fort: man kan, sage ich, unter diesen Bedingungen auf eben die Art zeigen, daß der Theil HI der schiefen Linie GI zwischen der zweyten und dritten Parallellinie, dem Theil dieser Linie, zwischen der dritten und vierten gleich seyn werde, und so weiter.

§. 196. Man kan diesen Satz auch umkehren und sagen: Wenn die mittelste dreyer Parallellinien AB, CD, EF eine Linie GI, welche zwischen den äußersten AB, EF wie man will, schief gezogen ist, in zwey gleiche Theile schneidet, so nemlich, daß GH = HI, so sind dieselben Parallellinien gleich weit von einander entfernet; und wenn man zwischen denselben auch eine Perpendicularlinie KHL ziehet, so werden auch die Theile dieser Linie

KH und HL einander gleich. Denn es sind in den Dreyecken KHG und HIL die Winkel, welche wir vorher betrachtet, und gleich gefunden haben, auch bey den gegenwärtigen Bedingungen gleich, nemlich KHG = IHL, und K = L, weil diese Bedingungen mit den vorigen einerley sind, außer daß anstatt HK = HL hier gesetzet wird, es sey HG = HI. Es folget aber aus der Gleichheit dieser Winkel und der Gleichheit der Seiten HG, HI in den Dreyecken KHG und IHL, daß auch die Linien KH und HL einander gleich seyn, IV,130. Man kan nun leicht weiter gehen, und schließen, daß, wenn vier, fünf oder mehr Parallellinien, die in einer Ebene liegen, eine schiefe Linie dergestalt schneiden, daß alle Theile der schiefen Linie gleich werden, so sey jede dieser Parallellinie von derjenigen, welche ihr zunächst lieget, gleich weit entfernet.

§. 197. Aber auch hier ist der bloße natürliche Verstand hinlänglich die Sache einzusehen, und so gehet es mit den meisten ersten Sätzen der Geometrie. Man nehme eine Linie wie man wil, und bemerke in derselben drey Puncte G, H und I, deren beyde äußerste G und I von dem mitlern H gleich weit entfernet sind, und ziehe so dann durch diese drey Puncte die Parallellinien AB, CD, EF. Ist dieses geschehen, so frage man sich selbst, ob AB der CD näher sey als EF, oder ob diese EF der CD näher sey als die AB; verkehre aber die Figur, ehe man sich etwa mit der Antwort übereilet, so daß das unterste das oberste werde. Man wird allerdings finden, daß man eben so wenigen Grund haben kan, AB der CD näher zu setzen als EF, als wenig man auf der andern Seite antrift, welches machen könte, daß EF der CD näher wäre als AB.

[*Fig. 94.*] §. 198. Gesetzt nun daß die Parallellinien der 94 Figur dergestalt liegen, daß sie die Linie AE, welche man von der ersten nach der letzten nach Belieben gezogen hat, in gleiche Theile theilet, so nemlich, daß AB = BC = CD = DE: so schließet man so gleich daraus, es müssen alle diese Parallellinien gleich weit von einander entfernet seyn. Ist nun aber zwischen eben diesen Linien noch eine andere Linie ae gezogen, welche von denselben in den Puncten a, b, c, d, e, getheilet wird, so kan man daraus, daß die Parallellinien alle einerley Entfernung von einander haben, wieder schließen, daß auch die Theile dieser Linie ab, bc, cd, de einander gleich seyn müssen, IV,195. Es folget demnach allezeit daraus, daß eine gerade Linie AE von verschiedenen Parallellinien in gleiche Theile geschnitten wird, daß auch eine jede andere gerade Linie ae, welche zwischen eben diesen Parallellinien lieget, von denselben ebenfals in gleiche Theile geschniten werden müsse.

§. 199. Wären nun über dieses die Linien AE, ae einander ebenfals parallel gemacht worden, so wären auch die Theile AB und ab und alle übrige einander gleich, wie man sie auch mit einander vergleichen will. Dieses ist besonders zu beweisen. Man siehet aber leicht, daß, so bald erwiesen wird, daß bey diesen neuen Umstand AB der ab gleich sey, alles übrige von selbst folge. Denn AB ist = BC. Ist nun auch BA = ab, so ist auch BC = ab, und so fort. Diesen Beweiß aber giebt der nachfolgende Satz.

[*Fig.* 88.] §. 200. Wenn AB der DC, und zugleich AD der BC, parallel ist, das ist, wenn zwey Paare von Parallellinien ein Viereck ausmachen, welches ein Parallelogrammum genennet wird; so sind in einem solchen Vierecke nothwendig so wohl die einander entgegen gesetzte Seiten, als auch die einander entgegen gesetzte Winkel, gleich. In diesem Satze haben wir wieder einen der vorigen IV, 183. umgekehret. Wir haben gesehen, daß, wenn wir in einem Vierecke, die einander entgegen gesetzte Seiten gleich machen, diese Seiten auch nothwendig parallel zu liegen kommen müssen: gegenwärtig schließen wir daraus, daß jede zwo gegen einander gesetzte Seiten eines Vierecks parallel sind, ihre Gleichheit, und über dieses die Gleichheit der Winkel, welche einander entgegen gesetzet sind, oder die, wie man zu sagen pfleget, übereck liegen. Beydes wird zugleich eingesehen. Denn wenn man in dem erwehnten Parallelogramm ABCD eine gerade Linie AC überecks ziehet, so werden die Winkel DCA und CAB, die zwischen den Parallellinien DC und AB nach verschiedenen Seiten liegen, einander nothwendig IV, 188. gleich. Weil aber auch AD der BC parallel lauft, so hat es mit den Winkeln DAC und ABC eben diese Bewandniß. Sie liegen zwischen den Parallellinien AD und CB, nach verschiedenen Seiten, also sind auch diese Winkel gleich, und es ist das Viereck ABCD durch die Linie AC in zwey Dreyecke zertheilet worden, in welchen beyden die Seite AC zwischen gleichen Winkeln lieget. In diesen Dreyecken sind demnach auch die übrigen Winkel D und B einander gleich, wie auch die Seiten, die an den gleichen Winkeln liegen AB und DC, imgleichen AD und CB, IV, 130. Das erste, daß nemlich der Winkel D dem Winkel B gleich sey, ist eines von demjenigen, so von diesen Vierecken zu erweisen war, und man siehet leicht ein, daß eben dasselbe auch von den zweyen Winkeln DAB und BCD auf eben die Art wäre erwiesen worden, wenn wir Anfangs anstatt der Linie AC eine andere von D nach B gezogen hätten. Das zweyte, daß AD = CB, und AB = CD ist die andere Eigenschaft unserer Vierecke, die zu zeigen war.

§. 201. Man drücket einen Theil dieses Satzes aus, wenn man

saget, die Linien DA, BC, welche zwischen den zwo Parallellinien AB, DC, dergestalt gezogen sind, daß sie gegen eine dieser Linien sich beyde gleich stark neigen, oder, welches eben das ist, daß diese DA, BC auch selbst einander parallel laufen, sind von gleicher Größe. Und hieraus schließet man ohne Weitläuftigkeit dasjenige, so wir bereits IV, 194. als bekant angenommen haben, daß nemlich zwo Parallellinien überall gleich weit von einander entfernet sind.

§. 202. Es folget aber auch aus dem Beweiß, den wir betrachten, daß auch das Dreyeck DAC dem Dreyeck ABC gleich sey, welches noch eine Eigenschaft dieser Art Vierecke ist, welche man also ausdrücken kan: ein jedes Parallellogrammum wird durch die gerade Linie, welche in demselben von einer Spitze an die andere queer durchgezogen wird, in zwey gleiche Dreyecke zertheilet.

[*Fig. 95.*] §. 203. Wir schließen aus diesem letzteren weiter, daß alle Parallelogrammen, bey welchen gleiche Winkel von gleichen Seiten eingeschlossen werden, einander gleich seyn. Die 95 Figur wird die Meinung hiervon deutlicher machen. Wir setzen, daß in den beyden Parallelogrammen ABCD und abcd, die Winkel B und b einander gleich seyn, und daß die Seite AB der Seite ab gleich sey, und die Seite BC der Seite bc, und sagen, daß hieraus auch die Gleichheit der Parallelogrammen selbst folge. Denn wenn man eine Querlinie durch die Spitze der Winkel A und C ziehet, und eine andere durch die Spitze der Winkel a und c, so werden in den Dreyecken ABC und abc gleiche Winkel von gleichen Seiten eingeschlossen, also sind diese Dreyecke ABC und abc einander gleich, IV, 116. Demnach muß auch das erste Dreyeck zwey mal genommen, so viel geben, als heraus kommet, wenn man das zweyte gedoppelt nimmet. Nimmet man aber das Dreyeck ABC gedoppelt, so komt das Parallelogrammum BD, und eben so entstehet das Parallelogrammum bd, wenn man abc zwey mal setzet. Denn die Dreyecke ADC, adc sind, wie eben gezeiget worden, den Dreyecken ABC, abc gleich, also kommen die Vierecke BD, bd allerdings heraus, wenn man die Dreyecke zweymal nimmet. Man siehet aus dem Beweiß leicht, daß die Gleichheit der Vierecke, von welcher hier die Rede ist, von der Art sey, daß dieselben zusammen fallen, wenn man eines gehörig auf das andere bringet.

[*Fig. 96.*] §. 204. Die Summa aller Winkel in einem solchen Viereck beträget genau vier gerade Winkel. Das ist, wenn man alle Winkel eines solchen Vierecks an einander setzen wolte, so würde eben so viel heraus kommen, als man heraus brächte, wenn man vier gerade Winkel mit ihren Spitzen an einander rückte, und die Seiten ebenfals zu-

sam-

sammen fallen ließe. Dieses ist gar leicht einzusehen. Die Winkel A und B stehen zwischen den Parallellinien AD und BC nach einerley Seite, und sind also IV, 191. zusammen gesetzt zween geraden Winkeln gleich. Und so ist es auch aus eben dem Grunde mit den zweyen Winkeln D und C, welche ebenfals zween gerade Winkel ausmachen. Also machen allerdings die Winkel A, B, C und D zusammen vier gerade Winkel.

[*Fig. 97.*] §. 205. Wenn übrigens in einem solchen Viereck ein einziger Winkel gerade befunden wird, so kan man daraus schließen, daß die übrigen Winkel desselben alle gerade seyn müssen. Denn gesetzt es sey in dem Parallelogrammum ABCD der Winkel A ein gerader Winkel, so ist C dem Winkel A gleich, IV, 200. und derowegen nothwendig auch ein gerader Winkel. Ferner aber machen die beyden Winkel A und B zusammen gesetzt zween gerade Winkel aus, welches nicht geschehen könte, wenn nicht B ebenfals ein gerader Winkel wäre. Denn wäre B kleiner oder größer als ein gerader Winkel, so würde er mit dem geraden Winkel bey A zusammen gesetzt nothwendig weniger oder mehr bringen als zween gerade Winkel. Eben so kan man zeigen, daß D ebenfals ein gerader Winkel sey, nachdem wir gesehen haben, daß der Winkel C gerade sey.

§. 206. Wiederum, wenn ein Parallelogrammum einen einzigen schiefen Winkel hat, der nemlich größer oder kleiner ist, als ein gerader Winkel, so kan man sicher seyn, daß auch die übrige Winkel alle schief seyn müssen. Denn wäre unter diesen letztern Winkeln ein einziger gerader anzutreffen, so müsten sie alle gerade seyn, und auch der erste, welchen man schief angenommen hat, könte nicht schief seyn. Man setzet also etwas sich selbst widersprechendes, wenn man saget, ein Winkel in einem solchen Viereck sey schief, und die übrigen seyn doch nicht schief.

§. 207. Man beschreibet also ein Parallelogrammum, so lauter gerade Winkel hat, nach eben der Weise, welche vor alle und jede dergleichen Vierecke IV, 181. angewiesen worden ist, aus zwoen Seiten, welche man nach einem geraden Winkel an einander gesetzet hat, und es kan hier nichts besonders gesaget werden. AB und BC sind zwo gerade Linien, welche bey B einen rechten Winkel machen. Man leget BC ans A nach D, und BA ans C ebenfalls nach D. Das, nach dieser allgemeinen Weise beschriebene Parallelogrammum BD wird lauter gerade Winkel haben, weil der bey B gerade ist. Dergleichen Parallelogrammen die keine andere als gerade Winkel haben, heißen **geradewinklichte Parallelogrammen.**

§. 208. Man kan hier die Seiten AB und BC, wie bey allen Paralle-

rallelogrammen, von beliebiger Größe nehmen, wie man leicht aus ihrer Beschreibung siehet; aber wenn man diese Größe einmal bestimmet hat, so werden alle die geradewinklichten Parallelogrammen, welche man daraus machet, von einerley Größe. Denn weil die Winkel nothwendig gerade sind, so werden bey allen solchen Parallelogrammen, die aus den Seiten AB und BC zusammen gesetzet sind, gleiche Winkel von gleichen Seiten eingeschlossen. Es müssen demnach alle diese Parallelogrammen dem zu folge, so IV, 203. erwiesen worden ist, gleich seyn.

§. 209. Und da die Größe der Seiten AB und BC beliebig ist, so kan man auch diese Seiten einander gleich machen. Geschiehet dieses, so bekommet das Parallelogrammum lauter gleiche Seiten, weil die übrigen denjenigen, welchen sie entgegen stehen, nothwendig gleich sind, IV, 200. Ein dergleichen Parallelogrammum nennen einige eine **Raute** wenn seine Winkel schief sind. Ist aber dasselbe rechtwinklicht, so heißet es mit einem besondern Namen ein **Quadrat.**

[*Fig. 98.*] §. 210. Es wird also ein Quadrat noch eben so, wie insgemein alle Parallelogrammen, beschrieben. Es darf aber dazu nichts weiter gegeben seyn, als eine Seite, AB. Denn man weiß den Winkel bey B ohne dem, weil er, nach dem Begrif des Quadrats, gerade seyn muß, und kan ihn allezeit machen. Ferner ist auch die Seite BC bekant, als die der Seite AB gleich ist. Aus dem Winkel B aber und den Seiten AB, BC lässt sich das Quadrat nach der Anweisung ausmachen, nach welcher ein jedes Parallelogrammum aus einem Winkel und zwoen Seiten, die ihn einschließen, verfertiget wird.

[*Fig. 99.*] §. 211. Alle Quadrate von gleichen Seiten haben einerley Größe. Man mache aus der Seite AB noch ein anderes Quadrat und ein drittes, es wird keines von diesen größer oder kleiner seyn, als dasjenige so hier gezeichnet ist, AC. Dieses ist an sich klar, und man kan es auch aus dem einsehen so von der Gleichheit aller Parallelogrammen IV, 203. gesagt ist. Nimt man aber eine Seite AB kleiner als eine andere AC, und setzet auf die erstere ein Quadrat AD, so wird dieses nothwendig kleiner als daß Quadrat AE, welches man auf die größere Seite AC setzen kan. Bloß die Betrachtung der Figur kan uns hievon vollkommen überzeugen.

[*Fig. 96. 97. 98.*] §. 212. Alle diese Eigenschaften der Parallelogrammen können ohne große Schwierigkeiten aus den Sätzen von den Parallellinien geschlossen werden; und so ist es auch mit der nächstfolgenden Beschreibung dieser Vierecke. Man nehme zwo gerade Linien an, die

ein-

einander gleich sind und parallel liegen, AD und BC, und hänge ihre äußersten Puncte vermittelst der geraden Linien AB und DC zusammen. Das Viereck AC ist ein Parallelogrammum. Auch dieses zeiget die natürliche Vernunft, von welcher wir uns jederzeit so wenig als möglich ist, zu entfernen pflegen. Man betrachte die Figur auf einer und der andern Seite: man drehe sie, wenn man es vor gut befindet, und sage so dann, auf welcher Seite wohl die geraden Linien AB und DC zusammen kommen würden, wenn man sie verlängerte, ob oben oder unten? Beydes zugleich kan nicht geschehen, denn das streitet wider die ersten Eigenschaften der geraden Linien: Warum sie aber einander vielmehr auf dieser als auf jener Seite antreffen solten, davon lässt sich nichts gedenken. Es folget demnach daß diese Linie AB und CD gar nicht zusammen laufen werden, sondern daß sie, eben wie AB und CD, einander parallel sind.

[*Fig.* 88.] §. 213. Damit wir aber in unserm Zusammenhang bleiben, müssen wir wieder eine Querlinie AC ziehen. Weil nun gesetzt wird, daß AD der BC parallel sey, so sind auch die Winkel DAC und ACB einander gleich. Es ist aber auch die Seite AD der Seite BC gleich angenommen worden, und AC ist der CA, das ist, sich selbst nothwendig gleich; derowegen werden in den Dreyecken DAC und ACB gleiche Winkel DAC und ACB von den gleichen Seiten AD=BC und AC=CA eingeschlossen. Es sind demnach auch die übrigen Seiten dieser Dreyecke, das ist, die Seiten des Vierecks AB und CD einander gleich, IV, 116. Demnach bestehet unser Viereck aus Seiten, deren jede derjenigen, welcher sie entgegen stehet, gleich ist; also ist dasselbe, wie alle Vierecke, deren Seiten sich dergestalt gegen einander verhalten, ein Parallelogrammum IV, 183.

Von den Winkeln der geradelinichten Figuren.

[*Fig.* 100.] §. 214. Dieses sey von den Parallellinien genug gesagt, deren Eigenschaften wir begriffen haben, so bald wir drey gerade Linien auf eine besondere Art zusammen setzen. Wir nehmen nun die übrige Zusammensetzung dreyer geraden Linien vor uns, und fallen also wieder in die Lehre von den Dreyecken. Wir haben ohnlängst gesehen, daß, wenn zwo gerade Linien AB, CD auf einer dritten AC dergestalt stehen, daß die zween Winkel BAC und ACD zusammen zween geraden Winkeln gleich sind, diese Linien AB und CD nicht zusammen laufen können, wie man sie auch verlängern mag, IV, 84. Wir haben auch gesehen, daß, wenn man von dem Punct A noch eine andere gerade Linie ziehet innerhalb der AB, dergleichen

die AE ist, diese, wenn sie genugsam verlängert wird, die gerade Linie CD endlich gewiß antreffen werde, IV, 186. Geschiehet nun dieses, und die beyden geraden Linien CD und AE treffen einander, wenn man sie verlängert, in F an, so wird aus denselben mit der Linie AC ein Dreyeck ACF.

§. 215. Die zween Winkel dieses Dreyecks ACF und CAF machen nothwendig weniger aus als zween gerade Winkel. Denn damit ACF zu zween geraden Winkeln anwüchse, muste man zu demselben den Winkel CAB hinzusetzen. Es ist aber CAE, der an dessen Stelle zu ACF hinzugesetzet wird, kleiner als CAB, und es kan durch diesen kleinern Zusatz ohnmöglich so viel kommen, als man erhalten würde, wenn man den Winkel CAB zu eben dem ACF setzte. Also bringt CAE zu ACF hinzugesetzet weniger als zween gerade Winkel.

[*Fig. 101.*] §. 216. Wenn man demnach auf eine gerade Linie AC, zwo andere CD und AE dergestalt setzen wil, daß sie, wenn sie gehörig verlängert werden, einander irgendwo, als in F, antreffen: so müssen die zween Winkel ACF und CAE so angenommen werden, daß sie zusammen weniger geben, als zween gerade Winkel. Wolte man für ACF und CAE zween Winkel nehmen, welche zusammen gesetzet zween gerade Winkel geben, so würden die Linien parallel laufen, und einander nirgends antreffen. Machte man aber die zween Winkel ACD und EAC größer als zween gerade Winkel, wie in der 101 Figur geschehen ist, so würden sich die Linien CD, AE so gar von einander neigen, und einander noch viel weniger antreffen, ob sie zwar, wenn man sie nach der andern Seite zurück verlängerte, ein Dreyeck ACF ausmachen würden. Es sind aber auch auf dieser Seite die Winkel CAF+FCA kleiner als zween gerade Winkel, wie man sehen kan, wenn man auch die BA, welche der CD parallel lieget, nach Belieben in H zurück ziehet.

[*Fig. 100.*] §. 217. Nach dem, so wir gleich Anfangs IV, 50. 51. bemerket haben, kan man sich auch so erklären: Zwo gerade Linien AE, CD, welche beyde auf einer dritten Linie AC stehen, laufen nicht zusammen, und machen kein Dreyeck, wenn nicht, nachdem die AC in G verlängert worden, der äußere Winkel DCG, größer ist als der innere EAC. Denn wäre DCG dem innern Winkel EAC gleich, wie er dem Winkel BAC gleich ist, so würden die zwo Linien, die man an AC gesetzet hat, einander parallel fallen, wie denn die AB der CD parallel ist; und man siehet leicht ein, was erfolget wäre, wenn man an statt des EAC einen Winkel angenommen hätte, welcher noch größer ist, als der äußere DCG.

§. 218. Demnach sind in einem jeden Dreyeck ACF jede zween Winkel

kel CAF und ACF zusammen, kleiner als zween rechte Winkel: Und wenn man eine Seite desselben AC in G verlängert, so wird der äußere Winkel GCF größer als der innere CAF, welcher ihm entgegen stehet.

§. 219. Wie groß aber alle drey Winkel eines Dreyecks sind, und wie viel der innere Winkel CAF kleiner sey, als der äußere GCF, kan aus eben dieser Figur nachfolgender maßen geschlossen werden. Weil die Parallellinien AB und CD von der Linie AF geschnitten werden, so sind die Winkel EAB und AFC einander gleich, IV, 188. Nimmet man also von dem Winkel BAC den Winkel BAE hinweg, und setzet an seine Stelle den Winkel F hinzu, so ist allerdings der übrig gebliebene Winkel CAE mit dem bey F so groß, als der Winkel CAB. Da nun aber CAB mit dem Winkel ACF zween gerade Winkel giebt, so muß auch die Summe der Winkel CAE+F mit CAF zween gerade Winkel ausmachen.

§. 220. Will man sich dieses in der Form einer Rechnung vorstellen, so kan man so verfahren: Es ist ACF=ACF, CAF=CAF und FAB=F. Man setze die erstern dieser Winkel zusammen, wie auch die letztern, so erhält man ACF+CAF+FAB=ACF+CAF+F, oder weil CAF+FAB=CAB, so ist ACF+CAB=ACF+CAF+F. Nun sind die zween Winkel ACF+CAB zween geraden Winkeln gleich, derowegen müssen auch die drey Winkel ACF+CAF+F zusammen gesetzet, zween gerade Winkel ausmachen. Und so viel betragen alle Winkel in einem jeden Dreyeck, nemlich zween gerade Winkel, denn man kan in einem jeden Dreyeck ACF, durch die Spitze eines Winkels A eine Linie AF der gegen über liegenden Seite CF parallel ziehen, und den Beweiß so führen, wie wir eben gethan haben.

§. 221. Fast auf eben die Art siehet man, daß, wenn man eine Seite des Dreyecks AC verlängert, der äußere Winkel GCF den beyden innern CAF+F, welche jenem GCF in dem Dreyecke entgegen stehen, zusammen genommen, gleich seyn müsse. Denn da der Winkel BAF dem Winkel F gleich ist, so ist, wie wir bereits gesehen haben, der Winkel CAB (=CAF+EAB) der Summe der Winkel CAF+F gleich. Da nun der Winkel GCF dem Winkel CAB gleich ist, so ist er auch die Summe der zween Winkel CAF+F, welche ihm in dem Dreyeck ACF entgegen stehen.

[*Fig. 102.*] §. 222. Man kan diesen wichtigen Satz noch auf viele andere Arten einsehen. Wir wollen zu desto deutlicherem Verstande von diesen Beweisen einen einzigen hieher setzen, welcher aus dem, so bereits erwiesen ist, gar leicht fließet. Ein jedes Dreyeck läst sich durch

den Zusatz eines andern Dreyecks, dessen Seiten mit den vorigen einerley sind, in ein Parallelogrammum verwandeln, IV, 182. Man thue dieses mit dem Dreyeck ABC, und mache aus demselben, durch Beysetzung des Dreyecks ADC, das Parallelogrammum BD. Die Winkel dieser zwey Dreyecke ABC und ACD werden einander gleich seyn, denn dieses folget aus der Gleichheit ihrer Seiten. Also muß auch die Summe aller Winkel in dem Dreyeck ABC so groß seyn, als die Summe aller Winkel in dem Dreyeck ACD. Es machen aber alle Winkel beyder Dreyecke zusammen gesetzt die Winkel des Vierecks aus, wie selbst aus der Figur sichtlich ist. Demnach ist die Summe der Winkel des einen Dreyecks ABC die Helfte der Summe aller Winkel des Vierecks BD. Da nun alle Winkel des Vierecks vier geraden Winkeln gleich sind, IV, 204. so müssen die Winkel des Dreyecks ABC, zween geraden Winkeln gleich seyn: und das war der erste Satz.

[*Fig. 103.*] §. 223. Daß aber, wenn man die Seite BC eines Dreyecks ABC verlängert, der äußere Winkel DBA, so groß werde, als die beyden innern, welche ihm entaegen stehen A und C, kan hieraus leicht geschlossen werden. Die beyden Winkel bey ß sind zusammen genommen zween rechten Winkeln gleich, weil sie neben einander auf einer geraden Linie DBC stehen, oder DBA+ABC=2R. Alle Winkel des Dreyecks ABC sind auch zween rechten Winkeln gleich, oder ABC+A+C =2R. Derowegen ist auch DBA+ABC=ABC+C+A. Nimt man nun beyderseits den Winkel ABC weg, so muß auch gleiches übrig bleiben; und da nach diesem Abzuge auf der einen Seite DBA, und auf der andern A+C übrig bleibet, so müssen diese Winkel gleich seyn, DBA nemlich der Summe der zween A+C.

[*Fig. 104.*] §. 224. Diese Sätze setzen uns nunmehro in den Stand die Arten der Winkel in den Dreyecken zu bestimmen, wie auch die Summen der Winkel in allen übrigen Figuren, sie mögen so viele Winkel haben als man will. Vor allen sehen wir hieraus ein, daß in jeden zwey Dreyecken, bey welchen die Summen zweyer Winkel, welche man nehmen will, gleich gefunden werden, auch die dritten Winkel gleich seyn müssen, es mögen nun die zuerst angenommene Winkel auch einzeln genommen gleich seyn, oder nicht. Gesetzt, es sind in den Dreyecken ABC und abc die Summen der Winkel B+C, und b+c einander gleich, ob zwar eben nicht B=b, und C=c, wiewohl dieses auch nichts hindert wenn es vorkommet; so müssen auch die Winkel A und a gleich seyn. Denn wenn sie nicht gleich wären, so könte ohnmöglich A zu B+C hinzugesetzet

eben

eben die Summe geben, welche a mit b+c heraus bringet. Die Summen aber aller Winkel sind in allen Dreyecken von einer beständigen Größe, und überall einerley, weil sie jederzeit zween gerade Winkel betragen.

§. 225. Oder man schließe so: $A+B+C=2R=a+b+c$. Dieses wissen wir, daß es von jeden zwey Dreyecken richtig sey, was man auch vor welche nehmen will. Nun wird gesetzet, es sey $B+C=b+c$, und wenn man diese Summen von den vorigen wegnimmet, so bleibet, wie allezeit, wenn man gleiches von gleichen abziehet, auch gleiches übrig. Derowegen sind die dritten Winkel A und a einander gleich.

§. 226. Was aber die Größen der Winkel in den besondern Arten der Dreyecke anlanget, so ist aus dem gezeigten überflüssig klar, daß in einem Dreyeck ohnmöglich zween würklich gerade Winkel seyn können. Denn da jede zween Winkel eines jeden Dreyecks zusammen gesetzet nothwendig weniger machen als zween gerade Winkel, so können zwenn derselben ohnmöglich selbst gerade Winkel seyn. Es sind demnach in einem jeden rechtwinklichten Dreyeck IV, 105. die Winkel, welche außer dem geraden bey denenselben anzutreffen sind, gewiß spitzig. Denn stumpf kan einer derselben vielweniger seyn als gerade, weil er sonst mit dem geraden Winkel, der in einem geradelinichten Dreyeck nothwendig seyn muß, noch mehr als zween gerade Winkel machen würde. In einem rechtwinklichten Dreyeck machen auch die übrigen Winkel, die außer dem geraden Winkel in demselben anzutreffen sind, zusammen gesetzet, wieder einen geraden Winkel aus. Wäre dieses nicht, so könten sie nicht mit dem geraden Winkel zusammen genommen zween gerade Winkel geben, welches doch seyn muß.

§. 227. Eben so siehet man ein, daß in einem stumpfwinklichten Dreyeck, IV, 105. die beyden übrigen Winkel so außer dem stumpfen in demselben vorkommen, gleichfals spitzig seyn müssen. Denn wäre einer davon gerade oder stumpf, so würde er, mit dem vorigen stumpfen zusammen gesetzt, eine Summe geben, die gröser ist als zween gerade Winkel.

§. 228. Sonst aber hindert nichts, daß nicht in einem Dreyeck auch alle Winkel spitzig seyn könten. Man nehme zween Winkel eines Dreyecks zwar spitzig, aber so groß, daß sie, wenn man sie zusammen setzet, mehr bringen, als einen geraden Winkel, so muß nothwendig der dritte Winkel kleiner seyn als ein gerader, und demnach spitzig werden. Es sind also **spitzwinklichte Dreyecke** IV, 107. möglich, und daß sie möglich sind, ist auch vor sich gar leicht einzusehen.

§. 229. Was aber die gleichschenklichten Dreyecke anlanget, so sind die Winkel derselben an der Grundlinie nothwendig spitzig. Denn sie sind

einander gleich: wäre demnach einer derselben gerade oder stumpf, so müste der andere ebenfals gerade oder stumpf seyn, und man bekäme also ein Dreyeck von zwey geraden oder stumpfen Winkeln, so nicht möglich ist. Man kan aber diese Winkel an der Grundlinie so klein und spitzig machen als man will, und dadurch kan der dritte Winkel, welcher der Grundlinie entgegen gesetzt ist, so groß werden, als man wil, und folgends gerade oder stumpf. Doch wir haben diese Sache schon längst IV, 110. aus andern Gründen eingesehen.

§. 230. In einem gleichseitigen Dreyeck sind alle Winkel gleich, IV, 123. und machen, wie alle Winkel in jedem Dreyeck, zusammen gesetzet zween gerade Winkel aus. Es muß demnach ein jeder dieser Winkel der dritte Theil von zween geraden Winkeln seyn, oder zwey Drittel von einem geraden Winkel. Denn ein Drittel von zween geraden Winkeln ist so viel, als zwey Drittel von einem geraden Winkel.

§. 231. Aus diesem allen siehet man ein, daß, wenn in einem Dreyeck die Summe zweyer Winkel bekant ist, man mag sie nun auch einzeln wissen oder nicht, man auch den dritten Winkel leicht haben könne. Denn man darf zu dem Ende nur die bekante Summe der zween Winkel von zween geraden Winkeln abziehen, so bleibt der dritte übrig. Gesetzt, ich weiß daß ein Winkel eines Dreyecks $\frac{2}{3}$ von einem rechten Winkel sey, und der andere $\frac{3}{4}$, oder ich weiß nur die Summe dieser zween Winkel $\frac{17}{12}$, so nehme ich dieselbe von 2 geraden Winkeln, oder von $\frac{24}{12}$ eines geraden Winkels weg, so bleiben $\frac{7}{12}$ eines geraden Winkels vor die Größe des dritten Winkels übrig.

[*Fig. 105.*] §. 232. Geometrisch wird dieser Winkel fast noch leichter gefunden: und dieses ist es eben, so hier zu weisen ist. Gleichwie es ungereimt wäre, in der Rechenkunst zu weisen, wie eine Aufgabe vermittelst der Beschreibung einer Figur aufgelöset wird: Also findet auch in der Geometrie die Berechnung der Figuren und ihrer Winkel und Seiten keine Statt; und man würde alles durch einanderwerfen, wenn man sich in der Arithmetic der Figuren, und in der Geometrie der Rechnung bedienen wolte; ob zwar beydes in der Anwendung von großen Nutzen seyn kan. Gesetzt also, es sey der Winkel ABC die Summe zweyer Winkeln eines Dreyecks, und man will den dritten Winkel finden, so ziehe man nur eine der Seiten, als BC, weiter fort nach D. Der Winkel ABD ist der gesuchte dritte Winkel des Dreyecks. Denn dieser dritte Winkel des Dreyecks ist der einige, welcher mit der Summe der zween gegebenen, oder mit ABC, zween rechte Winkel ausmachet.

§. 233.

§. 233. Auf eben die Art verfähret man, wenn ein Winkel eines Dreyecks bekant ist, und man will die Summe der beyden übrigen wissen. Man ziehet den gegebenen Winkel von zwey geraden Winkeln ab, das Ueberbleibsel ist die Summe der beyden übrigen Winkel des Dreyecks, als welche nothwendig von der Größe seyn müssen, daß sie mit dem bekanten, zween gerade Winkel voll machen.

§. 234. Und hieraus siehet man, daß, wenn in einem gleichschenklichtem Dreyeck nur ein einziger Winkel gegeben ist, man die übrigen beyde finden könne. Denn dieser gegebene Winkel ist entweder derjenige, welcher der Grundlinie entgegen stehet, oder einer von denjenigen, welche an der Grundlinie liegen. Ist der Winkel gegeben, welcher der Grundlinie entgegen stehet, so hat man die Summe der beyden übrigen. Ob nun zwar, wenn das Dreyeck nicht gleichschenklicht ist, man darum die Größe der Winkel nicht einzeln haben kan, weil tausenderley Winkel zusammen gesetzet gleiche Summen geben können, so gehet doch dieses bey den gleichschenklichten Dreyecken an. Die Winkel, welche an der Grundlinie eines solchen Dreyecks liegen, sind einander gleich, IV, 121. also ist ein jeder die Helfte ihrer Summe. Wenn man demnach die Summe der Winkel gefunden hat, so darf man hernach nur diese halb nehmen, um die Winkel auch einzeln zu erhalten. Ist aber in einem gleichschenklichten Dreyeck ein Winkel an der Grundlinie gegeben, so hat man sogleich auch den andern; und der dritte Winkel, welcher der Grundlinie entgegen stehet, kan eben so gefunden werden, wie in einem jeden Dreyeck der dritte Winkel gefunden wird, wenn deren zween gegeben sind.

[*Fig. 106. 107.*] §. 235. Wir haben nicht nöthig hier bey den Dreyecken stehen zu bleiben. So bald wir die Summe aller Winkel in einem Dreyeck wissen, so können wir auch die Summen aller Winkel in einer jeden andern geradelinichten Figur finden. Man kan innerhalb einer jeden solchen Figur ein Punkt nehmen, wie hier A, und von demselben gerade Linien nach allen Ecken der Figur ziehen. Dadurch wird die Figur in Dreyecke zertheilet, und dieser Dreyecke werden an der Zahl so viele, als viele Seiten die Figur hat. Es ist leicht die Zahl aller Winkel in allen diesen Dreyecken zu finden. Alle Winkel eines jeden derselben sind zween rechten Winkeln gleich. Es sind aber der Dreyecke so viel als Seiten sind. Also werden in allen Winkeln aller Dreyecke so vielmal zween rechte Winkel enthalten seyn, als viele Seiten das Vieleck hat. Man darf also nur zween rechte Winkel durch die Zahl der Seiten des Vielecks multipliciren, um zu finden, wie viele rechte Winkel in allen Dreyecken enthalten sind,

in

in welche es ist zertheilet worden. So sind in allen Winkeln der vier Dreyecke, in welche das Viereck BCDE zertheilet ist, zweymal vier oder acht gerade Winkel enthalten, in den fünf Dreyecken, in welche wir das Fünfeck BCDEF getheilet haben, sind zweymal fünf oder 10 gerade Winkel.

§. 236. Es machen aber die Winkel der Dreyecke zum Theil die Winkel der Figur aus, wenn man sie zusammen setzet. Aus den zween Winkeln der Dreyecke bey B entstehet der Winkel des Vielecks EBC, aus den zween Winkeln der Dreyecke bey C entstehet der Winkel des Vielecks bey C, und so ferner rings herum. Wenn sonst keine andere Winkel in den Dreyecken vorkämen als die bey B, C, D, so wäre die Summe aller Winkel der Dreyecke mit der Summe aller Winkel der Vielecke einerley. Es sind aber in den Dreyecken außer diesen Winkeln bey B, C, D, E, F noch andere Winkel enthalten, nemlich die, welche inwendig um das Punct A herum stehen. Diese sind in der Summe der Winkel der Dreyecke mit enthalten, gehören aber zu der Summe der Winkel des Vielecks keinesweges. Um diese Winkel ist die Summe aller Winkel der Dreyecke größer als die Summe aller Winkel des Vielecks. Diese Winkel müssen demnach von der Summe aller Winkel der Dreyecke weggenommen werden. Wir wissen wie groß die Summe aller dieser Winkel ist, die um C stehen. Sie beträgt vier gerade Winkel, IV, 70. Diese vier gerade Winkel müssen also von der gefundenen Summe aller Winkel der Dreyecke weggenommen werden, damit man die wahre Summe aller Winkel des Vielecks erhalte.

§. 237. Demnach ist die Regel die Summe aller Winkel in einem jeden Vieleck zu finden, diese: Man multiplicire zwey rechte Winkel durch die Zahl der Seiten des Vielecks, von dem Product nehme man vier gerade Winkel weg, so bleibt die Summe aller Winkel des Vielecks übrig. Diesem zufolge sind alle Winkel in einem jeden Viereck zweymal vier geraden Winkeln weniger vieren, das ist, vier geraden Winkeln gleich. Alle Winkel in einem jeden Fünfeck betragen zweymal 5 oder 10 gerade Winkel, weniger viere, oder sechs gerade Winkel: Alle Winkel in einem jeden Sechseck betragen zweymal sechs oder zwölf gerade Winkel, weniger viere, das ist acht gerade Winkel: Alle Winkel in einem jeden drey und zwanzig Eck betragen zweymal 23, oder 46 gerade Winkel, weniger viere, das ist 42 gerade Winkel, und so ferner.

[*Fig. 107.*] §. 238. Es ist aber hiebey zu merken, daß, wenn die Spitzen einiger Winkel solcher Figuren einwärts laufen, man nicht die Win-

Winkel, welche auswärts fallen, finde, sondern die Summe der Winkel, welche inwendig um diese Spitzen stehen. Der Winkel CDE läuft einwärts. Indem man die Summe aller Winkel des Vielecks BCDEF, wie gewiesen worden ist, suchet, bekommet man den Winkel CDE nicht, denn dieser giebt keinen Winkel in einigen der Dreyecke, in welche das Vieleck zertheilet ist: sondern man findet die Summe der beyden Winkeln ADE+ADC, deren Spitzen in D fallen, welche Summe man demnach vor den Winkel der Figur CDE halten muß. Oder man muß sich vorstellen, daß die beyden geraden Linien CD und DE einen Winkel nach innen zu einschließen, der größer ist als zween rechte Winkel, IV, 71. Außer dem würde der gegenwärtige Satz nicht wahr seyn. Denn es ist nicht an dem, daß die Summe aller übrigen Winkeln der Figur bey B, C, E und F, zusamt dem äußern Winkel CDE so viel betrage, als durch die gegebene Regel gefunden wird. Wohl aber beträget die Summe aller übrigen Winkel, zusamt den beyden die innerhalb der Figur bey D liegen, so viel, nemlich weil von einem Fünfeck die Rede ist, sechs rechte Winkel.

§. 239. Dieses ist es was man überhaupt von allen Winkeln aller Figuren wissen kan. Die Summe derselben hat eine bestimte Grösse. So lang die Zahl der Seiten einer Figur einerley bleibet, so lang bleibet auch die Summe aller Winkel einerley, an sich aber und einzeln betrachtet, können die Winkel der Figuren gar sehr verschieden seyn. Ob zwar die Summe aller Winkel in einem jeden Viereck nothwendig so groß ist, als die Summe von vier geraden Winkeln, so ist es doch nicht nothwendig, daß einer dieser Winkel gerade sey. Er kan stumpf oder spitzig seyn, und so ist es mit dem zweyten und dritten; man kan die Grösse desselben aus der bekanten Summe nicht schließen. Doch ist allen Figuren gemein, daß wenn in denselben die Summe aller Winkel gegeben ist außer einem, man diesen leicht finden kan, wie ins besondere von den Dreyecken IV, 231. bereits gewiesen ist. Denn man darf nur die gegebene Summe aller Winkel außer einem von der Summe aller Winkel der Figur abziehen, so bleibet der einzige Winkel übrig, welcher in der Summe ausgelassen war. In einem jeden Fünfeck beträget die Summe aller Winkel so viel als sechs gerade. Ist nun in einem Fünfeck die Summe von vier Winkeln so viel als $4\frac{2}{3}$ gerade Winkel, so muß der fünfte Winkel $1\frac{1}{3}$ eines geraden Winkels seyn.

[*Fig.* 108.]. §. 240. Sind aber die Winkel einer gegebenen Figur als A alle gleich, so hat es mit dieser Sache eine ganz andere Bewandniß. In diesem Fall kan man aus der Summe aller Winkel auch einen

jeden ins besondere finden, auf eben die Art, wie wir oben IV, 230. die Grösse eines Winkels in einem jeden gleichseitigen Dreyecke bestimmet haben. Man darf nur die Summe aller Winkel durch die Zahl derselben, das ist, durch die Zahl der Seiten der Figur, theilen, so bekömmet man die Grösse eines jeden einzelnen Winkels. In einem Quadrat zum Exempel sind alle Winkel gleich, wie groß ist einer derselben? Die Summe aller Winkel in einem jeden Viereck beträget vier gerade Winkel. Im gegenwärtigen Fall sind die vier Winkel, welche zusammen vier gerade ausmachen, einander gleich. Dieses könte ohnmöglich seyn, wenn nicht ein jeder derselben selbst ein gerader Winkel wäre. In einem jeden Fünfeck beträget die Summe aller Winkel so viel als sechs gerade. Sind nun die Winkel in einem Fünfeck einander gleich, so ist ein jeder derselben der fünfte Theil von allen, und kommet, wenn man die Summe aller, oder sechs gerade Winkel durch die Zahl der Winkel 5 theilet. Daß demnach ein Winkel eines solchen Fünfecks $\frac{6}{5}$, oder $1\frac{1}{5}$ eines geraden Winkels seyn wird, und eben so verhält es sich in allen übrigen Fällen.

Wie die Seiten der Dreyecke durch die ihnen entgegen gesetzte Winkel bestimmet werden.

§. 241. Dieses ist alle der Nutzen, welchen wir gegenwärtig aus der Käntnis der Summe aller Winkel eines jeden Dreyecks ziehen können. Und da wir also die Dreyecke so wohl nach ihren Seiten ins besondere, als auch nach ihren Winkeln ins besondere betrachtet haben, so ist noch übrig, daß wir beydes zusammen nehmen, und sehen ob und auf was Weise wir die Grösse der Winkel aus der Grösse der Seiten, und diese aus jener schließen können.

[*Fig. 109.*] §. 242. Es lässet sich aber in dieser Materie nichts vollkommenes sagen, und wir können zu demjenigen, so von gleichschenklichten und gleichseitigen Dreyecken bereits vorgekommen ist, da wir aus der Gleichheit der Winkel die Gleichheit der entgegen gesetzten Seiten, schlossen, nur noch dieses einzige hinzuthun, daß in einem jeden Dreyecke diejenige Seite größer sey als eine andere, welcher ein größerer Winkel entgegen stehet. Es sey von dem Dreyeck ABC bekant, daß der Winkel A größer sey als der Winkel B. Ich sage man werde sicher schließen können, daß auch die Seite BC welche dem größern Winkel A entgegen gesetzet ist, größer sey als die Seite AC die dem kleinern Winkel B entgegen stehet.

§. 243.

§. 243. Man kan dieses einiger maßen abnehmen, wenn man die Seite BC nach Belieben in D verlängert, und so wohl CA um A als auch BD um B deraestalt beweget, daß das äußerste Punct C der Seite AC niemals außer BD falle, wie wir die Sache sich dergestalt vorzustellen, bereits einige mal gerathen haben. Es wird, indem der Winkel bey A auf die Weise verkleinert wird, die Seite BC nothwendig mit verkleinert, und demnach kan der Winkel A nicht wachsen oder abnehmen, wenn nicht auch zugleich die gegen überstehende Seite wächset oder abnimmet. Alleine weil bey dieser Versetzung der Seite AC, die Seite BC nicht immer einerley Lage behalten kan, sondern sich immer anders gegen AB neigen muß, damit sie beständig durch C gehen möge, so ist die Sache hier so vollkommen deutlich nicht, und wir entfernen uns also immer mehr und mehr von demjenigen, so auch blos durch den natürlichen Verstand, ohne vorhergehende Wissenschaft eingesehen werden kan, und werden je mehr und mehr gezwungen uns der bereits erlangten Erkäntniß zu bedienen, um einen oder den andern Schritt weiter zu thun.

[*Fig.* 110.] §. 244. In der Betrachtung, welche wir vorhaben, kommen uns die bereits erkante Eigenschaften eines gleichschenklichten Dreyecks zu Hülfe. Weil man setzet, daß in dem Dreyeck CAB der Winkel CAB größer sey als der Winkel B, so setzen wir an A einen Winkel, welcher dem Winkel B gleich ist. Dieser sey DAB. Dadurch wird nothwendig auch die Seite AD der DB gleich IV, 132. Ist nun aber AD=DB, so muß auch dasjenige gleich seyn, so heraus kommet, wenn man zu diesen beyden Linien gleiches hinzusetzet. Wir wollen beyderseits CD hinzusetzen. AD giebt mit dem Zusatz von DC, zwo Seiten des Dreyecks ADC, oder den Theil seiner Gränzen AD+DC. Die der AD gleiche Linie BD aber, wird durch eben dem Zusatz die ganze Linie BC. Diese BC muß demnach den beyden Linien AD+DC gleich seyn. Nun ist AD+DC nothwendig größer als AC, denn zwo Seiten in einem Dreyeck zusammen genommen, sind allezeit größer als die dritte Seite. Also wird auch BC größer seyn als AC. Das ist, in dem Dreyecke ABC ist die Seite BC, welche dem größern Winkel CAB entgegen gesetzet ist, nothwendig größer als die Seite AC, welche dem kleinern Winkel B entgegen stehet, and dieses ist dasjenige, so erwiesen werden solte.

§. 245. Ist demnach in einem Dreyeck ein Winkel der gröste unter allen, die in demselben vorkommen, so ist auch die demselben entgegen liegende Seite, die gröste unter allen Seiten desselbigen Dreyecks. In einem geradewinklichten Dreyeck ist der gerade Winkel selbst der gröste unter

allen Winkeln die in demselben Dreyeck vorkommen. Denn die übrige beyden Winkel, sind nothwendig spitzig, IV, 226. Es ist demnach auch die Seite, welche in einem geradewinklichten Dreyeck dem geraden Winkel entgegen gesetzet ist, größer als eine der übrigen. Und noch vielmehr ist in einem stumpfwinklichten Dreyeck diejenige Seite, welche dem stumpfen Winkel entgegen stehet, die gröste unter allen Seiten desselbigen Dreyecks. Man kan hier eben so schließen, wie bey dem rechtwinklichten Dreyeck, und die Sache ist an sich leicht einzusehen.

§. 246. Nun ist noch eine Betrachtung der Dreyecke übrig. Wir haben gesehen, wie diese Figuren aus einem Winkel und zwo Seiten entstehen, welche denselben Winkel einschließen, IV, 102. und diejenige Eigenschaften der Dreyecke angemerket, welche wir vermittelst dieser Zusammensetzung einsehen konten. Wir haben Dreyecke aus ihren dreyen Seiten zusammen gesetzet, IV, 134. und diese Zusammensetzung zur Auflösung verschiedener nützlicher Aufgaben gebraucht. Endlich haben wir uns auch vorgestellet, wie ein Dreyeck aus einer geraden Linie und zween Winkeln werden möge, IV, 214. Es ist noch zu betrachten übrig, wie man ein Dreyeck aus einem Winkel und zwo Seiten machen könne, die diesen Winkel nicht einschließen.

§. 247. Oder, die Sache auf eine andere Art einzusehen, so haben wir, indem ein Dreyeck zu verfertigen war, erstlich an eine gegebene gerade Linie AB von gegebener oder nach Belieben angenommener Länge, eine andere gerade Linie AC gesetzet, und so dann das Dreyeck mit einer neuen geraden Linie zwischen BC geschlossen. Zweytens haben wir, ein Dreyeck auszumachen, auf eine gerade Linie von beliebiger Länge AB, zwo andere gerade Linien AC und BC so gesetzet, daß ihre äußerste Puncte einander berühreten, und die Größe dieser letztern geraden Linien ist ebenfals gleich Anfangs bestimmet worden. Drittens hat man auf eine gerade Linie AB, zween gegebene Winkel gesetzet, den bey A und den bey B, und die geraden Linien AC und BC so lange fortgezogen, bis sie einander erreichet haben. Es bleibet noch übrig, daß wir ein Dreyeck machen, indem wir erstlich die AB hinlegen, ohne ihre Größe zu bestimmen, sodann an dieselbe AC setzen, welche mit der erstern einen Winkel von beliebiger Größe bey A machet, in dieser Linie AC ein beliebiges Punct C annehmen, und dadurch die Größe dieser Linie bestimmen: so dann aber weiter aus C eine andere Linie CB von einer bestimten Größe dergestalt legen, daß ihr äußerstes Punct in die Linie AB falle.

[*Fig. III.*] §. 248. Bey dieser Art die Dreyecke auszumachen, kom-

kommet das meiste zu bedenken vor, und wir müssen uns, damit wir alles genau verstehen, erst vorstellen, was es mit den Längen gerader Linien, die aus einem Punct, so außer einer andern geraden Linie gegeben wird, an diese letztere Linie geleget werden, vor eine Bewantniß habe. Man nehme demnach ein Punct C außer der geraden Linie AB wo man wil, und lasse aus demselben erstlich eine Perpendicularlinie auf AB fallen, diese ist CD. Sodann ziehe man auch eine andere Linie CE aus eben dem Punct an AB nach Belieben schief, so wird CDE ein geradewinklichtes Dreyeck, in welchem CE dem geraden Winkel bey D entgegen gesetzet ist, und demnach ist CE nothwendig größer als die Perpendicularlinie CD, IV, 245. Man siehet hieraus, wie es denn auch die bloße Vernunft ohne vieles Nachdenken giebt, daß unter allen geraden Linien CD, CE, die aus einem gegebenen Punct C an eine andere gerade Linie AB gezogen werden können, die Perpendicularlinie die allerkürzeste sey. Denn wenn man eine andere gerade Linie an statt der CE ziehen wolte, so würden doch die Gründe, aus welchen wir unsern Beweis hernehmen, einerley bleiben, und von einer jeden geraden Linie, welche wie CE gezogen ist, eben dasjenige zu erweisen seyn, so von der CE gezeiget worden.

§. 249. Kan nun aus C auf AB keine gerade Linie gezogen werden, die kürzer wäre als die Perpendicularlinie, und man wil aus einem gegebenen Winkel CED, der Seite CE und der Seite CD ein Dreyeck machen, so muß die Seite CD nicht kleiner angenommen werden als die Perpendicularlinie, die aus dem Punct C auf AB fällt, sonst würde die Linie CD die AB niemals erreichen, und das Dreyeck könte nicht geschlossen werden.

§. 250. Die Perpendicularlinie die aus C auf AB kan gezogen werden, ist die **Entfernung** des Puncts C von der AB. Jederman misset die Entfernung eines Puncts von einer Linie durch dieselbe, und man kan sich sonst keine geschickte Art vorstellen, nach welcher die Entfernung eines Puncts von einer geraden Linie zu messen wäre. Bedienet man sich dieses Begrifs, so wird dieser Satz so ausgedrückt: Man kan aus dem Punct C keine Linie ziehen, welche die gerade Linie AB erreichte, und doch kleiner wäre als die Entfernung des Puncts C von derselben AB. Und dieses ist vor sich klar.

[*Fig.* 112.] Will man, nachdem dergestalt aus dem Punkt C auf die gerade Linie AB eine Perpendicularlinie CD gefallen ist, wie auch eine andere schiefe CE, noch eine andere schiefe Linie CF durch eben das Punct C, an eben die Linie AB ziehen, so ist die äußere derselben CF, die nemlich

von der Perpendicularlinie CD am weitesten entfernet ist, nothwendig grösser als die innere CE. Denn weil in dem rechtwinklichten Dreyeck CDE der Winkel CED spitzig ist; so muß seine Ergänzung zu zween geraden Winkeln, oder der Winkel CEF stumpf, und das Dreyeck CEF stumpfwinklicht seyn. Demnach ist die Seite desselben CF dem stumpfen Winkel bey E, und die andere CE dem spitzigen bey F entgegen gesetzet. Es ist also die erstere Linie CE nothwendig kleiner als die andere CF, IV, 245.

§. 252. Ist nun aber dieses, daß die schiefen Linien CE, CF immer desto größer und größer fallen, je weiter sie sich von der Perpendicularlinie CD entfernen, so ist auch nicht schwer einzusehen, daß, wenn ihrer verschiedene, wie hier die CE und CF, an eine Seite der Perpendicularlinie CD gezogen werden, ohnmöglich zwo derselben einander gleich seyn können. Denn wenn man zwo dieser Linien vergleichet, welche man will, so muß nothwendig eine derselben von der Perpendicularlinie CD weiter entfernet seyn als die andere, gleichwie CF weiter von CD abstehet als CE, und demnach die eine CF, größer seyn als die andere CE.

§. 253. Es ist keine gerade Linie so groß, daß man sie nicht aus C an AB anbringen könte, daß nemlich ihr äußerstes Punct wie hier das Punct F, in AB fält, wenn man nur AB so sehr verlängern darf als man will, und dieses ist an sich selbst klar. Denn wenn es nicht so wäre, und DF wäre etwa zu lang, so müste man nur AB weiter fortziehen. Weil dieses sich ohne Ende thun läst, so muß endlich AB so lang werden, daß das äußerste Punct der Linie AF, oder einer andern dergleichen, noch in dieselbe fallen kan. So bald als DA so groß gemachet wird als CF, wird dieses gewiß geschehen, weil jederzeit DF kleiner ist als CF, IV, 245.

§. 254. An der andern Seite der Perpendicularlinie kan man eben dergleichen schiefe Linien ziehen als CE und CF, und von eben der Länge, welche diese haben. Man mache De so groß als DE, und ziehe Ce, so ist auch Ce = CE. Denn von den Puncten der geraden Linie AB, welche von D gleich weit entfernet sind, nemlich von den Puncten E und e, ist auch das Punct C der Perpendicularlinie CD gleichweit entfernet, und diese Entfernungen werden durch Ce, CE gemessen. Der Satz ist oben IV, 169. da gewesen, und wenn man sich desselben nicht sogleich erinnern solte, wird man hoffentlich nichts desto weniger zugeben, daß Ce der CE gleich sey. Denn es ist dieses auch bloß mit dem natürlichen Verstand leicht einzusehen; oder wenn man auf die erste Gründe zurück gehen will, daraus, weil in den beyden Dreyecken CDE und CDe die geraden Winkel bey D, einander gleich sind, die Seite De aber man der Seite DE gleich genommen hat, und CD

den beyden Dreyecken CDE, CDe gemeinschaftlich ist. Denn hieraus folget, daß auch die dritten Seiten CE und Ce dieser Dreyecke einander gleich seyn.

§. 255. Dieses alles musten wir betrachten, um deutlich einzusehen, wie aus einem Winkel und zwoen geraden Linien, die denselben Winkel nicht einschließen sollen, ein Dreyeck zusammen zu setzen sey. Man stelle sich nun nochmals die gerade Linie AB vor, auf welcher CF schief und CD perpendicular stehet. Aus dem Winkel CFB nun, aus der Seite CF und aus einer andern Seite, ist ein Dreyeck zu machen. Wir haben gesehen, daß diese zweyte Seite zwar so groß seyn könne als CD, aber nicht kleiner. Man kan sie aber auch größer nehmen, und zwar nach Belieben wie man will. Nimmet man nun vor diese zwote Seite eine Linie an, die größer ist als CD aber kleiner als CF, und leget sie an die Seite A der Perpendicularlinie CD, aus C an die gerade Linie AB, so kan sie nicht anders als zwischen CF und CD fallen. Denn solte sie außer der CF weiter nach A zu fallen, so müste sie größer seyn als CF, IV, 251. Es wird demnach aus dem Winkel CFB, aus der Seite CF und aus der Seite CE zwar das Dreyeck CFE verfertiget, aber man kan aus eben diesen Dingen auch noch ein anderes Dreyeck machen. Denn man kan auch auf die andere Seite der CD, wie IV, 254. gewiesen worden ist, eine gerade Linie Ce setzen, welche der CE gleich ist, und also das Dreyeck CFe aus eben dem Winkel CFB, und zwoen geraden Linien CF und Ce = CE, ausmachen.

§. 256. So oft man demnach einen Winkel CFB annimmet, eine Seite CF welche an demselben lieget, und eine andere Seite CE, welche dem Winkel F entgegen gesetzet werden soll, welche letztere CE größer ist als CD, aber kleiner ist als CF, so können daraus zwey Dreyecke CFE und CFe zusammen gesetzt werden, welche so wohl nach ihrer eigenen Größe, als auch nach der Größe ihrer übrigen Seiten und Winkel verschieden sind, wie dieses aus der Figur selbst augenscheinlich ist.

§. 257. Wolte man aber Cf eben so groß nehmen, als CF, so würde wieder nur ein einziges Dreyeck können beschrieben werden, und zwar würde es gleichschenklicht werden. Wir kennen aber diese Art der Dreyecke zu gut, daß wir uns bey denselben aufhalten solten.

§. 258. Will man endlich aus dem Winkel CEB, aus der gegebenen Seite CE und einer andern CF die größer ist als CE, ein Dreyeck beschreiben, so kan man zwar die gegebene zweyte Seite wieder auf beyde Seiten der Perpendicularlinie CD legen, einmal nemlich in CF und das andere mal in Cf; aber nur eine dieser Linien, nemlich Cf ist dem Winkel CEB ent-

entgegen gesetzet, die andere CF machet zwar auch mit der CE und AB ein Dreyeck, nemlich CFE, aber es kommet in demselben der Winkel CEB, welchen man doch in das Dreyeck bringen solte, nicht vor, sondern seine Ergänzung zu zween geraden Winkeln CEA. Es ist demnach nur das einzige Dreyeck CEf aus dem gegebenen Winkel CEB, und aus den geraden Linien CE und Cf = CF zusammen gesetzet: Und es wird aus einem gegebenen Winkel und zwoen geraden Linien, die den Winkel nicht einschließen, nur ein Dreyeck, wenn die Seite so dem Winkel entgegen gesetzet werden soll, größer ist als diejenige, welche an demselben sol zu liegen kommen.

[*Fig.* 113.] §. 259. Wenn zwey Dreyecke auf diese Art beschrieben werden, so sind nothwendig auch ihre übrige Seiten und Winkel, wie auch die Dreyecke selbst gleich. Oder deutlicher, wenn man zwey Dreyecke hat, ABC und abc, und man findet, daß in denselben die Winkel bey A, a, einander gleich sind, daß die Seite AC der Seite ac gleich sey, und CB der cb; so kan man schließen, daß auch die Dreyecke selbst einander gleich seyn, daß AB gleich sey der ab, und der Winkel ACB dem Winkel c, und folgends auch CBA dem b: Nur muß man noch dabey wissen, daß CB größer sey als CA, denn sonst könten diese Schlüsse falsch seyn. Man kan beständig den Winkel a auf A bringen, weil diese Winkel einander gleich sind, und weil auch ac der AC gleich ist, so kan es nicht anders seyn, es muß, sobald die Seite ac aus dem Punct A auf AC geleget wird, das Punct c in C fallen. Ist nun CB größer als CA, und folgends auch cb größer als ca, so kan es nicht anders seyn, es muß cb auf CB fallen, weil cb der CB gleich ist, und von C innerhalb den Winkel CAB eine dergleichen Linie nur einmal gesetzet werden kan, IV, 258. Fiele cb außer CB in CD, so wären aus dem Punct C zwo gerade Linien an AB gezogen, und diese wären einander gleich; wir haben aber gesehen, daß dieses bey den Umständen unserer Figur nicht seyn könne. Da nun also cb auf CB fällt, so fallen die ganzen Umkreise der Dreyecke CAB, cab zusammen, woraus man leicht siehet, daß so wohl die Dreyecke selbst, als ihre übrige Seiten, und die Winkel welche zwischen gleichen Seiten liegen, einander gleich seyn müssen.

[*Fig.* 114.] §. 260. Dieser Satz ist allgemein, und wir können aus demselben besondere Sätze heraus bringen, wenn wir uns Dreyecke von besonderer Art vorstellen, in welchen die angegebene Bedingungen, aus welchen wir auf ihre Gleichheit geschlossen haben, anzutreffen sind. Gesetzet, es seyn die Winkel A und a gerade, und folgends die zwey Dreyecke CAB und cab geradewinklicht, und ihre Seiten CA, ca, wie auch CB, cb

seyn

seyn einander noch gleich; so werden die übrigen Seiten AB, ab, die Winkel welche zwischen gleichen Seiten liegen, und die Dreyecke selbst gleich seyn. Denn dieses, daß AC=ac, und CB=cb, sind die Bedingungen, aus welchen wir erst besagte Gleichheiten allezeit schließen können, wenn nur auch die Winkel bey A und a gleich, und die Seiten CB, cb größer sind als die Seiten CA, ca. Nun aber sind diese Bedingungen nothwendig da, wenn die Winkel A, a gerade sind. Denn alle gerade Winkel sind einander gleich, und die Seiten, die in solchen Dreyecken den geraden Winkeln entgegen gesetzet sind, sind nothwendig größer als die übrigen, IV, 245. Demnach kan man in zweyen geradewinklichten Dreyecken bloß aus der Gleichheit zwoer Seiten, ob diese zwar die geraden Winkel nicht einschließen, die Gleichheit der Dreyecke, der übrigen Seiten und der Winkel zwischen den gleichen Seiten, schließen.

§. 261. Eben so ist es auch mit stumpfwinklichten Dreyecken. Nur muß man hier auch die Gleichheit der stumpfen Winkel als eine Bedingung annehmen, weil stumpfe Winkel auch ungleich seyn können. Sind aber die Winkel A und a stumpf und einander gleich, ist ferner die Seite CA gleich der Seite ca, und CB gleich der Seite cb, so sind auch diese Dreyecke gleich, und ihre übrigen Seiten, und die Winkel, welche zwischen den gleichen Seiten liegen. Denn daß CB größer sey als CA, welches in dem allgemeinen Satz mit als eine Bedingung erfordert worden, lieget hier wieder in der Natur dieser Dreyecke selbst. So bald ein Dreyeck stumpfwinklicht ist, muß nothwendig die Seite desselben, welche dem stumpfen Winkel entgegen stehet, größer seyn als eine der übrigen.

[*Fig.* 409.] §. 262. Doch dieser letzte Satz, von den stumpfwinklichten Dreyecken, wird selten gebraucht: desto öfter aber wird der vorhergehende angewendet, welcher von rechtwinklichten Dreyecken handelt. Ja wir müssen demselben noch eine kleine Anmerkung beyfügen, die ebenfals von Nutzen seyn wird. Wenn man in einem rechtwinklichten Dreyeck ABC die gröste Seite AC behält, verkleinert aber eine der übrigen, und macht, zum Beyspiel, BD aus BC; so muß die andre Seite, welche mit der BC den rechten Winkel einschließet, BA, nothwendig größer genommen werden, und zu BE oder etwas dergleichen anwachsen. Außer dem ist es nicht möglich, daß ED der AC gleich sey. Dieses ist die Anmerkung; und man schließet die Richtigkeit derselben aus dem, so gesagt worden ist, gar leicht. Es sey zu dem Ende AD gezogen. Wenn man sich vorstellt daß die Linien AC und AD beide von dem Punct A an die Linie BC anlaufen, so siehet man alsbald, daß die AC größer sey, als

AD, IV, 252. Wenn also die Seite des rechtwinklichten Dreyecks ABC zu BD verkleinert wird, und man behält die Seite AB, so wird die gröste Seite AC nothwendig verkleinert, weil sie nunmehro AD wird. Und will man machen, daß dieselbe ihre Größe behalte, so kan man nicht anders, als sie außer der DA in DE legen. Denn wenn man von D innerhalb der DA an die BA eine gerade Linie ziehen wolte, so würde sie noch kleiner werden, als DA. Fällt aber die Seite AC, wenn man sie von dem Punct D an die gerade Linie BE leget, außer der DA, so wird dadurch die Seite BE des Dreyecks EBD nothwendig größer, als die Seite AB des vorigen ABC. Es läßt sich aus diesem der zuletzt von den rechtwinklichten Dreyecken beygebrachte Satz IV, 260. gar leicht erweisen, auch kan eben dergleichen von den stumpfwinklichten Dreyecken erwiesen werden. Wir haben uns aber ohnedem lang genug bey dieser Zusammensetzung der Dreyecke aufgehalten.

§. 263. Und damit ist die Zusammensetzung der geraden Linien, welche wir machen konten, indem wir ihrer drey annahmen, zu Ende gebracht. Es ist nicht nöthig daß wir auch die Figuren, welche von vier geraden Linien eingeschlossen werden, so umständlich betrachten, und auf die Eigenschaften derselben so genau Acht haben als bey den Dreyecken geschehen ist, und zum Theil noch geschehen muß. Dasjenige so von einigen derselben in den Anfangsgründen zu wissen nöthig ist, haben wir an seinem Ort angebracht, und das übrige wird in dem folgenden vorkommen. Noch viel weniger ist es nöthig, daß wir die Eigenschaften der übrigen Figuren, die mehr als vier Seiten haben, uns insbesondere weitläuftig vorstellen. Man würde damit niemals fertig werden, und doch könte diese Betrachtung in Anwendung der Geometrie wenigen Nutzen haben. Die besondere Arten derselben, welche nemlich gleiche Seiten und gleiche Winkel haben, welche noch betrachtet werden müssen, lassen sich nicht wohl ohne einiger Kentniß des Cirkels abhandeln, zu dessen Betrachtung wir uns nunmehro wenden.

Fünfter Abschnitt.

Von geraden Linien und Winkeln bey den Cirkelkreisen.

Erste Eigenschaften der Cirkel.

§. 1.

Alle Cirkel, welche gleiche Halbmesser haben, sind so wohl selbst einander gleich, als auch ihre Umkreise. Solte man dieses nicht so gleich einsehen können, so darf man nur zwo Scheiben, welche mit gleichen Halbmessern beschrieben sind, in Gedanken dergestalt auf einander legen, daß ihre Mittelpuncte in eines zusammen fallen. Es werden so dann auch ihre Umkreise zusammen fallen, man mag im übrigen die Cirkel um ihre Mittelpuncte drehen, wie man wil. Und dieses siehet man daraus, weil, wenn man um einen gegebenen Mittelpunct mit einer bestimten Oefnung des Cirkels einen Kreiß beschreibet, dieser nicht verschieden werden kan, man mag anfangen wo man wil, und die Spitze, welche den Umkreiß beschreibet, so oft als man wil, herum führen, IV, 93.

[*Fig. 115.*] §. 2. Hieraus schließen wir, daß der Cirkelkreis um und um auf einerley Art gekrümmet seyn müsse, nicht etwa wie die Linie der 115 Figur ABCD, welche bey A und C viel stärker gekrümmet ist, als bey B, und da sie sonst überall einwärts gebogen ist, bey D eine Hohlung auswärts hat. Es lassen sich aber auch dergleichen Figuren um kein Punct also drehen, wie eine Scheibe um ihren Mittelpunct kan gedrehet werden, so nemlich, daß kein Theil derselben aus den Gränzen, in welchen die Figur einmal eingeschlossen war, hinaus wiche. Eine Scheibe kan man in einem Loche herum drehen, welches die Scheibe um und um berühret, und sonst keine andere Figur.

[*Fig. 116. 117. 118.*] §. 3. Es folget auch aus dieser sehr leichten Betrachtung, daß, wenn die Umkreise zweyer Cirkel AB und CD durch ein gemeinschaftliches Punct E gehen, sie mögen nun in diesem Puncte einander schneiden, oder blos berühren, es nicht möglich sey, daß sie beide einerley Mit-

telpunct haben. Denn da alle Cirkelkreise, welche um einerley Mittelpunct beschrieben sind, und deren Umkreise durch einerley Punct E gehen, ganz auf einander fallen, und einander decken, so könten die Cirkel AB und CD, deren Umkreise beide durch E gehen, nicht verschieden seyn, sondern würden ganz in einem einzigen Cirkel zusammen fallen, wenn ihre Mittelpuncte zusammen fielen.

[*Fig. 119.*] §. 4. Fallen aber die Mittelpuncte zween verschiedener Cirkeln AB, CD in eines zusammen, oder sind zween Cirkel AB und CD um einen einigen Mittelpunct E, beschrieben, so können die Umkreise derselben einander ohnmöglich erreichen. Denn wäre dieses, so fielen auch hier die Cirkel ganz in einen zusammen. Man pfleget zu sagen, daß dergleichen Umkreise einander **parallel** sind, und nennet die Figur, welche von denselben beschlossen wird, oder dasjenige, so übrig bleibt, wenn man aus der Scheibe AB die Scheibe CD heraus schneidet, **einen Ring**.

§. 5. Man siehet leicht, daß, wenn man bey dergleichen Parallelcirkeln einen Halbmesser ECA ziehet, das Stück desselben CA von bestimter Länge, und überall einerley seyn werde, man mag den Halbmesser ziehen, wo man wil. Denn es ist dieses Stück CA der Unterschied der beiden Halbmesser der Cirkel, diese aber haben ihre bestimmete Größe, und sind um und um von einerley Länge.

[*Fig. 120.*] §. 6. Wenn man in einem Cirkel zween Halbmesser AB und BC ziehet, so bekommet man eine Figur ABC, welche durch diese zween Halbmesser AB und BC, und durch den Bogen AC beschlossen ist. Man heißet dieselbe einen **Ausschnitt**, und AC den **Bogen des Ausschnitts**. Das Ueberbleibsel ABCDA, so von eben den zweyen Halbmessern AB und BC, und dem Bogen ADC beschlossen wird, muß man, wenn davon zu reden ist, wie wohl dieses eben nicht oft geschiehet, ebenfalls einen Ausschnitt nennen.

§. 7. Sind zween Cirkel einander gleich, das ist, haben sie gleiche Halbmesser, und man machet in denselben zween Ausschnitte ABC, abc, deren Winkel an den Mittelpuncten B und b gleich sind; so sind auch die Ausschnitte selbst und ihre Bogen AC und ac gleich. Ist aber der eine Winkel größer als der andere, so ist auch der Ausschnitt, welcher den größern Winkel hat, größer als der Ausschnitt mit dem kleinern Winkel, und der Bogen von jenem ist größer als der Bogen von diesem. Dieses siehet man gar leicht von selbsten ein: vollkommen deutlich aber wird es, wenn man nur die Spitzen der Winkel B und b, das ist, die Mittelpuncte der Cirkel, auf einander bringet, da denn die Cirkel selbst, und ihre Umkreise

zusam-

zusammen fallen müssen. Stellet man sich vor, daß, nachdem dieses geschehen ist, der eine Cirkel so lang um seinen Mittelpunct gedrehet werde, bis die Seite b c auf BC zu liegen kommet; so zeiget sich beides, die Gleichheit der Bogen und die Gleichheit der Ausschnitte. Denn sind die Winkel b und B einander gleich, so fället nunmehro auch b a auf BA, und a in A. Zugleich aber siehet man, daß, wenn der Winkel B größer ist als b, auch der Bogen AC größer seyn müsse als a c, und der Ausschnitt ABC größer als a b c.

§. 8. Hieraus folget umgekehret, daß, wenn in zween gleichen Cirkeln, zween Bogen A C und a c gleich angenommen werden, und man ziehet ihre Halbmesser AB, a b und BC, b c; auch die Winkel B und b einander gleich werden müssen. Denn wenn diese Winkel B und b ungleich wären, so müsten auch die Bogen ungleich seyn, wie eben erwiesen ist.

§. 9. Da auch die Winkel B und b in zween gleichen Cirkeln nicht gleich oder ungleich seyn können, ohne das zugleich die Ausschnitte ABC, a b c gleich oder ungleich werden; so folget hinwiederum aus der Gleichheit der Ausschnitte, deren Halbmesser einerley Größe haben, auch die Gleichheit der Winkel an den Mittelpuncten, oder an den Spitzen der Ausschnitte, und die Gleichheit ihrer Bogen. Man kan sich nicht vorstellen, wie in zween gleichen Cirkeln entweder die Winkel B und b, oder die Bogen AC und a c, oder die Ausschnitte ABC, a b c gleich seyn könten, wenn eins von den zwey übrigen dieser drey Dinge in den beiden Cirkeln verschieden ist.

[*Fig.* 121.] §. 10. Wenn man demnach durch den Mittelpunct eines Cirkels E zwo gerade Linien AB, CD ziehet, deren eine auf der andern perpendicular stehet, so wird der Cirkel so wohl als dessen Umkreis in vier gleiche Theile getheilet. Und es ist ein jeder der vier Bogen AC, CB, BD, DA der vierte Theil des ganzen Umkreises, gleichwie ein jeder der vier Ausschnitte AEC, CEB, BED und DEA der vierte Theil der Scheibe ist; so daß man überhaupt sagen kan, daß ein Ausschnitt, dessen Winkel gerade ist, der vierte Theil des Cirkels, und sein Bogen der vierte Theil des Umkreises sey.

§. 11. Demnach machen jede zween solcher Ausschnitte die Helfte des Cirkels, und ihre beyde Bogen die Helfte des Umkreises aus, und eine jede gerade Linie AB oder CD, welche durch den Mittelpunct eines Cirkels gezogen wird, theilet sowohl den Cirkel selbst, als dessen Umkreis in zwey gleiche Theile. Man kan dieses auch leicht sehen, wenn man einen auf Papier gezeichneten Cirkel dergestalt zusammen leget, daß der Bruch durch den Mittelpunct gehet, und nachdem dieses geschehen ist, ihn so dann noch ein-

mal, nach rechten Winkeln zusammen falzet, da denn die vier Ausschnitte, in welche er dergestalt zertheilet wird, auf einander fallen, und einander decken werden; doch wem sind diese Dinge unbekant?

§. 12. Eine durch den Mittelpunct eines Cirkels gezogene gerade Linie AB, welche sich zu beyden Seiten an dem Umkreis desselben in A und B endiget, heißet der **Durchmesser des Cirkels.** Derselbe ist zweymal so groß als der Radius, denn der Mittelpunct theilet den Durchmesser in zwey gleiche Theile, und eben deswegen nennet man den Radius auch den Halbmesser. Es ist gezeigt worden, daß der Durchmesser seinen Cirkel und dessen Umfang gleich theile.

[*Fig.* 122.] §. 13. Wenn man einen Ausschnitt von beliebiger Größe ABC annimmt, und theilet seinen Bogen in so viele gleiche Theile als man will; so wird vermittelst der Halbmesser BD, BE, BF, so wol der Winkel B, als auch der Ausschnitt in kleinere Winkel und Ausschnitte, ABD, DBE, EBF, FBC, getheilet, die einander alle gleich sind. Dieses fließet aus dem, so IV, 7. gezeiget ist, unmittelbar: und man kan hinwiederum aus der Gleichheit der Winkel, oder auch aus der Gleichheit der Ausschnitte ABD, DBE, EBF, FBC, auf die Gleichheit ihrer Bogen schließen. Demnach wird die Theilung des Winkels ABC, die Theilung des Bogens AC, und die Theilung des Ausschnittes ABC zugleich verrichtet, und sobald eine von diesen Theilungen verrichtet ist, hat man auch die andere und die dritte, oder man kan sie doch leicht haben, bloß indem man die Halbmesser BD, BE, BF gehörig ziehet.

[*Fig.* 123.] §. 14. Sonst ist bekant, und wir haben es IV, 98. angemerket, daß der Umkreis eines Cirkels von einer geraden Linie in mehr als einem Punct geschnitten werden könne. Gegenwärtig müssen wir betrachten, ob mehr als zween solche Durchschnitte möglich sind. Man siehet aber leicht, daß dieses nicht sey. Denn wenn um den Mittelpunct A ein Cirkelkreis beschrieben wäre, welcher die gerade Linie DB in den drey Puncten DCB berühret oder schneidet, oder wenn die krumme Linie BCD, welche drey Puncte B, C, D mit der geraden Linie DB gemeinschaftlich hat, ein Cirkel wäre: so könte man von dem Mittelpunct desselben A drey gerade Linien AB, AC, AD ziehen, welche Halbmesser des Cirkels und folgends einander gleich wären. Da nun aber diese Puncte B, C und D der geraden und der krummen Linie gemeinschaftlich sind, so müsten von einem Punct außer der geraden Linie DB, nemlich von A, an diese, drey andere gerade Linien AB, AC, AD können gezogen werden, welche einander gleich sind. Dieses aber gehet ohnmöglich an, wie wir IV, 251. deutlich gesehen ha-

haben. Denn man stelle sich vor, daß aus A auf die gerade Linie DB eine Perpendicularlinie gezogen sey, so fällt diese entweder auf AC oder nicht. Fällt die Perpendicularlinie auf AC, das ist, ist AC selbst auf DB perpendicular, so ist nothwendig AB größer als AC, weil die Perpendicularlinie die kleinste der geraden Linien ist, die aus A an DB fallen. Fällt aber die Perpendicularlinie nicht auf AC, sondern zwischen AC und AD, so ist die AB, so von der Perpendicularlinie weiter abweichet, größer als die AC, welche ihr näher lieget. Sind aber die drey geraden Linien AB, AC, AD einander nicht gleich, so ist es auch nicht möglich, daß die krumme Linie BCD, welche in dreyen Puncten mit der geraden Linie DB zusammen fället, ein Cirkel sey, oder ist die krumme Linie BCD ein Cirkel, so kömt sie mit der geraden Linie DB nicht in drey Puncten zusammen, und schneidet also oder berühret sie nicht in dreyen Puncten. Noch vielweniger also kan der Cirkelkreis von einer geraden Linie in vier oder noch mehreren Puncten geschnitten werden.

[*Fig.* 115.] §. 15. Hieraus sehen wir wiederum, daß ein Cirkelkreis nicht wie die krumme Linie ABCD in der 115 Figur irgendwo einwärts gebogen seyn könne, wie wir dieses bereits geschlossen haben. Denn wäre ein Cirkel irgendwo einwärts gebogen, so müste ihn eine gerade Linie in mehr als zwey Puncten schneiden können, wie die eben gebrauchte 123 Figur weiset.

[*Fig.* 124.] §. 16. Wenn man demnach zwey Puncte A und B in dem Umkreis eines Cirkels nach Belieben annimmet, und ziehet sie mit einer geraden Linie AB zusammen, so fält diese gerade Linie ganz in den Cirkel, und theilet sowol denselben als seinen Umkreis in zwey Theile. Und diese Eigenschaft hat der Cirkel mit einer jeden krumlinichten Figur, deren Umkreis überall einwärts gebogen ist, gemeinschaftlich. Eine solche gerade Linie AB heißet eine **Sehne**, und die zween Bogen AFB und AGB, in welche sie den Umkreis theilet, heißen die **Bogen** dieser Sehne. Die zwey Theile aber in welche sie den Cirkel zerschneidet, oder die Figuren AFB und AGB, welche die Sehnen mit ihren Bogen einschließen, heißen **Abschnitte**.

§. 17. Man kan eine Sehne so ziehen, daß sie durch den Mittelpunct C gehet, wie hier DE. Diese theilet so dann den Cirkel in zwey gleiche Theile, denn sie ist der Durchmesser, V, 12. Wir setzen, daß dieser Durchmesser DE mit der Sehne AB parallel laufe, oder wenigstens sie nicht schneide: denn man kan ihn allezeit auf die Art ziehen. So ist der eine Abschnitt AFB, welcher von der Sehne AB und dem Bogen AFB beschlossen wird, und in welchen der Mittelpunct C nicht lieget, kleiner als der andere AGB, den eben die Sehne AB mit dem Bogen AGB beschließet, und

in

in welchem der Mittelpunct C befindlich ist; auch ist der Bogen AFB kleiner als der andere AGB. Derowegen wird der Abschnitt AFB, in welchem der Mittelpunct nicht lieget, der **kleinere**, und dieser AGB, in welchem der Mittelpunct anzutreffen ist, der **größere Abschnitt** genennet.

Von den Sehnen der Cirkel.

[*Fig. 125.*] §. 18. Ziehet man nun eine Sehne, AB, in einem Cirkel, wie man wil, nur nicht durch den Mittelpunct, und ziehet aus dem Mittelpunct des Cirkels C zween Halbmesser CA und CB an diese Sehne, so bekomt man ein gleichschenklichtes Dreyeck ABC, von welchem die Sehne AB die Grundlinie ist, und der Mittelpunct C die Spitze des Winkels, welcher der Grundlinie entgegen stehet. Denn da die zwo Seiten AC und BC Halbmesser eines Cirkels sind, so sind sie nothwendig gleich. Es wird sich demnach auf dieses Dreyeck alles dasjenige anwenden lassen, so wir von den gleichseitigen Dreyecken längst eingesehen haben: nur müssen wir hier die Namen verändern, und die Grundlinie AB nunmehro die Sehne, und das Punct C den Mittelpunct, die Seiten aber CA, CB, die Halbmesser des Cirkels nennen.

§. 19. Man stelle sich vor, daß aus dem Mittelpunct C die gerade Linie DF auf die Sehne perpendicular gezogen sey. Diese wird sowohl die Sehne selbst, als auch den Winkel ACB in zwey gleiche Theile theilen. Denn dieses ist von allen gleichschenklichten Dreyecken IV, 161. erwiesen worden. Wird aber der Winkel ACB durch die Linie CF in zwey gleiche Theile getheilet, und man verlängert dieselbe bis an den Umkreis in E, so muß eben diese Linie auch den Bogen der Sehne AB in E in zwey gleiche Theilen, V, 13. Ja weil auch der Winkel ACD, welcher entstehet, indem man die Linie CE auf die andere Seite verlängert, dem Winkel DCB gleich ist, denn diese sind die Ergänzung der gleichen Winkel ACE und ECB zu zween rechten Winkeln; so ist auch der Bogen AD dem Bogen DB gleich, und die gerade Linie CF, welche aus dem Mittelpunct eines Cirkels C auf seine Sehne AB perpendicular fält, theilet nicht nur den einen Bogen derselben AEB, sondern auch den andern ADB in zwey gleiche Theile.

§. 20. Weil die gerade Linie CE die einzige ist, welche aus C auf AB perpendicular gezogen werden kan, und eben diese einzige Linie auch die AB sowohl als den Winkel ACB, und folgends die Bogen AEB und ADB in zwey gleiche Theile theilet: So kan man diese Linie auf verschiedene Arten bestimmen. Man kan, wie bereits geschehen ist, sagen, daß DE diejenige

Linie sey, welche durch den Mittelpunct auf die Sehne AB perpendicular fället. Man kan eben diese DE die Linie nennen, welche durch den Mittelpunct gehet, und die Sehne in zwey gleiche Theile schneidet. Man kan sie dadurch ausdrücken, daß man angiebt, sie stehe auf der Sehne AB perpendicular, und theile dieselbe in zwey gleiche Theile, oder sie stehe auf der Sehne perpendicular, und theile den Bogen AEB oder ADB in zwey gleiche Theile, oder sie gehe durch den Mittelpunct C, uud theile den Bogen AEB in zwey gleiche Theile, oder auch sie theile so wohl die Sehne AB als den Bogen AEB oder ADB, welcher zu dieser gehöret, in zwey gleiche Theile. Alles dieses thut die einzige Linie DE, und sie wird durch alle diese Beschreibungen bestimmet.

§. 21. Man kan hieraus verschiedene Sätze machen, welche alle nunmehro keines weitern Beweises benöthiget sind, nachdem wir gesehen haben, daß sie nichts neues enthalten. Sie sagen nichts anders als daß, wenn man diese Linie AB auf diese oder jene Art bestimmet, sie alle die Eigenschaften haben müsse, von welchen schon bekant ist, daß sie dergleichen Linien zukommen. Doch wollen wir diese Sätze zum Ueberfluß berühren, und hin und her etwas anbringen, so zu kurzer Wiederholung des Beweises dienen kan.

§. 22. Wenn man sich vorstellet, daß die Linie CF durch den Mittelpunct C dergestalt gezogen sey, daß sie die AB in zwey gleiche Theile theilet, so theilet sie die Grundlinie des gleichschenklichten Dreyecks ABC in zwey gleiche Theile, und ist folgends auf diese Grundlinie AB perpendicular, IV, 160. sie theilet auch den Winkel ACB in zwey gleiche Theile, und folgends auch die Bogen AEB und ADB.

§. 23. Wenn man annimmet, daß die CF auf die Mitte der AB perpendicular gesetzt sey, so siehet man daraus, daß sie auch durch den Mittelpunct C gehen muß, weil, wenn dieses nicht wäre, man aus C eine andere Perpendicularlinie auf AB fallen lassen könte, welche AB in andere zwey gleiche Theile theilen würde, welches widersinnisch ist. Dann man kan eine gegebene gerade Linie nur auf einerley Art in zwey gleiche Theile theilen, und einerley Größe hat nicht verschiedene Helften. Gehet aber die dergestalt gezogene CF durch den Mittelpunct, so siehet man aus dem vorigen, V, 22. daß sie, wenn sie verlängert wird, auch die Bogen der Sehne AB gleich theilen müsse.

§. 24. Stehet EF auf AB perpendicular, und theilet auch den Bogen AEB in zwey gleiche Theile, so muß sie, wenn man sie verlängert, durch den Mittelpunct gehen, weil man sonst eine andere gerade Linie aus

dem Mittelpunct auf AB perpendicular ziehen könte, welche verlängert, den Bogen AB in zwey andere gleiche Theile theilen würde, so nicht seyn kan. Demnach theilet eben diese EF auch die Sehne AB in zwey gleiche Theile, V, 19.

§. 25. Gehet die Linie CE durch den Mittelpunct C, und theilet den Bogen AEB in zwey gleiche Theile, so theilet sie auch den Winkel ACB des gleichschenklichten Dreyecks in zwey gleiche Theile. Woraus wieder fließet, IV, 158. daß sie auf AB perpendicular stehen, und diese gleich theilen müsse.

§. 26. Und wenn endlich FE so wohl die Sehne AB als auch ihren Bogen AEB in zwey gleiche Theile theilet, so siehet man daraus, daß sie auch auf AB perpendicular stehen, und wenn man sie verlängert, durch den Mittelpunct C gehen müsse, weil, wenn dieses nicht wäre, man aus C auf AB eine andere Perpendicularlinie ziehen könte, welche V, 19. so wohl die AB als auch, wenn sie verlängert würde, den Bogen AEB in andere zwey gleiche Theile theilen würde: dieses aber ist unmöglich.

[*Fig. 126.*] §. 27. Man siehet hieraus, daß die Theilung eines Cirkelbogens in zwey gleiche Theile nichts erfordere, so nicht bereits da gewesen und gezeiget worden wäre. Es sey der Bogen AB in zwey gleiche Theile zu theilen. Man ziehe seine Sehne AB und setze auf die Mitte derselben die Perpendicularlinie CD, diese wird, wenn man sie gehörig verlängert, auch den Bogen in D in zwey gleiche Theile theilen. Oder, hat man den Mittelpunct C, so lasse man aus demselben auf AB die Perpendicularlinie CD fallen, und verlängere sie bis sie den Bogen schneidet. Oder, man theile AB in zwey gleiche Theile, und ziehe durch den Mittelpunct derselben und durch den Mittelpunct des Cirkels C die gerade Linie CD. Alles dieses kommet in der Anwendung, wenn man Geometrisch verfähret, fast auf eines hinaus, wie man leicht sehen wird, wenn man sich die Mühe geben will, diese Zeichnung würklich zu verrichten.

[*Fig. 125.*] §. 28. Es fließet aber auch aus diesen Sätzen die Anweisung den Mittelpunct eines Cirkels zu finden, welchen man etwa verlohren hat. Denn es muß ein jeder Cirkel einen Mittelpunct haben, und zwar nur einen einzigen, wie aus dem ersteren Begrif dieser Figur leicht zu sehen ist. Es sey der Cirkel, dessen Mittelpunct zu finden ist, derjenige, welchen die 125 Figur vorstellet. Man ziehe eine Sehne desselben wie man will AB, und setze an die Mitte derselben die gerade Linie DE auf die Sehne perpendicular. Diese Linie wird gewiß durch den Mittelpunct gehen, V, 23. Und hat man DE beyderseits bis an den Umkreiß verlängert,

so

so ist diese Linie ein Durchmesser des Cirkels, und wird folgends von dem Mittelpunct des Cirkels in zwey gleiche Theile getheilet. Man darf also nur die gefundene DE in C in zwey gleiche Theile theilen, so ist dieser Theilungspunct C auch der Mittelpunct des Cirkels.

[*Fig.* 127.] §. 29. Fast auf eben die Art findet man den Mittelpunct eines Cirkels, welcher durch drey gegebene Puncte gehen soll. Es müssen aber diese drey Puncte nicht in einer geraden Linie liegen, sonst ist kein Cirkel möglich, dessen Umkreis durch dieselben hindurch gehet, V, 14. Solte er beschrieben werden, so müste er drey Puncte mit einer geraden Linie gemeinschaftlich haben, welches nicht seyn kan. Sind aber drey Puncte gegeben, welche nicht in gerader Linie liegen, als A, B und C, und man soll den Mittelpunct des Cirkels finden, dessen Umkreis durch sie hindurch gehet, so wiederhohle man nur die Arbeit, welche eben gewiesen ist. Man ziehe zween dieser Puncte, welche man will, mit einer geraden Linie zusammen, zum Exempel A, B, und setze auf AB die Perpendicularlinie DE, welche jene in zwey gleiche Theile theilet. Eben so verfahre man auch mit BC, und setze auf deren Mitte die Perpendicularlinie FG, welche, wie leicht einzusehen ist, die vorige schneiden muß. Der Punct, in welchen diese Linien einander schneiden, ist hier H, und dieser ist der gesuchte Mittelpunct; so daß, wenn man das Cirkelinstrument in H einsetzet, und durch A den Umkreis eines Cirkels zu beschreiben anfänget, dieser auch durch B und C gehen muß. Denn weil DE an die Mitte der AB, auf diese Linie perpendicular gesetzet ist, so sind alle Puncte dieser Linie, und folgends auch H, von A und B gleich weit entfernet, IV, 170. Und weil in Ansehung der Linien FG, BC eben das richtig ist, so sind auch alle Puncte dieser FG, und unter diesen wiederum das Punct H, von B und C gleich weit entfernet. Wenn man demnach um den Mittelpunct H durch A einen Cirkel zu beschreiben anfängt, so muß der Umkreis desselben nothwendig auch durch B und C gehen.

§. 30. Hieraus siehet man, daß durch drey Puncte A, B und C, welche in dem Umkreiß eines Cirkels liegen sollen, dessen Mittelpunct bestimmet werde, und nicht anders als in H fallen könne. Denn kan derselbe weder außer der DE, noch außer der FG fallen, daß ist, fällt der Mittelpunct so wohl in die gerade Linie DE als auch in die andere FG, so fällt er allerdings in H. Und daraus folget, daß durch die drey Puncte A, B und C ohnmöglich zween verschiedene Cirkelkreise gehen können, und noch vielweniger drey oder mehrere. Denn wenn man sich zween Cirkel vorstellen wolte, die durch diese Puncte A, B und C gehen, so müste

man doch zugeben, daß ihre Mittelpuncte zusammen in H fallen. Nun gehen ihre Umkreise beyde durch den gemeinschaftlichen Punct A, oder B, oder C. Zween Cirkelkreise aber, die um einen gemeinschaftlichen Mittelpunct dergestalt beschrieben werden, daß ihre Umkreise durch ein Punct A oder B, oder C gehen, fallen ganz zusammen, und sind nicht verschieden, V, 1.

[*Fig.* 128.] §. 31. Oder man setze zu noch größerer Deutlichkeit, daß die zwo krummen Linien die in der 128 Figur durch die Puncte A, B und C gehen, Cirkel sind. Man ziehe zween dieser Puncte A und B zusammen, und setze auf die Mitte der geraden Linie AB eine Perpendicularlinie DE. Da AB eine Sehne der beyden krummen Linien ist, welche wir betrachten und indessen vor Cirkelkreise annehmen: so gehet die Perpendicularlinie DE, welche auf der Mitte der AB stehet, durch den Mittelpunct so wohl des einen als des andern dieser Cirkelkreise, V, 23. Man kan aber eben diese Arbeit mit eben den Schlüssen auch mit andern zween Puncten vornehmen, nemlich mit B und C. Man kan die BC ziehen, welche eine Sehne so wohl in dem einen als in dem andern dieser Cirkel seyn wird, und auf die Mitte dieser Sehne eine Perpendicularlinie FG setzen, welche wieder durch den Mittelpunct beyder Cirkel gehen muß. Demnach fallen die Mittelpuncte dieser Cirkel in H zusammen, und es sind zween verschiedene Cirkel um einerley Mittelpunct H durch den Punct A oder B beschrieben, das ist, es ist etwas geschehen, welches nicht seyn kan.

§. 32. Da also zween verschiedene Cirkelkreise nicht drey Puncte gemeinschaftlich haben, oder, da sie einander nicht in drey Puncten schneiden können: so können sie einander noch vielweniger in vieren oder mehrern Puncten schneiden. Dieses ergänzet wieder einen von unsern ersten Sätzen. Wir haben gesehen, daß zween Cirkelkreise einander in mehr als einem Puncte schneiden können, IV, 100. Jetzt ist gezeiget worden, daß dieser Durchschnitte nie mehrere sind als zween.

[*Fig.* 129.] §. 33. Ziehet man zwo gleiche Sehnen in einem oder in gleichen Cirkeln, so werden auch ihre Bogen gleich, wie auch ihre Entfernungen von dem Mittelpuncte. Die bloße natürliche Einsicht lässet uns daran nicht zweifeln, so bald wir bedenken, daß der Cirkelkreis um und um einerley Krümme, einerley Rundung hat, V, 2. Wenn man demnach auf einer Seite desselben eben dasjenige thut, was man auf der andern vornimt, so können ohnmöglich die übrigen Dinge, welche von diesen Zusammensetzungen abhängen, ungleich werden. Wir haben in dem Cirkel der um den Mittelpunct C beschrieben ist, die beyden Sehnen AB,

und

und DE von gleicher Größe gesetzet. Durch dieselbe sind die beyden Bogen AB und DE abgeschnitten worden. Welcher von diesen beyden soll wohl größer seyn, und was hat man vor Ursache zu gedenken, daß AB größer sey als DE, welches einen nicht auch dahin führen könte, daß man DE größer schätzte als AB? Eben dieses muß man auch von den Entfernungen dieser Sehnen von dem Mittelpunct C sagen.

§. 34. Die Verknüpfung aber dieser Wahrheit mit dem vorhergehenden kan dergestalt gezeiget werden. Man ziehe aus dem Mittelpunct C gerade Linien auf die erst gezeichnete Sehnen perpendicular, und bezeichne sie mit CF, CG. Diese werden die Sehnen in zwey gleiche Theile theilen, V, 19. und wenn man sie fortziehet, bis in H und I, auch ihre Bogen. Da nun aber gesetzet wird, es sey AB=DE, so müssen auch die Helften dieser Linien AF und DG einander gleich seyn. Man ziehe ferner die zween Halbmesser CA und CD, welche einander nothwendig gleich seyn werden, so haben die zwey rechtwinklichte Dreyecke ACF und DCG zwo gleiche Seiten, nemlich AC=CD, und AF=DG. Es sind demnach so wohl ihre übrige Seiten gleich, als auch ihre Winkel, welche zwischen gleichen Seiten liegen, IV, 260. Die dritten Seiten dieser Dreyecke, deren Gleichheit wir eben geschlossen haben, sind CF und CG, und diese sind die Entfernungen deren Sehnen AB, DE von dem Mittelpuncte, daß also erwiesen ist, daß gleiche Sehnen von dem Mittelpunct der Cirkel, in welchen sie gezogen sind, gleiche Entfernungen haben. Unter den Winkeln aber der Dreyecke ACF und DCG, welche zwischen gleichen Seiten liegen, und demnach ebenfals gleich sind, sind diejenige, deren Spitzen an C reichen. Also sind diese Winkel ACF und DCG einander gleich. Demnach haben die Ausschnitte ACH und DCI gleiche Winkel. Also sind auch ihre Bogen AH und DI gleich, und weil AH die Helfte ist von AHB, und DI die Helfte von DIE, so müssen auch die ganzen Bogen AHB und DIE gleich seyn. Es ist also richtig daß die Gleichheit der Bogen AHB und DIE so wohl als die Gleichheit der Entfernungen der Sehnen von dem Mittelpunct, aus der Gleichheit der Sehnen in einem oder gleichen Cirkeln fließe.

§. 35. Aber es fließet auch hinwiederum die Gleichheit der Sehnen, und ihrer Entfernungen von dem Mittelpuncte aus der Gleichheit der Bogen, welche von den Sehnen abgeschnitten werden, oder wenn man die Bogen AHB und DIE gleich annimt, so folget daraus, daß so wohl AB und DE, als auch die Perpendicularlinien, welche aus dem Mittelpunct auf die Sehnen können gezogen werden, CF und CG, einander gleich sind.

Denn wenn man diese Perpendicularlinien wiederum bis in H und I fortziehet, so schneiden sie die Bogen in gleiche Theile. Da nun also DIE dem AHB gleich gesetzet wird, so müssen auch DI und AH einander gleich seyn. Hat man nun wieder die Halbmesser CA und CD gezogen, so sind auch die Winkel der beyden Ausschnitte ACH und DCI einander gleich, und die zwey Dreyecke ACF und DCG haben eine gleiche Seite und zween gleiche Winkel: nemlich AC=CD, und ACF=DCG, ferner aber F=G, denn es wird gesetzet, daß diese Winkel gerade sird. Es müssen demnach IV, 130. auch die übrigen Seiten derselben Dreyecke gleich seyn, CF nemlich =CG, und AF=DG. Das erste, daß CF=CG zeiget, daß die Entfernungen der Sehnen AB und DE von dem Mittelpunct gleich sind; aus dem zweyten aber AF=DG folget die Gleichheit der Sehnen AB und DE gar leicht. Denn weil CF, CG auf dieselbe perpendicular sind, so sind AF und DG die Helften der Sehnen, V, 19. Diese Helften sind, wie erwiesen worden ist, gleich, also müssen auch die ganzen Sehnen gleich seyn.

§. 36. Endlich fließet auch aus der Gleichheit der Entfernungen CG und CF die Gleichheit so wohl der Sehnen als der Bogen; oder wenn CG=CF, so ist auch AB=DE, und AHB=DIE. Wir haben uns nicht lange hierbey aufzuhalten. Weil FC=CG, und AC=CD, so haben die rechtwinklichte Dreyecke AFC und DGC zwo gleiche Seiten. Demnach sind auch die übrigen Seiten AF und DG einander gleich, IV, 260. welches die Helften sind der Sehnen AB und DE, also sind diese Sehnen einander gleich. Aus dieser Gleichheit der Sehnen aber folget die Gleichheit ihrer Bogen, wie V, 33. gezeiget worden ist.

§. 37. Eine jede Sehne, welche nicht durch den Mittelpunct des Cirkels gehet, und welche folgends keinen Durchmesser desselben abgiebet, ist kleiner als der Durchmesser. Haben aber zwo Sehnen verschiedene Entfernungen von dem Mittelpuncte, so ist allezeit diejenige Sehne kleiner, welche von dem Mittelpuncte weiter entfernet ist. Das erste siehet man aus der bereits betrachteten 129 Figur ein. Denn das Dreyeck AFC ist bey F geradewinklicht, und folgends die Seite AC größer als AF, IV, 245. Die erste ist der Halbmesser, und die zwote die Helfte der Sehnen AB. Also ist auch der ganze Durchmesser größer als die ganze Sehne.

[*Fig.* 130.] §. 38. Um aber das zweyte einzusehen, so ziehe man erstlich in einem Cirkel einen Durchmesser AB, und setze auf die eine Helfte desselben verschiedene Perpendicularlinien DE, FG, welche in H und I verlängert, Sehnen des Cirkels abgeben, von welchen sie die Helften sind: so siehet man auch bloß daraus, daß die Helfte der Sehne DE, welche dem

Mit-

Mittelpunct C näher lieget, gröſser sey als FG, die von diesem Puncte weiter entfernet ist; weil, wenn der Quadrant KA beschrieben werden soll, sich der Halbmesser KC aus seiner gegenwärtigen Lage immer mehr und mehr gegen CA neigen muß, wodurch die Entfernung des äußersten Puncts desselben K von AC immer kleiner und kleiner wird, indem es nach und nach in D, F, und so weiter gegen A kömt. Die Perpendicularlinien DE und FG sind die Entfernungen dieses äußersten Puncts des Halbmessers in seinen verschiedenen Lagen. Und es ist demnach FG nothwendig kleiner als DE, und folgends auch FI kleiner als DH. Ja es verschwindet endlich die Sehne ganz, indem sie sich von dem Mittelpunct immer mehr und mehr bis an A entfernet, weil der Halbmesser FC endlich gar auf AC zu liegen komt. Es wachsen also die Sehnen eines Cirkels von nichts bis zu der Gröſse des Durchmessers, welcher die gröste Sehne ist, die ein Cirkel haben kan, und die halbe Sehnen wachsen von nichts bis zu der Gröſse des Radius.

§. 39. Wil man aber die Sehnen mit ihren Bogen vergleichen, so muß man sagen, daß, indem der Cirkelbogen von dem Punct A an nach und nach zu beyden Seiten auf einerley Art wächset, so nemlich, daß die gleichen Stücke AF und AI zugleich erzeuget werden, auch die Sehne des Bogens FI mit wachse, und gröſser und gröſser werde, bis endlich der Bogen zur Gröſse des halben Umkreiſses KAL angewachsen ist, da die Sehne so groß geworden, als sie nur hat werden können, und nunmehro dem Durchmesser an Gröſse gleich kömt; und daß, indem der Bogen noch gröſser wird als der halbe Cirkel KAL, und nach und nach die Gröſse dAh, fAi und so weiter, erreichet, so daß die Sehne desselben auf der andern Seite des Mittelpuncts nach B zu fallen muß; diese Sehne auch wieder beständig abnehme, und zwar in einem fort, bis sie endlich fast ganz verschwindet, indem, daß die beyden äußersten Puncte des Bogens bey B einander erreichen, und den Cirkel schlieſsen.

§. 40. Eben dises kan man auch von den Helften der Sehnen, oder von den geraden Linien DE, FG mit einer geringen Veränderung sagen. Indem der Bogen von A auf einer Seite des Durchmessers AB, zu wachsen anfängt, wird die Perpendicularlinie FG immer gröſser und gröſser, bis sie endlich dem Radius KC gleich wird, wenn der Bogen die Gröſse des vierten Theils des Umkreises AK erreichet. Wird aber der Bogen gröſser als der vierte Theil des Umkreises, so nehmen auch diese Helften der Sehnen wieder eben so ab, wie sie auf der andern Seite zugenommen haben,

bis

bis sie endlich fast ganz verschwinden, indem, daß sich der Bogen an den Durchmesser bey B anschließet, und den halben Umkreis vollendet.

[*Fig. 131.*] §. 41. Allein es ist nicht nur von solchen Sehnen die Rede, die auf eben den Durchmesser perpendicular sind, sondern es ist von allen Sehnen überhaupt richtig, daß sie immer desto kleiner sind, je weiter sie von dem Mittelpunct des Cirkels abstehen; sie mögen, wie diejenigen, die wir betrachtet haben, einander parallel liegen, oder nicht. Man begreifet dieses leicht, wenn man die gleichförmige Rundung des Cirkels, und daß dessen Umkreis um und um auf einerley Art gekrümmet ist, erweget. Noch deutlicher aber kan man die Sache folgendergestalt einsehen. Es seyn AB und CD zwo Sehnen eines Cirkels, und die erstere AB sey von dem Mittelpunct E weniger entfernet als die zweyte CD, das ist, die Linie EF, die aus dem Mittelpuncte auf die erstere Sehne perpendicular fällt, sey kleiner als die Linie EG, die aus eben dem Punct auf die andere Sehne CD perpendicular fället. So muß nach unserm Satz AB größer seyn als CD, und dieses ist zu erweisen. Man verlängere zu dem Ende EF in H, bis EH der EG gleich geworden, und ziehe durch H die Sehne IK mit der vorigen AB parallel. Weil nun die Sehnen IK und CD von dem Mittelpunct E gleich weit entfernet sind, die eine nemlich um EH, und die andere um EG=EH, so sind diese Sehnen IK, CD einander gleich, V, 36. Nun ist aber IK kleiner als AB, V, 38. also muß auch CD kleiner seyn als AB.

§. 42. Es kan aber dieser Beweis auch kürzer und allgemeiner abgefasset werden, ohne dasjenige vorauszusetzen, so von denen Sehnen, die einander parallel liegen, gesagt worden ist. Nachdem alles gemacht worden ist, wie vorher, so ziehe man auch die Halbmesser AE, CE. Man erhält dadurch die zwey rechtwinklichte Dreyecke AFE, CEG, deren gröste Seiten AE, CE einander gleich sind. Es wird aber gesetzt, daß eine von den übrigen Seiten des Dreyecks AEF, nemlich die FE, kleiner sey, als die Seite EG des Dreyecks EGC. Nun haben wir IV, 262. gesehen, daß dieses nicht seyn könne, ohne daß im Gegentheil die Seite AF größer werde als die Seite CG. Es ist also AF größer als CG, und folgends AB größer als CD.

§. 43. Man siehet aus diesem Beweisen zugleich, daß wenn AB größer genommen wird als CD, auch EG größer seyn müsse als EF. Denn wäre FE=EG, so wäre auch CD=AB, V, 37. Wäre aber EG kleiner als EF, so wäre im Gegentheil CD größer als AB, V, 42. welches beydes demjenigen widerspricht so gesetzt wird, daß nemlich AB größer sey als CD.

Gerade Linien, welche einen Cirkel berühren.

[*Fig. 132.*] §. 44. Wenn man selbst auf das äußerste Punct des Durchmessers AB oder des Halbmessers AC eines Cirkels eine Perpendicularlinie AD setzet, und dieselbe auf der andern Seite nach Belieben bis in E verlängert, so fält diese gerade Linie DAE zwar mit dem Umkreis des Cirkels nothwendig in dem Punct A zusammen, und berühret denselben eben deswegen, weil sie durch das äußerste Punct des Durchmessers A gezogen ist, welches nothwendig in dem Umkreis lieget. Sonst aber kan nichts von der dergestalt gezogenen geraden Linie DAE innerhalb den Cirkel hineinfallen, oder die gerade Linie kan den Cirkel nicht schneiden. Dieses können wir auf verschiedene Arten einsehen. Außer A reichet der Umkreis nicht, er kan also von dieser Seite kein Stück der Linie DAE umschlingen, oder dieselbe einschließen. Solte demnach ein Stück dieser Linie innerhalb des Cirkels beschlossen werden, so müste dieses über oder unter dem Puncte A geschehen. Wenn aber dieses seyn solte, müste sich der Umkreis des Cirkels über oder unter dem Puncte A nach der geraden Linie DAE auswärts biegen, damit nemlich ein Theil desselben auf die andere Seite dieser Linie zu liegen käme, welches demjenigen widerspricht, so wir von der einförmigen Krümmung des Cirkelkreises eingesehen haben.

§. 45. Man kan aber auch auf eine andere Art noch viel bündiger schließen, daß alle Puncte der geraden Linie DAE, welche man angeben kan, außer dem einzigen Puncte A, außerhalb den Cirkel fallen. Man ziehe die Linie FC von einem nach Belieben angenommenen Puncte dieser geraden Linie nach dem Mittelpunct C. Weil nun das Dreyeck FAC rechtwinklicht ist, (denn man hat DA auf AC perpendicular gesetzet); so ist die Seite desselben FC nothwendig größer als der Radius AC. Ist aber FC, die Entfernung des Punctes F unserer geraden Linie DE von dem Mittelpunct C, größer als der Radius des Cirkels, so lieget dasselbe Punct F nothwendig außer dessen Umkreis, und eben so schließet man von einem jeden andern Puncte der geraden Linie DE.

§. 46. Eine dergleichen gerade Linie DAE, welche zwar einen Cirkel berühret, und ein Punct A mit dem Umkreis desselben gemeinschaftlich hat, von welcher aber nichts innerhalb den Cirkel fällt, oder, die im übrigen ganz und gar außer dem Cirkel lieget, und von dessen Umkreis abgesondert ist, heißet eine **Berührungslinie** des Cirkels, oder eine gerade **Linie, welche den Cirkel** oder dessen **Umkreis berühret.**

§. 47. Man ziehet, wie wir gar leicht aus dem gesagten schließen, ei-

ne gerade Linie, welche einen Cirkel in einem gegebenen Punct A berühret, wenn man nur erstlich von A eine gerade Linie AC ziehet, welche durch den Mittelpunct gehet oder gehen würde, wenn man sie verlängerte, und sodann auf dieselbe und an das Punct A eine Perpendicularlinie AB setzet. Diese AB ist die verlangete Berührungslinie.

§. 48. Hat man aber eine gerade Linie DAE, welche den Cirkel in A berühret, wie man wil, gezogen, und man läst aus dem Mittelpunct des Cirkels C auf dieselbe eine Perpendicularlinie CA fallen, so fället diese gewiß auf den Berührungspunct A. Denn wenn man annehmen wolte, daß die Perpendicularlinie nicht auf den Berührungspunct A, sondern auf ein anderes Punct F falle, so hätte eben deswegen, weil CF auf DE perpendicular stehet, das Dreyeck FCA einen geraden Winkel bey F, und wäre demnach die Seite AC dem geraden Winkel bey E entgegen gesetzet. Es müste also AC größer seyn als FC; und weil F ein Punct der Berührungslinie DE ist, und derowegen nicht innerhalb den Cirkel fallen kan, so müste A außer dessen Umkreis fallen. Oder die Sache etwas anders auszudrücken: CF ist gewiß nicht kleiner als der Radius des Cirkels, weil F nicht innerhalb des Cirkels fällt, denn dieses ist von keinem Puncte einer Berührungslinie zu sagen. Aus dem aber, so angenommen wird, folget, daß AC größer sey als FC: also ist AC gewiß größer als der Radius des Cirkels, und daraus kan nichts anders geschlossen werden, als daß A außer dem Umkreis liege. Ist aber dieses, so ist A ohnmöglich der Berührungspunct. Also widerspricht man sich selbst, wenn man setzet, daß A der Berührungspunct sey, und doch die gerade Linie, welche man aus C auf DE perpendicular ziehet, nicht in A falle.

§. 49. Die gerade Linie so aus dem Mittelpunct C auf die Berührungslinie DE perpendicular fället, ist nur eine einzige. Denn da durch jedes Punct auf jede gerade Linie nur eine einzige Perpendicularlinie kan gezogen werden, warum solte es hier anders seyn? Diese Perpendicularlinie aber gehet, wie eben gezeiget worden ist, durch den Berührungspunct A, und lieget also zwischen den Puncten C und A, zwischen welchen wieder nicht mehr als eine gerade Linie gezogen werden kan. Demnach ist eben die gerade Linie die zwischen C und A lieget, auf DE perpendicular: oder wenn man den Mittelpunct C vermittelst einer geraden Linie AC mit dem Berührungspuncte A verknüpfet, so ist diese Linie AC auf die Berührungslinie DE perpendicular. Die Sache ist leicht: solte indessen doch noch einiger Zweifel haften, so versuche man durch den Mittelpunct C auf DE eine Perpendicularlinie zu ziehen. Nach dem, so V, 47. gezeiget ist, muß sie durch

den

den Berührungspunct A aehen, und kan also von der Linie CA nicht verschieden seyn. Und also haben wir uns die vornehmste Eigenschaften der Sehnen und der Berührungslinien bekant gemacht. Wir können nunmehro beyde verknüpfen, und uns dasjenige vorstellen, so aus dieser Verknüpfung folget.

[*Fig.* 133.] §. 50. Es sey durch ein Punct A eines Cirkelkreises eine Linie BC gezogen, die den Cirkel berühret, und dieser seyn so viele Sehnen DE, FG beygesetzet als man will, welche alle mit der berührenden Linie BC, und folgends auch mit einander parallel laufen, so werden alle Bogen, die zwischen zwoen dieser Parallellinien enthalten sind, das ist, AD und AE, wie auch DF und EG, einander gleich seyn. Denn man ziehe aus dem Mittelpunct H auf die Berührungslinie BC eine perpendicularlinie HA, welche man, wenn es nöthig ist, auf der andern Seite in I verlängern kan. Diese wird durch den Punct A gehen, in welchem die BC den Cirkel berühret, V, 48. und weil die Sehnen DE, FG mit der BC parallel laufen, so wird eben diese HA auf alle diese Sehnen perpendicular fallen, IV, 192. Nun theilet eine Linie, welche aus dem Mittelpunct eines Cirkels auf eine Sehne desselben perpendicular gezogen wird, auch den Bogen derselben in zwey gleiche Theile, V, 19. Dieses muß also unsere AHI ebenfals thun, und die Bogen AD und AE, aber auch FDA und GEA, einander gleich machen. Das erstere AD = AE ist eines von demjenigen so angegeben ist; aus beyden zugleich AD = AE, und FDA = GEA aber folget, daß gleiches übrig bleiben müsse, wenn man von dem Bogen FDA und GEA die Bogen AD und AE wegnimmet. Nimmet man aber AD von ADF weg, so bleibet DF übrig, und AE von AEG abgezogen, lässet EG. Diese Bogen DF und EG sind demnach einander ebenfals gleich.

§. 51. Man siehet gar leicht ein, daß sich dieser Satz umkehren lasse, und daß, wenn man annimmet, daß die Bogen DF und EG gleich seyn, daraus folge, daß die Sehnen DE und FG einander parallel liegen werden. Denn es lässet sich in der Lage solcher Sehnen nichts verändern, ohne daß man zugleich die Größe der Bogen ändert, welche zwischen ihnen enthalten sind, das ist, wenn man zwo Sehnen DE und FG einander parallel gezogen, und dadurch die Bogen DF und EG gleich gemacht hat, und man will hernach eine dieser Parallellinien der andern auf dieser oder auf jener Seite nähern, und sie dadurch außer den parallelen Stand setzen, so wird eben dadurch auch der Bogen auf der einen Seite kleiner als auf der andern: verändert man also die Bogen nicht, so müssen auch die Sehnen nach wie vor parallel bleiben.

[*Fig.* 134.] §. 52. Solte dieses die Sache noch nicht vollkommen verständlich machen, welche zwar an sich keine Schwierigkeit hat, so kan man auf eine der Sehnen FG aus dem Mittelpunct eine Perpendicularlinie ziehen, und dieselbe bis an den Umkreis in A verlängern. Diese Perpendicularlinie ist AH. Es wird dadurch der Bogen AF dem Bogen AG nothwendig gleich. Da nun auch gesetzet wird, daß DF dem EG gleich sey, so folget, daß auch die Bogen AD und AE gleich seyn, welche nach Abzug der letztern von der erstern übrig bleiben. Sind aber die Bogen AD und AE gleich, und fället also die Linie HA aus dem Mittelpunct auf die Sehne DE dergestalt, daß sie ihren Bogen DAE in zwey gleiche Theile theilet, so ist diese Linie AH auch auf die DE perpendicular, wie wir V, 25. gesehen haben. Da nun eben diese AH auch auf die FG perpendicular gezogen worden, so müssen die Linien FG und DE nothwendig einander parallel seyn.

Von den Winkeln gewisser Sehnen und Berührungslinien.

§. 53. Alle diese Sätze, welche wir bisher von dem Cirkel betrachtet haben, sind gar leicht, und machen dasjenige mit aus, so man sonst die natürliche Geometrie nennet, bey welcher vor der Kunst nichts übrig ist, als daß sie dieselbe etwas in Ordnung bringe. Nun folgen etwas schwerere Sätze von den Winkeln, welche die Sehnen und Berührungslinien bey den Umkreisen der Cirkel machen.

[*Fig.* 135. 136. 137. 138.] §. 54. Wenn man in verschiedenen Cirkeln, die gleiche Halbmesser haben, oder die einander gleich sind, ein Punct A in dem Umkreise nach Belieben annimmet, und durch dasselbe zwo gerade Linien AB und AC ziehet, welche bey A in allen diesen Cirkeln einerley Winkel BAC machen, es mögen nun diese Linien AB und AC die Umkreise der Cirkel berühren oder schneiden wie sie wollen, so sind alle Bogen DE, welche zwischen den Schenkeln dieser Winkel enthalten sind, einander gleich, das ist, es ist DE=DE, in welchen von den gezeichneten Cirkeln man auch die mit DE bezeichnete Bogen nehmen will. In der 135 und 136 Figur schneiden die geraden Linien AB und AC die Umkreise auf verschiedene Art, in der 137 schneidet AB den Umkreis und AC berühret ihn in E, welches Punct demnach mit A in eines zusammen fället, und in der 138 Figur schneidet AB wieder den Umkreis wie auch AC, aber das Punct E, in welchem die letzte Linie AC den Umkreis schneidet, fället hier

auf die andere Seite des Punctes A in Ansehung des B. Es ist bey dem allen, unter den gesetzeten Bedingungen, der Bogen DE überall von einerley Größe, und so groß als der Bogen DE in der 135 Zeichnung.

§. 55. Dieses ist folgendergestalt einzusehen. Man lege den ersten Cirkel oder die 135 Figur samt denen in demselben gezogenen geraden Linien, mit seinem Mittelpuncte auf den Mittelpunct des zweyten und des dritten und vierten Cirkels, und drehe ihn um denselben so lange bis BA des ersten Cirkels mit der BA des zweyten, dritten und vierten parallel zu liegen kommt, oder bis BA in ba fället, welche ba der BA parallel lieget. Gesetzet, es falle, nachdem diese Lage der BA erhalten worden ist, die zweite Linie AC des ersten Cirkels nunmehro in ac, wodurch der Bogen DE des ersten Cirkels dem Bogen de des zweyten, dritten und vierten, und der Winkel bac dem Winkel BAC gleich wird; so folgt daraus, daß die Linien BA und ba einander parallel liegen, und beide von der ac geschnitten werden; daß überall der Winkel BFc dem Winkel bac gleich sey, IV, 190. Denn bac lieget inwendig zwischen den Parallellinien AB und ab, und BFc außer denselben, und beide stehen nach einerley Seite. Nun aber wird gesetzet, daß der Winkel BAC dem Winkel bac gleich sey, und hieraus folget, daß die beiden Winkel, BFc und BAC beide einem dritten, nemlich dem Winkel bac, und demnach einander selbst, gleich seyn, oder daß BFc=BAC: aus welcher Gleichheit ferner folget, daß auch die geraden Linien ac und AC einander parallel liegen, IV, 79. Denn BAC lieget zwischen den geraden Linien AC und ac, welche beide von der AB geschnitten werden, und BFc lieget nach eben der Seite außerhalb denselben.

§. 56. Wenn also AB und ab einander parallel geleget werden, so werden eben dadurch die Seiten AC und ac einander ebenfalls parallel. Und hieraus folget V, 59. die Gleichheit der Bogen Aa und Dd, wie auch Aa und Ee, welche letztere in der 36 Figur zwischen zwo parallelen Sehnen, oder in der 137, zwischen der Sehne ac und der Berührungslinie AC so jener parallel lieget, enthalten sind. Daraus aber, daß Dd=Aa, und Aa=Ee, schließet man in den Fällen, welche diese Figuren vorstellen, es sey auch Dd=Ee. In der 138 Figur aber ist aE=Ae, und AE=AE, folgends wenn man gleiches zu gleichem setzet, aE+AE, das ist, Aa=Ae+AE, das ist, Ee. Woraus mit dem vorigen Aa=Dd, eben das, nemlich Dd=Ee, folget.

§. 57. Nunmehro ist es gar leicht ferner einzusehen, daß auch die Bogen DE und de einander gleich sind, welches V, 54. gesetzt, und zu beweisen ist. Denn es entstehet der Bogen de aus dem Bogen DE, in-

dem man auf der einen Seite von DE den Bogen Ee wegnimt, und auf der andern Seite den Bogen Dd anstücket, welches man gar leicht siehet, wenn man die Figuren betrachtet. Weil aber das weggenommene Ee dem zugesetzten Dd gleich ist, so wird dadurch in der Größe des Ganzen nichts geändert. Es ist demnach überall der Bogen DE dem Bogen de gleich, welcher de in allen unsern Cirkeln von einerley Größe genommen worden ist, und folgends sind auch alle Bogen DE einander gleich, und der vorgetragene Satz ist richtig.

§. 58. Man kan auch diesen Satz umkehren, und es folget hinwiederum aus der Gleichheit der Bogen DE in verschiedenen gleichen Cirkeln die Gleichheit der Winkel BAC, die nach einer Seite stehen, deren Spitzen A in den Umkreiß des Cirkels fallen, und deren Schenkel AB und AC die Bogen DE abschneiden. Denn gesetzt, es seyn die Winkel BAC in verschiedenen gleichen Cirkeln einander gleich, und folgends auch, wie wir gesehen, die Bogen DE, und man wil einen der Winkel BAC kleiner machen, so verkleinert man auch den Bogen DE auf welchen er stehet, und ohne diese Verkleinerung des Bogens gehet die Verkleinerung des Winkels ohnmöglich an. Eben so muß man sagen, daß, so bald als der Winkel BAC in einem oder dem andern dieser Cirkeln vergrößert wird, der Bogen DE nothwendig zugleich mit vergrößert werde. Wenn man also zween unserer gezeichneten gleichen Cirkel vor sich nimmet, und setzet, daß in einem derselben der Winkel an dem Umkreis bey BAC größer sey, als in dem andern, so muß man auch nothwendig setzen, daß der Bogen DE auf welchem der größere Winkel stehet, größer sey als der andere Bogen DE, auf welchem der kleinere stehet. Nach dieser kleinen Vorbereitung schließen wir leicht, daß wenn die Bogen zweer Cirkel DE gleich sind, die Winkel an BAC nicht ungleich seyn können. Denn man setze, daß zween Bogen DE gleich sind, und die Winkel BAC ungleich: so ist nothwendig einer dieser Winkel größer als der andere, sonst wären sie nicht ungleich. Der größere Winkel hat allezeit einen größeren Bogen DE zwischen seinen Schenkeln: also sind die Bogen DE in den beiden Cirkeln nicht gleich, welches demjenigen widerspricht, so angenommen worden ist. Sind aber bey der Gleichheit der Bogen DE die Winkel DAC nicht ungleich, so ist klar genug, daß sie gleich sind.

[*Fig.* 139.] §. 59. Hieraus fließet so gleich, daß wenn man in einem Cirkel einen Bogen annimt DE, und setzet auf denselben einen Winkel, dessen Spitze in den Umkreis des Cirkels in A fället, und ferner noch andere

re Winkel, deren Spitzen in a, α fallen, diese Winkel DAE, DaE, Dα E alle, so viel man deren auch machen wil, einander gleich seyn werden.

§. 60. Ja es ist eben dieses richtig, wenn man durch DE eine Sehne ziehet, und an das Ende derselben die gerade Linie EC setzet, welche den Cirkel in E berühret. Der Winkel DEC ist auch dem Winkel DAE gleich, welcher auf dem Bogen DE stehet, und mit seiner Spitze A auf der andern Seite in den Umkreis des Cirkels fällt. Denn der allgemeine Satz lässet sich auch hier anwenden. Es stehet auch der Winkel DEC, dessen Spitze in E in den Umkreis des Cirkels fällt, auf dem Bogen DE, eben wie DAE, und die Vergleichung dieser Figur mit den vorigen machet alles deutlich. Denn wir haben unsere Sätze so allgemein verfasset und erwiesen, daß sie auch diesen Fall, in welchem eine der geraden Linien, die den Winkel an dem Umkreise einschließen, eine Berührungslinie ist, mit enthalten.

§. 61. Man kan aber diesen letzten Satz auch also ausdrücken: wenn man eine gerade Linie EC ziehet, welche einen Cirkel in E berühret, ziehet so dann die Sehne DE durch den Berührungspunct, und setzet auf dieselbe ein Dreyeck DAE, dessen Spitze in den Umkreis des Cirkels fällt; so ist der Winkel A, welcher der Sehne DE entgegen stehet, dem Winkel DEC gleich, welchen eben die Sehne DE mit der Berührungslinie EC machet.

[*Fig.* 140.] §. 62, Schneidet aber die Linie CA, welche mit der Sehne AD den Winkel DAC machet, den Umkreis des Cirkels in A und E, so ist DAC dem Winkel DaE gleich, welcher wieder auf dem Bogen DAE stehet, und dessen Spitze a in den Umkreis fället V, 56. Man siehet hieraus, daß dieser Winkel DaE mit dem ihm entgegen gesetzten Winkel DAE zween rechte Winkel ausmachen müsse. Denn die beyden Winkel DAC, und DAE sind ohnstreitig zween rechten Winkeln gleich, weil sie neben einander auf der geraden Linie CAE stehen. Also giebet auch DaE= DAC mit eben dem DAE eine Summe, welche so groß ist, als zween rechte Winkel.

§. 63. Man kan diesen Satz auch so ausdrücken: In einem jeden Vierecke DaEA, welches in einem Cirkel dergestalt beschrieben ist, daß seine Ecken D, a, E, A in den Umkreis des Cirkels fallen, sind die zween einander entgegen gesetzte Winkel DaE, und DAE zusammen genommen zween rechten Winkeln gleich. Denn man kan überall eine Seite des Vierecks EA in C verlängern, und so dann eben den Beweis geben, welchen wir jetzo geführet haben.

[*Fig.* 141.] §. 64. Was sonst von dergleichen Winkeln, die an

einen Cirkel beschrieben werden, noch zu sagen ist, fließet zwar aus einem jeden der erwiesenen Sätze: doch führet uns der Winkel DEC, oder DEc welchen die Berührungslinie cEC mit der Sehne DE machet, insonderheit leicht zu dem Zweck, welchen wir vor uns haben. Wir haben V, 60. gesehen, daß der Winkel DEC dem Winkel gleich sey, welcher in den Abschnitt DAE dergestalt kan beschrieben werden, daß seine Spitze in den Bogen DAE fällt, und er mit der DE ein Dreyeck ausmachet: Und aus eben dem Beweise folgt, daß auch der Winkel DEc einem dergleichen Winkel in DaE gleich seyn müsse. Man ziehe aus dem Mittelpunct des Cirkels B die zween Halbmesser BD und BE, so wird das Dreyeck BDE, wie bekant ist, gleichschenklicht, und die Winkel BDE, BED werden einander gleich. Der Winkel BEC aber, welchen der Halbmesser BE mit der Berührungslinie EC einschließet, ist ein rechter Winkel, V, 48. Nun ist dieser rechte Winkel BEC aus den beyden BED und DEC zusammen gesetzet. Also ist BED+DEC=R, welches R hier wieder, wie sonst öfters, einen rechten Winkel bedeutet, und demnach die erst gesetzete Summe doppelt genommen, oder 2BED+2DEC=2R. In einem Dreyeck aber machen alle Winkel ebenfals zween gerade Winkel aus, IV, 219. Folgends ist auch BED+BDE+DBE=2R, oder weil BED so groß ist als BDE, und folgends BED+BDE so viel als 2BED, so kan man auch setzen 2BED+DBE =2R. Vergleichet man dieses mit dem vorigen 2BED+2DEC=2R, so siehet man, daß diese Summen, welche beiderseits zween rechten Winkeln gleich seyn, auch einander selbst gleich seyn müssen, nemlich 2BED+DBE =2BED+2DEC, und wenn man von diesen beyden Summen das gemeinschaftliche 2BED wegnimmet, so bleibet endlich DBE=2DEC.

§. 65. Und dieses ist der Satz, welchen wir heraus bringen wolten. Der Winkel DBE des Ausschnittes, welchen die zween Halbmesser DB, BE mit dem Bogen DaE machen, ist zwey mal so groß als der Winkel DEC, und folgends auch zweymal so groß als der Winkel in dem Abschnitte DAE, welcher auf eben dem Bogen DaE stehet, und der Winkel in dem Abschnitt DAE, welcher auf dem Bogen DAE stehet, ist die Helfte des Winkels DBE, welcher auf eben dem Bogen DaE stehet, und dessen Spitze an den Mittelpunct B raget. Wenigstens ist dieses richtig erwiesen, so lange der Winkel an dem Mittelpunct DBE kleiner ist, als zween rechte Winkel.

§. 66. Daß aber eben dieses auch richtig sey, wenn man sich vorstellet, daß die zween Halbmesser DB und BE einen Winkel nach außen zu machen, welcher auf dem Bogen DAE stehet, und daß ein dergleichen Win-

Winkel, der nothwendig mehr betragen muß, als zween gerade Winkel, ebenfals doppelt so groß seyn werde, als der Winkel, welcher auf eben dem Bogen DAE stehet, aber mit seiner Spitze den Umkreis des Cirkels, zum Exempel in a, erreichet, kan also gezeigt werden. DBE sol nunmehro diesen Winkel bedeuten, welchen wir beschrieben haben, der nemlich auf dem Bogen DAE stehet. Es ist klar, daß derselbe mit dem eigentlichen Winkel DBE, der den Bogen DaE, ausschneidet, vier gerade Winkel mache, IV, 70. Nun ist erwiesen, daß dieser letztere Winkel DBE doppelt so groß sey als DEC. Also ist der äußere Winkel DBE + 2DEC = 4R. Es ist aber auch DEC + DEc = 2R; und also 2DEC + 2DEc doppelt so viel, demnach = 4R. Folgends DBE + 2DEC = 4R = 2DEC + 2DEc. Nimmet man hier wieder das gemeinschaftliche 2DEC zu beiden Seiten hinweg, so bleibet DBE = 2DEc. Da also der Winkel DEc dem Winkel in dem Abschnitt DaE gleich ist, so ist auch der Winkel DBE, welcher auf dem Bogen DAE stehet, und dessen Spitze in den Mittelpunct B fällt, zweymal so groß als der Winkel, der auf eben dem Bogen DAE stehet, aber mit seiner Spitze in den Umkreis des Cirkels fällt.

§. 67. Oder man benenne den Winkel an dem Umkreise der auf DaE stehet, mit dem Buchstaben A, den Winkel an dem Mittelpuncte, der auf eben dem Bogen stehet, mit B, den Winkel an dem Umkreise, der auf dem Bogen DAE stehet, bezeichne man mit a, und den Winkel an dem Mittelpuncte auf eben dem Bogen, mit b, und schließe etwas kürzer folgender gestalt: B + b = 4R, wie leicht einzusehen ist. Es ist aber V, 62. erwiesen worden, daß A + a = 2R, und hieraus folget 2A + 2a = 4R. Demnach ist B + b = 2A + 2a. Nun ist vermöge desjenigen, so von diesen Winkeln V, 65. bereits ausgemacht ist, B = 2A, also auch b = 2a, weil diese Winkel übrig bleiben, wenn man von den gleichen Summen B + b = 2A + a die gleichen Winkel B = 2A abziehet.

[*Fig.* 142.] §. 68. Wenn die Sehne DE, die mit der Berührungslinie EC den Winkel DEC machet, welcher dem Winkel DAE gleich ist, durch den Mittelpunct des Cirkels B gehet, so wird der Winkel DEC gerade, denn die Berührungslinie machet allezeit mit dem Durchmesser einen geraden Winkel, V, 48. Der Bogen DAE aber sowol als der Bogen DaE werden in diesem Falle halbe Cirkelkreise. Derowegen ist ein jeder Winkel, welcher in einem halben Cirkel DAE beschrieben werden kan, oder ein Winkel, welcher auf einem halben Cirkelkreise DaE dergestalt stehet, daß seine Spitze in den Umkreis eben des Cirkels fällt, von welchem jener die Helfte ist, ein gerader Winkel. Welches man auch daraus sehen kan, weil

ein solcher Winkel die Helfte ist des eingebildeten Winkels DBE, welcher zween geraden Winkeln gleich ist, V, 60.

§. 69. Stehet aber ein solcher Winkel wie DAE auf einem Bogen daE, welcher kleiner ist als ein halber Cirkelkreis, oder stehet er in einem Bogen dAE, welcher größer ist als ein halber Cirkelkreis, so ist er spitzig. Denn die Sehne dE machet in diesem Fall mit der Berührungslinie EC einen Winkel dEC, der kleiner ist als der gerade Winkel DEC, und dieser Winkel dEC ist dem Winkel in dem Bogen dAE gleich, V, 60. Hingegen ist ein Winkel stumpf, wenn er auf einem Bogen ∂aE stehet, welcher größer ist als ein halber Cirkelkreis, oder in einem Bogen ∂AE, welcher kleiner ist als ein halber Cirkelkreis, weil in diesem Fall, wenn ∂AE kleiner ist als ein halber Cirkel, die Sehne ∂E mit der Berührungslinie EC einen stumpfen Winkel machet.

§. 70. Diese Betrachtung der Winkel in den Abschnitten der Cirkel, giebt eine Anweisung an die Hand, eine Linie auf eine andere perpendicular zu setzen, welche in vielen Fällen von Nutzen, ja unentbehrlich ist. Zwo gerade Linien, die einen rechten Winkel einschließen, sind auf einander perpendicular. Ein Winkel in einem halben Cirkel ist allezeit ein rechter Winkel. Dieses sind die Gründe dieser Zusammensetzung.

[*Fig.* 143.] §. 71. Es sey auf AB eine Perpendicularlinie durch das Punct B zu ziehen, ohne die Linie AB zu verlängern: so setze man auf AB ein gleichschenklichtes Dreyeck ABC, dessen Schenkel AC man nach Belieben annehmen kan, verlängere sodann die eine Seite AC, oben bey der Spitze C, so lange, bis CD so groß wird als AC. Ist dieses geschehen, so kan man die verlangete Perpendicularlinie ziehen. Die Puncte D und B liegen in derselben, und man darf nur diese Puncte mit einer geraden Linie BD zusammen ziehen, so ist diese BD die gesuchte Perpendicularlinie. Es ist nicht schwer dieses einzusehen. Setzet man einen Fuß des Cirkelinstruments in C ein, und fänget an einen Bogen durch A zu beschreiben, so gehet derselbe, wenn man in der Beschreibung fortfähret, durch B, weil AC der CB gleich ist, und fähret man weiter fort, so gehet eben der Bogen auch durch D. Es ist nunmehro nicht nöthig den Bogen weiter zu beschreiben. Weil der Mittelpunct desselben in C fället, so siehet man, daß ACD ein Durchmesser desselben, und folgends ABD ein halber Cirkel sey. Es ist demnach der Winkel ABD ein Winkel in einem halben Cirkel, und folgends ein gerader Winkel, V, 68. und DB stehet auf der AB perpendicular.

§. 72. Dieses war ein Fall, in welchem uns die herausgebrachte Eigenschaft eines geraden Winkels bequem und nützlich seyn konte. Denn es ereignet sich öfters, daß man auf eine gerade Linie eine andere perpendicular

zu

zu setzen hat, und die erstere Linie doch nicht wohl verlängern kan, wobey die gegenwärtige Aufgabe zu statten kommet. Noch nothwendiger aber ist uns diese Art Perpendicularlinien zu ziehen, wenn uns ein Punct außer dem Umkreis eines Cirkels gegeben ist, und wir sollen durch dasselbe Punct eine gerade Linie ziehen, welche den Cirkel berühret.

[*Fig.* 144.] §. 73. Es sey der Mittelpunct des Cirkels A und außer dem Umkreise desselben das Punct B gegeben, durch welches man eine gerade Linie ziehen soll, so den Cirkel berühret. Wir wissen schon, daß diese Linie auf den Halbmesser des Cirkels perpendicular stehen muß, welcher durch das Berührungspunct hindurch gehet, V,44. Alle andere Linien haben entweder mit dem Umkreise gar keine Gemeinschaft, oder sie schneiden den Cirkel. Was aber dieses vor ein Radius sey, auf welchen die gerade Linie durch B perpendicular fallen muß, können wir so gleich nicht wissen. Denselben nun zu finden, ziehe man nur eine gerade Linie zwischen B und A. Diese ist BA. Nachdem man dieselbe in C in zwey gleiche Theile getheilet hat, so beschreibe man um C durch A und B einen Cirkelkreis, welcher den erst beschriebenen Cirkel, dessen Mittelpunct in A fällt, nothwendig in zweyen Puncten D und d schneiden wird. Diese sind die Berührungspuncte zu den Berührungslinien die durch B können gezogen werden. Man ziehe BD und Bd. Beyde gerade Linien berühren den Cirkel, die eine in D, die andere in d. Beyde gehen durch B.

§. 74. Denn wenn man aus dem Mittelpuncte A auf D und d die Halbmesser AD, Ad ziehet, so sind dieselben nothwendig auf die geraden Linien BD, Bd perpendicular, weil die Winkel BDA, und BdA Winkel in einem halben Cirkel sind, wie aus der Beschreibung klar ist. Denn man hat den Mittelpunct C in der geraden Linie AB genommen, welche AB dadurch zum Durchmesser des Cirkels BDA worden. Nun aber berühret eine jede gerade Linie einen Cirkel, welche durch das Ende eines Halbmessers gehet, und auf demselben perpendicular stehet. Es müssen derowegen die geraden Linien BD, Bd den Cirkel nothwendig in D und d berühren.

§. 75. Man siehet hieraus, daß durch ein jedes Punct B außer dem Cirkel zwo gerade Linien BD, Bd gezogen werden können, welche denselben berühren. Denn wenn man die Berührungslinien, wie gewiesen ist, ziehen will, so findet man jederzeit zween Durchschnitte D und d, und man kan durch einen jeden derselben und durch B eine gerade Linie ziehen. Man hat alsdenn eben die Gründe zu zeigen, daß B d den Cirkel berühre, welche man bey BD antrift, und aus welchen man schließen kan, daß ihn BD berühre. Man kan aber auch leicht einsehen, daß durch ein dergleichen Punct,

als hier D, nicht mehr Berührungslinien an eben den Cirkelkreis gezogen werden können, als die zwo BD und Bd. Alle übrige gerade Linien, welche durch das Punct B gehen, fallen entweder innerhalb den Winkel DBd, oder außerhalb denselben. Die gerade Linien, welche durch B gehen, und außerhalb den Winkel DBd fallen, haben mit dem Cirkel gar nichts gemein. Sie gehen vor ihn vorbey, und treffen gar kein Punct desselben an: da im Gegentheil die geraden Linien, welche durch B innerhalb DBd gezogen sind, denselben schneiden. Weder die erstern noch die letztern sind Berührungslinien, es sind also derselben nur zwo, nemlich eben diejenigen, welche wir gefunden haben.

§. 76. Die Theile dieser Berührungslinien, von dem Puncte B an, durch welches sie beyde gehen, bis an die Puncte D, d, in welchen sie den Cirkel berühren, sind einander gleich, BD nemlich = Bd. Dieses ist aus den rechtwinklichten Dreyecken ABD, und ABd leicht einzusehen. In dergleichen Dreyecken sind alle Seiten und Winkel gleich, welche auf einerley Art liegen, wenn in einem derselben zwo Seiten angetroffen werden, welche zwoen Seiten des andern gleich sind, IV, 260. Nun sind in unsern Dreyecken ABd und ABD, die Seiten AD und Ad gleich, weil sie Halbmesser von dem Cirkel sind, welcher um A beschrieben ist, und die Seite AB ist beyden Dreyecken gemeinschaftlich. Demnach sind nothwendig auch die dritten Seiten BD, Bd einander gleich. Ja wir sehen aus dem gegebenen Beweiß auch noch etwas mehreres ein, nemlich, daß nachdem man die zwo Berührungslinien BD, Bd durch ein Punct außerhalb dem Cirkelkreis B gezogen hat, die gerade Linie BA, welche gedachtes Punct B mit dem Mittelpuncte des Cirkels verknüpfet, den Winkel DBd, welchen die Berührungslinien mit einander machen, in zwey gleiche Theile ABD und ABd theilen werde.

Beschreibung der regulären Figuren.

§. 77. Dieses ist dasjenige, so wir von einem Cirkel im Anfang theils zu wissen nöthig hatten, und theils einsehen konten. Denn man muß gestehen, daß noch verschiedene Aufgaben bey demselben übrig sind, welche man vermittelst der Geometrie, welche wir abhandeln, und in welcher keine andere krumme Linie, als der Umkreis des Cirkels selbst, betrachtet wird, gar nicht auflösen können, ob sie zwar einen hauptsächlichen Nutzen haben; und unter diesen ist die Eintheilung des Cirkels, oder seines Umkreises. Wir können einen jeden Bogen in zwey gleiche Theile theilen, und wie dieses

zu verrichten sey, ist oben V, 27. gewiesen worden. Wir können einen ganzen Umkreis gar leicht vermittelst des Durchmessers in seine zwo Helften theilen, und eine jede Helfte wieder in zwey Viertheile, und ein jedes Viertheil wieder in zwey Achtel; und eben so kan man auch einen jeden Bogen, welchen man in zwo Helften getheilet hat, ferner in zwey Viertheile theilen, und so immer weiter fort. Es sind auch noch andere Theilungen des ganzen Umkreises, welche man bloß durch die Anfangsgründe verrichten kan, und vermittelst des Cirkels und Linials, als der einzigen Instrumente, deren man sich dabey bedienen darf: und wir werden unten zeigen, wie ein ganzer Umkreis in sechs gleiche Theile könne getheilet werden, ob wir zwar die übrigen Theilungen in fünf oder zehen gleiche Theile, welche Euclides ebenfals zu verrichten lehret, auszuführen eben nicht nöthig erachten. Bey dem allen aber hat man keine Methode einen Umkreis in so viele gleiche Theile zu theilen, als man will, und es stehet nicht einmal bey der Geometrie, mit welcher wir uns beschäftigen, daß sie angebe, wie man einen jeden vorgegebenen Bogen in drey oder fünf, oder sieben gleiche Theile theilen soll. Wenn wir also die Gränzen der Wissenschaft so gar genau beobachten solten, wären wir in der That bey dem uns gegenwärtigen vorgesetzten Zweck, bis auf einige Kleinigkeiten, mit der Betrachtung des Cirkels am Ende.

§. 78. Es hat aber die Theilung des Cirkels, welche sich Geometrisch nicht geben lässet, in der Ausübung ungemeinen Nutzen, und es gründen sich viele Auflösungen solcher Aufgaben darauf, welche wir nicht entbehren können. Was ist hier besser, wegen einiger Kleinigkeiten, die uns die strengeste Vernunftlehre bey der Lehrart vorschreibet, nützliche Dinge wegzulassen, oder aber des Nutzens halber diese Banden zu zerreißen? Allerdings ist das letztere dem erstern vorzuziehen: denn der Nutzen allein ist es, weswegen die Wissenschaften gelehret und gelernet werden.

§. 79. Ist gleich die Theilung eines Cirkelkreises in so viele gleiche Theile als man will, Geometrisch zu reden, ohnmöglich, so lässet sie sich doch Mechanisch und durch Versetzung des Cirkels so leicht verrichten, daß wir nicht zweifeln, es werden viele, welche die Kunst mit Cirkel und Linial umzugehen, vor die Geometrie halten, sich sehr wundern, daß wir bey einer, in ihren Augen so leichten Sache, so viel Schwierigkeit machen. Dieses aber ist bey denjenigen, welche unsern Fußstapfen, oder vielmehr der Anweisung der wahren Geometrie der Griechen, bis hieher gefolget sind, nicht zu befürchten, und wir können also ohne fernere Erinnerung weiter gehen. Doch dürfte vielleicht nicht unnöthig seyn, die Mechanische Art, nach

welcher ein Bogen in so viele gleiche Theile getheilet werden kan, als man will, mit wenigem anzugeben, ob sie zwar an sich keine Schwierigkeit hat.

[*Fig. 145.*] §. 80. Die Zahl der Theile, welche der Bogen haben soll, ist entweder eine einfache Zahl 3, oder 5, oder 7, oder eine aus einfachen Zahlen zusammen gesetzte, als 12. In dem ersten Fall, wenn zum Exempel der Bogen AB in drey gleiche Theile zu theilen ist, nimmet man den dritten Theil, nach dem Augenmaaß AC, fasset so dann mit dem Cirkelinstrumente die Sehne von diesem Bogen AC; (daß man sie zeichne, wie hier der Deutlichkeit halber geschehen, ist eben nicht nöthig) und träget diese Sehne von C weiter fort in CD, und endlich leget man sie aus D nach B. Fället nun ihr Ende genau in das Punct B, so ist dieses ein Zeichen, daß das Augenmaaß nicht betrogen habe, und daß AC würklich der dritte Theil des Bogens AB sey. Denn weil die Bogen AC, CD, DB gleiche Sehnen haben, so sind sie gleich: und weil gesetzet wird, daß sie zusammen den Bogen AB ausmachen, so ist ein jeder derselben der dritte Theil des ganzen Bogens AB. Findet man aber, daß die Sehne AC, nachdem sie dergestalt in den Bogen AB fortgesetzet worden ist, das dritte mal entweder B nicht erreiche, oder über B hinaus falle, so siehet man leicht, daß man AC entweder zu klein oder zu groß angenommen habe, und man kan so dann den Fehler entweder ganz und gar verbessern, oder doch vermindern, bis man endlich, nach wiederhohlten Proben, den dritten Theil genau trift.

§. 81. Dieses heißet Mechanisch theilen. Der Beweiß von allen solchen Arbeiten gründet sich bloß auf die Sinnen. Will jemand in Zweifel ziehen, ob durch die gewiesenen Handgriffe der dritte Theil des Bogens AB richtig gefunden worden sey, so kan man ihn davon nicht anders überführen, als wenn man zeiget, daß die Sehne AC allerdings sich dreymal in dem Bogen AB fortsetzen lässet, da im Gegentheil die Richtigkeit der Geometrischen Auflösungen durch Vernunftschlüsse dargethan wird, und man nicht nöthig hat, dabey auf den Augenschein, als einen Hauptgrund, es ankommen zu lassen. Es hat auch die Geometrische Auflösung vor der Mechanischen dieses zum voraus, daß durch jene das gesuchte auf einmal gefunden wird, durch diese aber erst durch wiederhohlte Proben, oder doch so, daß man nicht gleich Anfangs gewiß seyn kan, man habe nicht gefehlet. Wiewohl auch dieses nicht zu leugnen ist, daß so lange man bloß auf den Nutzen in der Ausübung siehet, dergleichen Mechanische Auflösungen öfters den Geometrischen vorzuziehen sind. Und dieses darum, weil doch end-

endlich die ganze Richtigkeit in der Ausübung auf ein scharfes Gesicht ankommet, welches so wohl bey einer Geometrischen als bey einer Mechanischen Ausübung fehlen kan. Man kan würklich, wenn zu einem richtigen Instrumente, oder sonst zu einem andern Zweck, ein Bogen genau in zwey gleiche Theile zu zerschneiden ist, der Geometrischen Theilung niemals vollkommen trauen, bevor man versucht hat, ob die Sehnen der Bogen, welche als die Helften des Ganzen gefunden worden, einander würklich gleich sind.

§. 82. Solchergestalt verfähret man, wenn die Zahl der Theile die der Bogen haben soll, eine einfache Zahl ist. Wäre sie aber eine andere Zahl, so könte man sie erst in ihre einfache Zahlen zerfällen, aus welchen sie durch die Multiplication entstanden ist, und so dann nach und nach theilen. Zwölfe ist so viel als $2 \times 2 \times 3$, oder zwölfe ist entstanden, indem man zwey in zwey, und das Product 4 wieder durch drey multiplicirt hat. Soll man also einen Bogen in zwölf Theile theilen, so theile man ihn erstlich in 2 Theile, und eine jede dieser Helften wieder in 2 Theile, so hat man der Theile im ganzen Bogen viere, deren jedes man wieder in 3 Theile theilen muß, damit man in dem Ganzen 12 bekommet. Und so verfähret man in allen dergleichen Fällen. Wir werden eine dergleichen Theilung inskünftige, aus den angeführten Ursachen, als möglich und bekant annehmen.

[*Fig.* 146.] §. 83. Dieselbe nun führet uns erstlich darauf, wie wir in einem jeden gegebenen Cirkelkreise eine gleichseitige und gleichwinklichte Figur, von so vielen Seiten als verlanget wird, beschreiben sollen, dergestalt nemlich, daß alle Ecken dieser geradelinichten Figur in den Umkreis des Cirkels fallen. Es sey zum Exempel in dem gegebenen Cirkel der 146 Figur ein Fünfeck zu beschreiben, dessen Winkel und Ecken alle gleich sind: so theile man, wie man kan, den Umkreis in fünf gleiche Theile, in A, B, C, D, E, ziehe so dann jede zwey dieser Theilungspuncte, die einander zu nächst liegen, mit geraden Linien zusammen, welche Sehnen von dem Bogen, in welche der Umkreis getheilet ist, abgeben werden; diese Sehnen werden das verlangte Fünfeck einschließen.

§. 84. Man siehet leicht ein, daß die Figur so viele Seiten haben werde, als viele der Theile sind, in welche man den Umkreis getheilet hat, das ist, eben so viele als verlanget worden, und nicht viel schwerer ist es zu bemerken, daß diese Seiten alle einander gleich seyn werden. Denn sie sind Sehnen von gleichen Bogen eines Cirkels, welche allezeit einander gleich sind, V, 9. Ja in der Mechanischen Theilung des Umkreises, welche

che wir V, 80. gezeiget haben, werden eben dadurch die Bogen einander gleich gemacht, daß man ihre Sehnen gleich machet, und ist also die Gleichheit der Sehnen nicht einmal aus der Gleichheit der Bogen zu schließen. Daß aber auch alle Winkel der also gezeichneten Figur einander gleich sind, siehet man so wohl durch den natürlichen Verstand daraus, weil sie alle auf einerley Art entstanden sind, und derowegen nicht das geringste vorhanden ist, worauf man sich vernünftig gründen könte, wenn man einen derselben vor größer oder kleiner halten wolte, als den andern; als auch durch dasjenige, welches in dieser Geometrie ohnlängst vorher gegangen ist. Alle Winkel des in dem Cirkel beschriebenen Fünfecks fallen mit ihren Spitzen in den Umkreis des Cirkels, und sie stehen alle auf gleichen Bogen. Nemlich ein jeder derselben stehet in der Figur, welche wir vor uns haben, auf drey Fünfteln des ganzen Umkreises; A auf BC+CD+DE, B auf CD+DE+EA, und so ferner. Oder man kan auch sagen, jeder derselben stehet in einen Bogen welcher zwey Fünftheile des ganzen Umkreises beträgt, A in BA+AE, B in AB+BC, und so fort, und diese Bogen sind einander ebenfals gleich. Da nun alle Winkel, deren Spitzen in den Umkreis des Cirkels fallen, und die auf oder in gleichen Bogen stehen, einander beständig gleich sind, V, 59. so müssen auch die Winkel unserer Figur A, B, C, D, E, alle einander gleich seyn. Es ist also die beschriebene Figur so wohl gleichseitig als gleichwinklicht.

[*Fig.* 147.] §. 85. Wenn man aus dem Mittelpuncte des Cirkels F an jede Ecke des Vieleckes einen Halbmesser ziehet FA, FB, FC, u. s. f. so werden die gleichschenklichten Dreyecke FAB, FBC, und so ferner, einander alle gleich, wie aus dem, so wir bey der Betrachtung der Sehne gesaget haben, einzusehen ist: und auch ohne Weitläuftigkeit daraus geschlossen werden kan, weil alle Seiten aller dieser Dreyecke einander gleich sind. Denn sie sind theils Halbmesser von einem Cirkel, theils aber Sehnen von gleichen Bogen. Demnach sind auch so wohl die Winkel bey F alle einander gleich, als auch die bey A, B, C, und so ferner, wie man auch diese letztern mit einander vergleichen will. Es ist also FBA die Helfte des Winkels ABC, und so ferner. Man übersiehet auch alles dieses gar leicht, bloß mit der natürlichen Vernunft.

§. 86. Aber die Winkel an dem Umkreise, zum Exempel, die bey A, sind den Winkeln an dem Mittelpuncte F, nicht nothwendig gleich. Man siehet leicht, daß wenn man die Zahl der Seiten vermehret, die Winkel an dem Mittelpuncte immer kleiner und kleiner werden, da im Gegentheil die Winkel an dem Umkreis bey dieser Vermehrung der Zahl der Seiten

des

des Vielecks, beständig wachsen. Wie ist es also möglich, daß die Winkel bey A oder B oder C denen bey F in allen Vielecken gleich seyn solten? Doch giebt es einen Fall, in welchem diese Winkel gleich sind; und diesen werden wir so gleich zeigen.

§. 87. Die Summe aller Winkel bey F, machet vier gerade Winkel aus, wie dieses bey allen Winkeln, deren Spitzen in einem Puncte zusammen stoßen, eintrift, IV, 70. Und weil sie einander gleich sind, so ist ein jeder derselben der so vielste Theil von vier geraden Winkeln, als viele Seiten die Figur hat, das ist, als viele der Bogen AB, BC, u. s. f. sind, in welche der ganze Umkreis getheilet ist. Und wenn demnach, wie in unserer Figur, der Seiten des Vieleckes an der Zahl sechse sind, so ist ein jeder Winkel an dem Mittelpunct F der sechste Theil von vier geraden Winkeln, das ist $\frac{4}{6}$, oder welches eben das ist, $\frac{2}{3}$ von einem geraden Winkel.

§. 88. Kan man demnach einen Winkel wie man wil, theilen, und nach Belieben den dritten, fünften, siebenden Theil von einem, oder von vier geraden Winkeln, schaffen; so ist es leicht den Umkreis des Cirkels eben so zu theilen. Nemlich so bald in unserer Figur der Winkel an dem Mittelpunct F zwey Dritteln eines rechten Winkels gleich gemachet wird, so wird auch sein Bogen BC der sechste Theil des ganzen Umkreises. Allein es hat mit der Theilung der Winkel überhaupt eben die Schwierigkeit, welche wir bey der Theilung der Bogen angezeiget haben; denn es hänget eines dieser Dinge von dem andern ab, die Theilung des Bogens in einem Ausschnitte, von der Theilung des Winkels, und die Theilung des Winkels von der Theilung des Bogens, wie oben V, 13. angemerket worden ist.

§. 89. Wenn aber der Winkel an dem Mittelpuncte AFB insbesondere zwey Drittel von einem rechten Winkel ausmachet, welches, wie wir V, 87. gesehen haben, bey einem Sechseck von gleichen Seiten und Winkeln, und zwar bey diesem alleine, eintrift; so müssen die übrigen beyde Winkel des Dreyecks AFB, nemlich FAB und ABF, zusammen $\frac{4}{3}$ eines rechten Winkels ausmachen, sonst könte die Summe aller Winkel des Dreyecks ohnmöglich $\frac{6}{3}$ von einem geraden Winkel, oder zwey gerade Winkel betragen, so doch in jedem Dreyeck seyn muß. Es sind aber die beyden Winkel bey A und B einander gleich; da sie also zusammen gesetzet $\frac{4}{3}$ eines geraden Winkels ausmachen, so muß jeder derselben die Helfte hiervon, nemlich $\frac{2}{3}$ eines geraden Winkels seyn. Also sind alle drey Winkel des Dreyecks ABF einander gleich, und demnach auch die Seiten desselben.

ben. Oder das Dreyeck BAC ist gleichseitig, IV, 133. Folgends ist die Seite des regulären Sechseckes AB, dem Radius AF des Cirkels gleich, in welchem das Sechseck kan beschrieben werden. Es wird also in einem gegebenen Cirkel ein reguläres Sechseck gar leicht beschrieben. Man darf nur den Radius in dem Umkreis herum setzen, er wird denselben genau in sechs gleiche Theile theilen, und man wird, wie überhaupt gezeiget worden ist, V, 83. so dann das Sechseck ausmachen können.

§. 90. Vermehret man in einer regulären Figur, welche man in dem Cirkel beschrieben hat, die Zahl der Seiten, und beschreibet zum Exempel an statt eines Sechsecks in eben dem Cirkel ein Zwölfeck, so werden die Bogen, in welche man den Umkreis theilen muß, um die Figur zu beschreiben, nothwendig kleiner. Also werden auch die Seiten selbst kleiner, sie entfernen sich von dem Mittelpuncte, und nähern sich hingegen dem Umkreise des Cirkels. Alles dieses ist aus demjenigen leicht zu schließen, so wir von den Sehnen gesehen haben. Da aber doch allezeit die Seiten einer in den Cirkel beschriebenen Figur, Sehnen von dem Cirkel sind, so können diese Seiten ohnmöglich, weder ganz noch zum Theil, außer den Cirkel fallen: also ist ein jedes Vieleck, so nach der gegenwärtigen Anweisung beschrieben wird, ganz und gar in dem Cirkel enthalten, und kleiner als derselbe; ob zwar durch die beständig fortgesetzte Vermehrung der Zahl der Seiten das Vielect dem Cirkel immer näher und näher komt, und von demselben der Größe und Figur nach immer weniger und weniger verschieden wird. Man gebe sich die Mühe diese Vermehrung der Zahl der Seiten selbst zu verrichten, so wird man die Sache vollkommen deutlich einsehen.

[*Fig.* 148.] §. 91. Wil man um einen gegebenen Cirkel herum ein reguläres Vieleck beschreiben, so nemlich, daß alle Seiten des Vieleckes den Cirkel berühren, so kan man es fast auf eben die Art thun, die wir gewiesen haben ein Vieleck in einen Cirkel zu beschreiben. Man theile wieder den gegebenen Cirkel in so viele gleiche Theile, als viele Seiten die Figur haben sol, vermittelst der Puncte A, B, C, und so fort. Wir haben sieben dergleichen Theile gemacht, weil wir ein Siebeneck beschreiben wollen. Ist diese Theilung verrichtet, so ziehe man V, 42. durch ein jedes der Puncte A, B, C und so weiter, eine gerade Linie, welche den Cirkel berühret, und verlängere sie so lange, bis sie die nächste Berührungslinie antrift, wodurch sich die Winkel E, F, G geben werden. Die Figur E, F, G und so fort, wird das verlangete Vieleck seyn.

§. 92. Auch hier zeiget der natürliche Verstand die Richtigkeit der Auflö-

Auflösung leicht. Der Cirkel ist um und um von einerley Rundung. Die Seite des Vieleckes EF ist nicht anders geleget worden als die andere FG, und die dritte und die übrigen. Dadurch sind die Ecken E, F, G entstanden, und die Seiten EF, FG haben dadurch ihre Länge bekommen. Welche Seite sol denn länger seyn als eine andere, und welcher Winkel E, F, G &c. ist größer als der andere? Es ist nirgends etwas verschiedenes angenommen woden, indem wir das Vieleck verfertiget haben, wodurch solte demnach dasselbe auf einer Seite anders worden seyn, als auf der andern?

§. 93. Ein Geometra aber wird hier, aus den gegebenen Gründen, also schließen können. Wenn man von den Puncten A, B, C nach dem Mittelpuncte gerade Linien ziehet, und ferner noch andere von dem Ecken E, F, G &c. so siehet man, daß die Winkel bey H alle gleich seyn müssen. Denn AHB ist dem BHC gleich, weil die Bogen AB und BC gleich gemachet worden sind; und so ist es rund herum bey allen solchen Winkeln. Da nun aus dem Puncte E, aus welchem zwo gerade Linien gezogen sind EA, EB, die den Cirkel in A und B berühren, auch die Linie EA nach dem Mittelpuncte gezogen ist, so schneidet diese EH den Winkel AHB in zwey gleiche Theile, V, 76. und eben so theilet FH den Winkel BHC gleich, und so ist es wieder rings herum. Es sind demnach alle Winkel um den Mittelpunct H, AHE, EHB, BHF und so fort, einander gleich, weil ein jeder derselben eine Helfte ist eines dergleichen Winkel AHB, BHC, und so weiter. Da nun also zwey Dreyecke die neben einander auf einer Seite des Vieleckes stehen, als HEB, und HBF, den Halbmesser HB mit einander gemeinschaftlich haben, und ihre Winkel bey H so wol als die geraden Winkel bey B einander gleich sind, V, 47. so sind die übrigen Winkel dieser Dreyecke bey E und F einander ebenfals gleich, nemlich HEB = HFB, wie auch ihre übrige Seiten EB = BF, IV, 130. Da aber außer dem auch die Seiten FA und EB gleich sind, wie auch die beyden Winkel bey E, V, 76. so ist auch AE = EB. Wir haben also AE = EB, und EB = BF, und BF = FC, und so rings herum. Wie auch AEH = HEB, und HEB = HFB, und HFB = HFC, und so wieder rings herum. Wenn man demnach überall zwo von den gleichen Linien EB + BF, wie auch FC + CG und so fort, zusammen setzet, so siehet man daß EF, FG und die übrige Seiten unserer Figur einander gleich sind. Man setze ferner die zween gleiche Winkel bey E, F, G zusammen, so bekommet man die Winkel des Vielecks, welche bey so gestalten Sachen, da ihre Helften gleich sind, auch alle gleich seyn müssen. Und demnach hat das Vieleck, welches wir um

den Cirkel herum beschrieben haben, lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel, wie verlanget worden ist.

§. 94. Die Puncte E, F, und so ferner, der Berührungslinien, welche die Seiten der Figur abgeben, sind am allerweitesten von dem Umkreise des Cirkels entfernet. Beschreibet man aber um eben den Cirkel ein anderes reguläres Vieleck, welches mehr Seiten hat als das gegenwärtige, so werden die Seiten nothwendig kürzer, und die Ecken dieses Vieleckes fallen dem Umkreis des Cirkels näher, und dieses geschiehet immer fort, je mehr man Seiten in das reguläre Vieleck bringet. Doch weil die Seiten eines solchen Vielecks immer Berührungslinien bleiben, so können sie ohnmöglich weder ganz noch zum Theile in den Cirkel hinein fallen, V,44. demnach ist ein dergleichen Vieleck, so viele Seiten es auch haben mag, immer größer als der Cirkel.

[*Fig.* 149.] §. 95. Aus demjenigen, so V, 85. von den Winkeln der regulären Vielecke gewiesen ist, schließet man auch, wie auf eine gegebene Seite AB ein reguläres Vieleck von so vielen Seiten, als erfordert wird, zu setzen sey. Wir wollen uns vorstellen, daß dieses bereits verrichtet worden, daß man, zum Beyspiele, auf AB ein Fünfeck in einem Cirkel beschrieben, und aus dem Mittelpunct desselben C nach A und B die zween Halbmesser CA, CB gezogen habe: so ist C der Winkel an dem Mittelpuncte bey einem Fünfecke, und wird gefunden, wenn man vier rechte Winkel durch die Zahl der Seiten des Fünfecks, das ist, durch 5, theilet; er hält demnach $\frac{4}{5}$ eines rechten Winkels. Diesen ziehe man von der Summe aller Winkel des Dreyecks ABC, das ist, von zween geraden Winkeln, ab, so bleibet $2-\frac{4}{5}$, das ist, $\frac{10}{5}-\frac{4}{5}$, oder $\frac{6}{5}$ von einem rechten Winkel, und so viel beträget die Summe der beyden Winkel bey A und B. Weil sie einander gleich sind, so ist jeder dieser Winkel, die Helfte ihrer Summe, und demnach ist $A=B=\frac{3}{5}$ von einem geraden Winkel. Wir wiederholen hier was bereits gezeiget worden ist, etwas anders. Denn wir haben bereits IV, 240. eine allgemeine Regel gegeben, den Winkel, welchen die Seiten eines jeden gleichwinklichten Vielecks mit einander machen, zu finden, und von einem solchen Winkel ist $CAB=CBA$ die Helfte, V, 85. Nach dieser Berechnung ist das Fünfeck leicht beschrieben. Man setze an die gegebene Seite AB beyderseits die Winkel A und B, wie sie gefunden werden, nemlich $\frac{3}{5}$ von einem geraden Winkel, dadurch wird das Dreyeck ACB verfertiget, dessen Spitze in den Mittelpunct des Cirkels fället, in welchem das Fünfeck beschrieben werden kan, dessen Seite AB ist, und in welchem sich die Sehne AB fünfmal herum tragen lässet. Denn weil der

Win-

Winkel bey C, ein Fünftel ist von vier rechten Winkeln, so muß auch der Bogen AB der fünfte Theil des ganzen Umkreises seyn, V, 13. und demnach seine Sehne AB, wenn man sie fort träget, wieder das andere, und so dann das dritte, das vierte, und das fünfte Fünftel von dem Umkreise abschneiden, und also diesen in fünf gleiche Theile theilen.

[*Fig.* 150.] §. 96. Wenn man demnach nur einen rechten Winkel theilen könte, wie man wolte, so hätten auch alle dergleichen Aufgaben keine Schwierigkeit; da aber, wie V, 75. gesaget worden ist, eine allgemeine Theiluug dieses Winkels, wie aller übrigen, nicht kan gezeiget werden, so bleibet auch die gegenwärtige Auflösung im Grund mangelhaft, so doch, daß dadurch die Ausübung nicht das geringste leidet. Denn man kan $\frac{3}{5}$ von einem geraden Winkel leicht angeben, indem man aus der Spitze A des geraden Winkels BAC den Quadranten BC beschreibet, diesen in fünf gleiche Theile theilet, und nach dem dritten Theilungspunct die Linie AD ziehet. Der Winkel DAC ist dreyen Fünfteln des geraden Winkels BAC gleich, und folgends die Helfte des Winkels, welchen die Seiten eines Fünfeckes einschließen. Eben so verfähret man in allen dergleichen Fällen.

§. 97. Wäre aber auf die Seite AB, an statt des Fünfecks ein Sechseck zu beschreiben gewesen, so hätte man den Mittelpunct des Cirkels C, in welchen es zu beschreiben ist, geometrisch finden können, weil in diesem Fall das Dreyeck CAB gleichseitig, und der Halbmesser CA der Seite AB gleich ist, V, 89. Man darf demnach nur auf die gegebene Seite AB ein gleichseitiges Dreyeck beschreiben, so hat man den Mittelpunct des Cirkelkreises zu dem Sechseck. Uebrigens verfähret man, wie gelehret worden ist.

[*Fig.* 151.] §. 98. Nehmen wir nun dasjenige, so von den regulären Vielecken gesaget worden ist, zusammen, und beschreiben in einem Cirkel ein reguläres Vieleck von so vielen Seiten als man wil, zum Exempel das Fünfeck ABCDE, und ein anders von eben so vielen Seiten um denselben, und vermehret so dann die Zahl der Seiten beyder Vielecke: (am bequemsten ist es, daß man ihrer doppelt so viel mache): so sehen wir, daß, indem sich der Umkreis des innern Vielecks nach allen Seiten an den Umkreis des Cirkels begiebet, V, 90. und der Umkreis des äußern Vieleckes sich ebenfals mit allen seinen Ecken von außen dem Cirkel nähert, V, 94. sich auch die Umkreise dieser zweyen Vielecke einander selbst nähern müssen, oder daß sich der Umkreis des äußern Vieleckes, welches mehr Seiten hat, dergleichen in der Figur das äußere Zeheneck ist, von dem

Umkreise des innern Vieleckes von eben so vielen Seiten um und um weniger entferne, als der Umkreis des äußersten Vieleckes, von wenigern, nemlich in unserem Fall von fünf Seiten, sich von dem Umkreise des innern Vieleckes von eben so vielen Seiten um und um entfernet; daß aber beständig, weil kein Punct des Umkreises des äußern Vieleckes innerhalb den Cirkel, V, 94. und kein Punct des Umkreises des innern Vieleckes außerhalb den Cirkel fallen kan, V, 90. der Umkreis des Cirkels zwischen beyden Umkreisen der Vielecke in der Mitte bleibe, und von den Umkreisen der Vielecke beschlossen werde. Vermehret man nun die Zahl der Seiten noch weiter, und machet sie wieder doppelt so groß als sie vorher waren, so kommen die Umkreise der Vielecke einander noch näher. Es gehet dieses ohne Ende fort, und man kan keine Gränzen setzen, wo diese Näherung aufhören solte.

§. 99. Gesetzt, man habe in Gedanken die Seiten der Vielecke auf die Art bis auf tausend vermehret, so siehet man leicht, daß wenn man zwey Tausendecke, eines um den Cirkel, und eines innerhalb desselben beschreiben wil, der Unterscheid der Umkreise kaum mehr mit den Augen wird können bemerket werden. Man versuche nur ein dergleichen Vieleck von vier und zwanzig Seiten zu beschreiben, so wird man schon sehen, wie wenig ihre Umkreise von einander abstehen, und was ist 24 gegen tausend? Doch ist hier noch ein Unterscheid des innern Vieleckes von dem äußern einiger maßen merklich, und auch bey einem Tausendecke kan wenigstens der Verstand uns einen Unterscheid des äußern Vielecks von dem inneren vorstellen. Eben dieses würde auch statt haben, wenn man auch den Vielecken eine Million von Seiten geben wolte. Die richtigsten Schlüsse werden uns allezeit dahin bringen, daß wir zugeben müssen, daß das äußere Vieleck, welches um den Cirkel beschrieben wird, größer sey als das innere. Und wie könte sonst jenes das äußere, und dieses das innere seyn? Die Seiten des äußern Vieleckes sind allezeit Berührungslinien, und entfernen sich von dem Umkreise des Cirkels, so bald sie sich von den Berührungspuncten entfernen. Und die Seiten des innern Vieleckes sind allezeit Sehnen, welche ganz in dem Cirkel liegen, und bloß mit ihren äußersten Puncten in dessen Umkreis fallen können.

§. 100. Doch fällt der Umkreis des Cirkels beständig zwischen die Umkreise zweyer dergleichen in und um denselben beschriebener Vielecke, und ist größer als der Umkreis des innern, und kleiner als der Umkreis des äußern: und sind der Seiten viele, so ist der Umkreis des Cirkels von keiner dieser beyden eckichten Umkreise sonderlich unterschieden, weil die eckichten

Um-

Umkreise selbst einander fast gleich sind. Man siehet hieraus, wie man eine Länge angeben könne, welche dem Umkreise eines Cirkels ziemlich nahe komt. Man beschreibe in dem Cirkel ein reguläres Vieleck von sehr vielen Seiten, je mehr je besser, zum Exempel ein 96 Eck, und um den Cirkel beschreibe man ein reguläres Vieleck von eben so vielen Seiten. Man messe oder suche auf diejenige Art, welche am genauesten zum Zweck führen kan, den Umkreis sowohl des innern als des äußern Vielecks: so kan der eine oder der andere ohne sonderlichen Fehler vor den Umkreis des Cirkels angenommen werden. Eigentlich werden durch diese Umkreise der beyden Vielecke die Gränzen bestimmet, zwischen welche der Umkreis des Cirkels gewiß fallen muß, als welcher größer ist als der Umkreis des innern Vielecks, und kleiner als der Umkreis des äußern. Man siehet leicht, daß man dadurch außer den Stand gesetzet wird, bey dem Umkreise sonderlich zu fehlen, und daß man noch über dieses die Fehler immer verkleinern kan, indem man nur den Vielecken mehr Seiten giebt.

Von geraden Linien, die den Cirkel schneiden.

[*Fig.* 152. 153. 154.] §. 101. Dasjenige, so wir bisher von dem Cirkel gesehen haben, ist aus der Betrachtung der Sehnen desselben und der Berührungslinien geflossen. Wir haben nur noch etwas weniges von solchen geraden Linien zu sagen, welche keine Sehnen sind, und den Umkreis des Cirkels doch schneiden, wenn sie verlängert werden: oder die von einem in oder außer dem Cirkel gegebenen Puncte, welches der Mittelpunct nicht ist, an den Umkreis desselben gezogen werden. Es sey erstlich das Punct A dergestalt innerhalb des Cirkels gegeben, und von demselben sey durch den Mittelpunct die Linie BCD gezogen. Man ziehe ferner AE, AF, bis an den Umkreis, und an einer Seite des Durchmessers: nicht etwa eine zur Rechten desselben, und die andere zur Linken: so wird allezeit diejenige Linie größer, welche sich von der Linie AB weiter entfernet, und mit dieser Linie einen größern Winkel einschließet, als diejenige, die sich derselben mehr nähert. AF ist größer als AE, und so ist es immer, man mag dergleichen Linien ziehen wie man will. Oder, man kan eben das ausdrücken, wenn man saget, daß die Linien AE wachsen und größer werden, indem sie sich dem Theil der Linie AD, in welchem der Mittelpunct C anzutreffen ist, nähert. Denn indem sich AE von der AB entfernet, so nähert sie sich der AD. Ist zweytens das Punct A außer dem Cirkel genommen worden; und man hat wieder durch dasselbe und den Mittelpunct die Linie

ABCD

ABCD gezogen, welche den Umkreis in B und D schneidet, und man ziehet zwo andere gerade Linien AE und AF, welche den Umkreis schneiden, und sich in E und F an dessen Hohlung endigen, so ist eben dieses richtig. Diejenige dieser Linien, welche der AD näher lieget, das ist, AF ist größer als diejenige, welche weiter von derselben zurückbleibt, AE. Und dieses ist wieder beständig richtig, man mag übrigens dergleichen Linien AF, AE ziehen wie man will. Hat man aber drittens das Punct A noch außer dem Cirkel angenommen und aus demselben die zwo Linien AE, AF nur so weit gezogen, bis sie den Cirkel erreichen, ohne ihn vorher zu schneiden, so ist die diejenige die größere, welche von der AB weiter abliegt. AF nemlich ist größer als AE, weil der Winkel FAB größer ist als EAB. Dieses ist das einzige, so wir von dem Cirkel gegenwärtig noch zu erweisen haben, das übrige wird unten vorkommen.

§. 102. Es lässet sich aber dieses alles gar leicht einsehen, wenn man sich vorstellet, daß von einem dieser Puncte E der Halbmesser EC gezogen sey: und sodann sich die Linie EA in AF und von dannen weiter bewegen lässet. Indem dieses geschiehet, bleibt die Seite CA, wie auch die Seite EC beständig von einerley Größe, der Winkel ECA aber wird immer größer und größer, indem aus demselben der Winkel FCA, und endlich ein noch größerer wird. Wir haben aber gleich Anfangs IV, 112. gesehen, daß, indem dergestalt ein Winkel ECA wächset, auch die Seite wachsen müsse, welche dem Winkel entgegen gesetzt ist, wenn nemlich, wie hier, die übrigen Seiten AC, EC von einerley Größe bleiben. Also ist FA größer als EA, und so weiter.

§. 103. Diese Schlüsse schicken sich zu allen dreyen Zeichnungen, welche die besondern Fälle dieses Satzes vorstellen. Man kan aber auch diesen Satz dergestalt ausdrücken, daß man nicht nöthig hat auf die besondere Lage des Punctes A Acht zu haben. Nachdem man durch dieses Punct den Durchmesser ABC gezogen hat, dessen äußerstes Punct B dem Puncte A näher ist, als das entgegen gesetzte: so stelle man sich das Punct E erstlich in B vor, und führe es sodann in den Umkreis durch E, F bis in D, so daß es beständig die Linie AE mit sich nimt. Es ist in allen Fällen AE die kleinste, wenn E in B fället. Sie wächset, indem E in dem Umkreise sich von B entfernet, beständig und wird endlich die gröste unter allen Linien, welche von dem Punct A an den Umkreis können gezogen werden, wenn E in D fället.

§. 104. Wil man aber diese Schlüsse etwas bündiger fassen, so ziehe man in der 152 Zeichnung auch nach F, den Halbmesser CF, und hänge die zwey äußersten Puncte dieser Linien E und F mit der Sehne EF zusammen: so ist das Dreyeck ECF gleichschenklicht, und die Winkel CEF und CFE sind einander gleich. Weil nun der Winkel AEF aus dem Winkel CEF wird, indem man diesem den Winkel AEC zusetzet: so ist AEF größer als CEF = CFE, und folgends ist der Winkel AEF noch vielmehr größer als AFE, welcher kleiner ist als CFE. Man siehet also, daß in dem Dreyeck AEF der Winkel AEF, welcher der Seite AF entgegen stehet, größer sey als der Winkel AFE, welcher der Seite AE entgegen gesetzet ist, demnach ist auch die Seite AF größer als die Seite AE. Denn in einem jeden Dreyecke ist die größere Seite dem größeren Winkel entgegen gesetzt, IV, 242.

§. 105. Eben dieser Beweis ist auch anzuwenden, wenn man zeigen wil, daß AF in der 153 Figur größer sey als AE. Man wiederhole die Schlüsse, welche eben gemacht worden sind, und wende sie auf die gegenwärtige 153 Figur an, so wird man von der Richtigkeit des Satzes auch in diesem Fall vollkommen überzeuget werden.

§. 106. Daß aber auch in der 154 Figur AF größer sey als AE, siehet man, wenn man wieder den Halbmesser CF ziehet, und denselben so wohl als den voriaen CE nach Belieben in G und H verlängert. Weil wieder das Dreyeck CEF, welches die Sehne FE mit den Halbmessern CE, CF machet, gleichschenklicht ist, und weil also die Winkel CEF, CFE einander gleich sind; so sind auch ihre Ergänzungen zu zween geraden Winkeln GEF und HFE einander gleich. Nun ist der Winkel AEF größer als GEF = HFE, und AFE ist kleiner als HFE, also ist auch AEF größer als AFE, und es ist wieder IV. 242. in dem Dreyeck AFE die Seite AF, welche dem größern Winkel AEF entgegen stehet, größer als die Seite AE, welche dem kleinern Winkel AFE entgegen gesetzet ist.

§. 107. Da nun also in der 152 und 153 Figur, die Linie AE immer wächset, indem sie sich nach und nach gegen der AD neiget, so muß nothwendig diese Linie, welche aus A durch den Mittelpunct bis an den Umkreis in D gezogen ist, die größeste unter allen geraden Linien seyn, welche aus A an den Cirkelkreis können gezogen werden. Denn es kan die Linie AE, nachdem sie in AD gefallen ist, sich dieser Linie AD nicht noch weiter nähern. Und man siehet leicht, daß in der andern Helfte des Cirkels

zur rechten, eben dasjenige statt habe, was von den Linien AE, AF in der linken Helfte gezeiget worden ist. Im Gegentheil ist in der 152 und 154 Figur die Linie AB, welche den Umkreis erreichet, ehe sie durch den Mittelpunct gehet, die kleinste unter allen AE, AF. Denn weil die Linie AF immer kleiner wird, indem sie sich dieser Linie AB nähert, und dadurch nach und nach bis zur Größe AE, und so weiter abnimmet, so kan es nicht fehlen, es muß AB die kleinste unter allen diesen Linien seyn. Denn näher als AB sich selber ist, kan AE der AB nicht werden. Entfernet sich aber AE von der AB auf der andern Seite des Durchmessers zur Rechten, so wächset sie wieder, wie sie auf der linken Seite abgenommen hatte, daß also überall AB die kleinste der beschriebenen Linien bleibt.

Sechs-

Sechster Abschnitt.

Von den Verhältnissen, und ihrer Gleichheit.

Grund-Begriffe.

§. 1.

Wir haben bis anhero die einfachsten Größen, die Zahlen nemlich und die geraden Linien samt einigen andern, vor sich betrachtet, und die vornehmsten Eigenschaften derselben, die auf die Art eingesehen werden konten, uns bekant gemacht. Und wenn wir sie mit einander verglichen müsten, so haben wir bloß auf die Gleichheit oder Ungleichheit derselben gesehen, ohne uns bey der Größe der einen dieser Zahlen oder Linien, die man ihr in Ansehung der andern zuschreiben muß, aufzuhalten, und dieselbe zu untersuchen. Es ist nöthig, daß wir nunmehro auch einige derselben auf andere beziehen lernen, und uns dasjenige ebenfals vorstellen, was von den Größen gesagt werden kan, wenn man sie dergestalt mit einander vergleichet. Diese Betrachtungen sind etwas schwerer als die vorigen. Ich werde aber trachten, dieselbe so leicht zu machen, als es mir möglich seyn wird.

[*Fig.* 155.] §. 2. Man vergleichet zwo Größen, A und B mit einander, wenn man sich vorstellet, daß die eine derselben A eben so groß sey als die andere B, oder daß A größer oder kleiner sey als B; und wie groß eigentlich A in Ansehung der B, oder B in Ansehung der A sey. Alles dieses kan nicht geschehen, wenn nicht diese Größen von der Art sind, daß eine derselben A durch beständiges wachsen oder abnehmen der B endlich gleich, und so dann größer oder kleiner werden kan als B. Ist aber dieses, und kan die A, indem sie beständig wächset oder abnimmet, endlich der B gleich, und nach Belieben größer oder kleiner werden als B, so kan man diese zwo Größen allerdings mit einander vergleichen.

§. 3. Es können demnach alle gerade oder krumme Linien mit einander verglichen werden, weil sie alle entstehen, indem ein Punct aus seiner Stel-

Stelle fortfließet. Denn dadurch wird die Linie beständig vergrößert: und man kan sich vorstellen, daß sie hinwiederum verkleinert werde, indem das Punct, welches die Linie beschrieben hat, in seinem vorigen Wege zurücke gehet, und in demselben sich dem Orte nähert, von welchem es zuerst ausgegangen ist. Man siehet leicht, daß indem dergestalt eine Linie beständig wächset oder abnimmet, sie endlich einer jeden andern Linie, sie mag so groß oder so klein seyn, als sie wil, gleich werde, und daß sie größer werde als diese, wenn sie so dann noch weiter wächset, oder kleiner, wenn sie noch mehr abnimmet. Eben so ist es mit allen Größen von einerley Art beschaffen. Wenn man zwey Gewichte annimmet, wie man wil, so kan das kleinere durch beständiges Wachsen dem größern gleich werden, und das größere dem kleinern, indem es beständig abnimmet. Man kan also alle Größen von einerley Art mit einander vergleichen.

[*Fig.* 156.] §. 4. Wie groß aber eigentlich eine gegebene Größe in Ansehung der andern sey, erkennet man auf zweyerley Arten. Es sey die Größe der Linie A in Ansehung der Linie B zu bestimmen, das ist, man sol nicht nur sagen, ob A in Ansehung der B sehr groß, oder nicht gar groß, oder sehr klein, oder nicht sonderlich klein sey; sondern auch genau anzeigen, was A eigentlich vor eine Größe in Ansehung der Linie B habe: so können entweder die beiden Linien in gleiche Theile getheilet werden, so groß oder so klein diese auch seyn mögen, oder es gehet dieses nicht an. Daß das erstere öfters seyn könne, ist kein Zweifel. Denn man kan ja zwo Linien aus gleichen Theilen zusammen setzen, indem man einer jeden eine gewisse Zahl solcher Theile giebet, wie auf die Art AB und CD in der 156 Zeichnung zusammen gesetzet sind.

§. 5. Das andere, daß nicht alle Linien sich dergestalt aus gleichen Theilen zusammen setzen lassen, siehet man folgendergestalt ein. Gesetzt, man habe die Linien AB und CD in gleiche Theile getheilet, oder aus gleichen Theilen zusammen gesetzet, alsdann aber habe man die zweite derselben CD um das Stück DE, so kleiner ist als eines dieser Theile, verlängert: so ist so gleich klar, daß die beiden Linien AB und CE sich nun nicht mehr aus solchen Theilen zusammen setzen lassen, aus welchen man die Linien AB und CD zusammen setzen konte. Wolte man aber sagen, man könne sie doch vielleicht aus kleineren Theilen zusammen setzen, so muß man zwar zugestehen, daß dieses zuweilen seyn könne. Denn es kan würklich DE entweder die Helfte, oder der dritte, oder der vierte Theil derjenigen Linie seyn, durch deren Wiederholung man die AB und CD heraus gebracht hat, oder es kan DE $\frac{2}{3}$, oder $\frac{3}{4}$, oder $\frac{2}{5}$, oder etwas dergleichen von derselben Linie

betra-

betragen, in welchen Fällen man allezeit so wohl die Linie DE als auch ein jedes der einander gleichen Theile, aus welchen AB und CD zusammen gesetzet worden ist, wieder in gleiche Theile zertheilen kan, wodurch hernach auch die ganze AB so wohl als die CE in lauter gleiche Theile getheilet wird. Allein es kan auch DE kleiner seyn als eine Helfte eines solchen Theiles der AB, kleiner als ein Drittel, kleiner als ein Viertel, ein Zehentel, ein Tausendtel, ein Milliontausendtel, ja kleiner als ein jeder Bruch, welcher genennet und angegeben werden kan, und dieses zwar, wieviel auch der Theile seyn mögen, welche man der AB anfangs gegeben hat. Und in diesem Fall ist es nicht möglich, daß die beiden Linien AB und CE würklich in Theile getheilet werden, die einander gleich sind, man mag sie vergleichen, wie man wil. Denn wie wil man eine Linie in solche Theile theilen, die kleiner sind, als eine jede Größe, welche auszusprechen ist?

§. 6. Es ist wahr, man kan ein Theilchen als DE, wenn dasselbe kleiner ist als alles so genennet oder gegeben werden kan, in Ansehung einer jeden begreiflichen Größe, AB oder CD, vor nichts halten, ob es zwar an sich selbst etwas ist. Es bedienen sich dieses Begrifs heut zu Tage viele große Männer. Sie nennen dergleichen Theilchen, wenn sie keine bestimte Größe haben, sondern immer kleiner und kleiner genommen werden können, **unendlich kleine Theilchen**, und wenn man diese annimmet, so folget, daß jede zwo gerade Linien sich in gleiche Theile zertheilen lassen. Alsdann aber ist die Rede nicht von einer solchen Theilung, die wir würklich bewerkstelligen können, sondern von einer solchen, die wir nur begreifen, und uns in den Gedanken einbilden.

§. 7. Wir müssen diese Begriffe noch etwas deutlicher aus einander setzen, damit in einer so wichtigen Lehre keine Zweydeutigkeit zurück bleibe. Eine ausgedehnte Größe, dergleichen alle diejenigen sind, welche in der Geometrie betrachtet werden, lässet sich theilen, und die Theile bekommen immer ebenfals ihre Größe, vermöge welcher sie weiter theilbar sind. Man siehet leicht, daß es mit verschiedenen andern Größen eben die Bewantnis haben müsse, als der Zeit, den Gewichten, und dergleichen. Aber es ist nicht von allen Arten der Größen richtig, daß sie sich ohne Ende theilen lassen. Wir haben deren verschiedene, deren Theile ganz bleiben müssen, wenn sie Theile der Größe, von welcher die Rede ist, abgeben sollen, und aufhören Theile derselben zu seyn, so bald sie weiter getheilet werden. Eine dergleichen Größe ist eine Armee, welche wir uns als eine Menge von Leuten vorstellen, die zum Krieg geschickt und geübt sind. Die einfachsten Theile derselben sind die einzeln Soldaten. Die können

freylich nicht weiter getheilet werden, wie man leicht siehet. Mit halben Kerlen ist nicht vieles auszurichten, und kein General hat noch jemals seine Todten mit in die Schlacht-Ordnung gestellet. Es komt also auf den Begrif an, den man sich von der Menge von Leuten machet, die man eine Armee nennet, und in demselben liegt der Grund der Untheilbarkeit der einzelnen Theile, keines weges aber in der Sache selbst. Denn ich darf nur meinen Begrif ändern, so wird jeder dieser Menschen theilbar genug werden. Die Helfte eines Soldaten ist würklich kein Soldat, gleich wie die Helfte einer Uhr keine Uhr ist, indem sie dasjenige nicht leisten kan, so von einer Uhr verlangt wird. Aber in der Helfte einer Uhr ist doch die Helfte der Materie enthalten, welche die ganze Uhr ausmachte. Sehe ich bloß auf diese Materie, und nicht auf die Gestalt, welche man ihren Theilen geben muß, und auf die Zusammensetzung dieser Theile, durch welche sie zu einer Uhr werden: so lässet sich allerdings eine Uhr theilen, und mit dem Körper eines Menschen ist es eben so beschaffen. Im Gegentheil kan man auch von allen Größen, so theilbar auch die Theile derselben seyn mögen, sich Begriffe bilden, vermöge welcher die Theile derselben untheilbar werden. Stelle ich mir eine Stunde als eine Zeit von 60 Minuten vor, so wird eben dadurch die Minute untheilbar, weil, wenn ich sie weiter theile, ich die Stunde nicht mehr aus ihren Minuten, sondern aus den Theilen derselben, zusammen setze. So sind alle ganze Zahlen nicht weiter theilbar, als bis auf ihre einzelne Einheiten, weil sie aufhören ganze Zahlen zu seyn, und zu den gebrochenen übergehen, so bald man die Einheit noch weiter theilet. Keines weges aber sind deswegen die einzelne Einheiten vor sich untheilbar.

§. 8. Daß aber alle ausgedehnte Größen, und verschiedene andere, deren Theile in einem fortgehen, ohne Ende getheilet werden können, ist gar leicht einzusehen. Einige Größen dieser Art sind theilbar, wer kan daran zweifeln, da wir die Sache an einem Werkschuh, an einer Elle, und vielen andern gezeichneten Linien vor Augen sehen. Und die Theile dieser ausgedehnten Größen sind wieder ausgedehnte Größen. Solten also die Theile einer ausgedehnten Größe untheilbar seyn, so muß es ausgedehnte Größen geben, die theilbar sind, und andere, die sich nicht weiter theilen lassen. Welche sind die erstern und welche die letztern? Ich meines Orts treffe bey einer geraden Linie nichts anders an, als was ich bey einer andern antreffe, und begreife nicht, warum sich die eine theilen lassen solte, die andere aber nicht.

§. 9. Vielleicht wird man sagen, es sey falsch, daß die Theile eines

jeden

jeden ausgedehnten Wesen auch selbst ausgedehnt sind, und zu behaupten suchen, man komme endlich durch die Theilung einer dergleichen Größe auf untheilbare Theile. Allein, wenn eine Linie in Theile getheilet werden kan, die ganz und gar keine Ausdehnung haben, so muß sie sich auch aus dergleichen Theilen zusammen setzen lassen: nicht wie eine Armee aus einzelnen Soldaten zusammen gesetzet wird, sondern dergestalt, daß immer ein Theilchen da aufhöret, wo das nächste seinen Anfang nimt. Man kan aber diese Theilchen sich nicht anderst als Puncte vorstellen. Denn wären sie Linien, so wäre ihr Anfang von ihrem Ende entfernet, und man könte sich ein Punct zwischen beiden vorstellen, und eben dadurch eine neue Theilung erhalten. Es können aber zwey Puncte sich nicht berühren ohne daß sie ganz zusammen fallen und zu einem Punct werden. Und thut man das dritte Punct dazu, so fällt es mit dem, so aus den beiden erstern entstanden ist, eben so vollkommen zusammen. Man siehet leicht, daß man dieses auch von dem vierten und allen nachfolgenden sagen müsse, so groß auch ihre Zahl seyn mag.

§. 10. Will man sich bey einem Punct einen Anfang und ein Ende vorstellen, so muß man sagen, daß der Punct sich daselbst endige, wo er anfängt. Alsdenn aber kan man den Anfang eines Puncts nicht an das Ende eines andern setzen, ohne daß auch der Anfang des einen mit dem Anfang des andern zusammen treffe, wodurch allerdings die zween Puncte in eines zusammen fließen. Und daß dieses seine völlige Richtigkeit habe, kan ein Liebhaber der Wahrheit leicht einsehen, wenn er sich nicht einzelne und abgesonderte Puncte vorstellet, sondern solche, mit welchen eine gerade Linie anfängt oder sich endiget. Man nehme so viele gerade Linien als man will, vollkommen von einerley Länge: und lege die zweyte dergestalt auf die erste, daß sie da anfange, wo die erste anfängt. Diese zweite Linie wird sich auch da endigen, wo sich die erste endiget, und die zwo Linien werden ganz in eine zusammen fallen. Nun lege man auf diese Linie die dritte und die vierte, und so weiter, so viel man will, solten es auch Millionen seyn, eben so, wie die zweite auf die erste geleget worden ist. Sie werden alle mit der ersten zusammen fallen, und diese Linie wird dadurch nicht im geringsten länger werden. Dieses aber müste erfolgen, wenn verschiedene Puncte an einander gesetzt eine Länge ausmachen könten. Oder wenn man diese gleiche Linien dergestalt an einander stücken wolte, daß der Anfang der einen mit dem Ende der andern zusammen fiele, so müste dadurch eine Länge herausgebracht werden, die größer ist als die Summe aller zusammen gesetzten Linien. Es ist also würklich widersinnisch zu sagen, daß verschiede-

schie-

schiedene Puncte dergestalt an einander gesetzt werden können, daß daraus eine Länge entstehet. Ist aber dieses, so werden die Theile einer Linie niemals untheilbar, sondern man kan in der Theilung der Theile ohne Ende forttahren; das ist, man ist niemals gezwungen aufzuhören, indem man sich Theile einer Linie vorstellet, und wieder andere, aus welchen die vorigen bestehen, so viel auch dieser Theile in einer noch so kurzen Linie endlich werden mögen.

§. 11. Dieses sey von einer Sache, die jedermann leicht einsehen kan, welcher die Wahrheit ohne Vorurtheil suchet, genug gesagt. Wir kommen nun unserm Vorhaben näher. Wenn eine gegebene gerade Linie in eine beliebige Zahl gleicher Theile getheilet wird, so wird die Größe dieser Theile, wie wir dieses bey der Bruchrechnung und sonst überall als bekant angenommen haben, auch selbst, durch die Größe der getheilten Linie und durch die Zahl der Theile, bestimt. Ein Drittel einer Elle kan nicht größer oder kleiner seyn als das andere. Theilet man die herausgebrachten Theile weiter, so werden sie kleiner, und wenn man dergestalt fortfähret eine Linie, so lang sie auch seyn mag, in gleiche Theile, und diese wieder in andere zu theilen, so komt man endlich auf Theile, welche so klein sind, daß wir sie kaum mehr sehen können; und alsdenn entziehen sich die Theile dieser Theile unserm Gesichte ganz und gar. Wir wollen bey diesen kaum sichtbaren Theilen stehen bleiben.

§. 12. Wir können die Theilchen, welche wir kaum mehr sehen können, vermittelst eines Cirkels oder andern dergleichen Werkzeuges, nicht weiter theilen. Die Ursache aber, daß uns diese würkliche Theilung unmöglich fällt, liegt bloß in unsern Augen, welche zu solchen Kleinigkeiten nicht eingerichtet sind. Ein Thierchen, welches viele Schritte machen muß, wenn es sich um die Breite eines Haares fortbewegen will, theilet diese Breite würklich in Theile, die ihm sehr groß scheinen. Und wir würden selbst die Breite eines Haares noch in viele Theile theilen, und diese durch gezeichnete Puncte von einander absondern können, wenn wir eine Spitze zu machen wüsten, die dazu scharf genug wäre. Denn die zu theilende Breite selbst kan uns ein Vergrößerungsglas groß genug vorstellen.

§. 13. Wenn wir aus solchen fast unsichtbaren Theilen einer Linie eine andere Linie zusammensetzen, so können wir kaum jemals versichert seyn, daß wir nicht um ein solches Theilchen fehlen. Daß er aber in dieser Zusammensetzung nicht einmal um die Helfte oder den vierten Theil eines so kleinen Theilchens fehlen werde, kan gar niemand versprechen, welcher bey dieser Zusammensetzung sich bloß seiner Augen bedienet. Denn einige künstliche

liche Werkzeuge können uns zuweilen etwas, aber nicht viel, weiter bringen. Dergleichen Fehler sind also bey allen Messungen der Längen unvermeidlich. Aber eben deswegen werden sie in den meisten Fällen vor keine Fehler gehalten. Ich will, der Maurer soll mir ein Zimmer machen, das genau 15 Schuh lang und breit ist. Er kan unmöglich versprechen, daß er dieses Maaß vollkommen treffen werde. Aber wenn er auch um einen Finger breit fehlen solte, so wird das Zimmer dadurch weder besser noch schlechter. Ein Acker soll 200 Schuh breit seyn; es fehlet ihm aber hieran die Breite eines Strohhalms; wird er deswegen weniger werth geschätzt? Eigentlich kan man nicht einmal sagen, daß dem Acker diese Breite an 200 Schuhen fehle. Denn da die Gränzen eines Ackers nie so genau bestimmet sind; so ist es auch aus dieser Ursache unmöglich denselben mit einer völligen Richtigkeit zu messen.

§. 14. Indem wir dieses erwegen, bekommen wir einen Begrif von solchen Theilchen einer ausgedehnten oder einer jeden andern Größe, die in einem fortgehet, welche in Ansehung des Ganzen vor Nichts gehalten werden können. Ein solches Theilchen ist nicht ein eigentliches und bloßes **Nichts**. Dieses entstehet nie durch die Theilung einer Größe, so weit man auch in derselben fortgehen mag. Man komt zwar dadurch immer auf kleinere und kleinere Theile; aber niemals auf nichts. Soll nichts übrig bleiben, so muß eine Größe von einer andern, welcher sie vollkommen gleich ist, abgezogen werden. Auf eine andere Art wird dasselbe aus einer gegebenen Größe nie herausgebracht. Wenn man also gewisse Theilchen vor Nichts hält, oder dieselbe auch Nichts nennet, so geschiehet es allezeit in Ansehung derjenigen Größe, deren Begrif einerley bleibt, man mag ihr ein dergleichen Theilchen zusetzen oder nicht.

§. 15. Das Theilchen, welches in Ansehung einer andern Größe vor nichts gehalten werden soll, muß in Ansehung derselben klein seyn, oder es müssen viele solche Theilchen erfordert werden, jene Größe auszumachen. Man kan nicht sagen wie klein; denn dieses kömt auf die besondern Umstände an: doch überhaupt, je kleiner je besser. Ein Pfenning ist nicht in Ansehung eines Dreyers oder eines Groschen nichts. Er ist von dem ersten der dritte und von dem letzten der zwölfte Theil, und also in Absicht auf beyde, noch beträchtlich. Hält man aber einen Pfenning mit tausend Thalern zusammen, so kan er in den meisten Fällen vor nichts gehalten werden, weil in den meisten, wo nicht in allen Auszahlungen, eine Summe Geldes, welche um einen Pfennig weniger ist als tausend Thaler vor voll angenommen wird. Noch vielmehr aber wird ein Pfenning in Ansehung einer Sum-

me von zehen oder hundert tausend Thalern in Handel und Wandel vor nichts gehalten. Von eben der Art ist eine Secunde, und noch vielmehr der zehnte Theil einer Secunde in Ansehung des Lebens eines Menschen. Würde jemand einen zum Tode Verurtheilten eine Wohlthat erweisen, wenn er ihm sein Leben um eine Secunde fristen wolte?

§. 16. So wird der Begrif einer Kleinigkeit, die zwar an sich eine Größe hat, in Ansehung einer andern aber Nichts ist, im gemeinen Leben beständig gebraucht, und wir können nicht anders als demselben gemäß verfahren. Was ich aber hier Kleinigkeiten nenne, sind nicht immer vor sich Kleinigkeiten, sondern in Absicht auf etwas anders. Wie denn nichts vor sich groß oder klein genennet werden kan, sondern man dasselbe immer auf etwas anders beziehet, wenn man es groß oder klein nennet. Denn eine Maus ist groß in Ansehung einer Ameise, oder sehr klein, wenn man sie mit einem Elephanten vergleicht. Es kan also etwas in Ansehung etwas andern sehr groß seyn, und in einer Vergleichung mit etwas noch größern zu Nichts werden. So ist eine Meile in Vergleichung mit der Breite eines Haares eine ungeheure Größe. Vergleicht man aber eine Meile mit der Entfernung der Sonne von uns, so verschwindet sie und wird zu nichts. Und dieses deswegen, weil eine Ausmessung der Entfernung der Sonne von uns, die um eine Meile fehlete, alle den Nutzen leisten würde, welchen eine andere geben könte, die auf ein Haar richtig wäre, und wir nicht im Stande sind bey der einen uns einen andern Begrif zu machen, als bey der andern.

§. 17. Alles dieses hat seine völlige Richtigkeit; aber so wenig uns auch an dem Fehler einer Meile gelegen seyn mag, indem wir nach den Zwischenraum zwischen der Sonne und der Erde fragen, so würde derjenige welcher denselben um eine Meile zu groß oder zu klein angeben wolte, doch würklich fehlen: und wenn zu einer Summe von hundert tausend Thalern ein Pfenning hinzugethan wird, so wird dieselbe dadurch würklich größer, so wenig auch dieser Zuwachs betragen mag. Es scheinet also, daß, ob man zwar diese Begriffe von einer Größe, welche in Ansehung einer andern nichts ist, in denen Wissenschaften, die sich mit sinnlichen Dingen beschäftigen, gar gut und mit vielen Nutzen gebrauchen kan: dieselbe doch in die betrachtende Geometrie, in welcher gar kein Fehler, so gering er auch seyn mag, zugelassen wird, nicht eingeführet werden dürfen. Ein auch noch so kleiner Fehler ist doch immer ein Fehler, welcher vermieden werden muß, wenn man gar nicht fehlen will. Es ist hierwider nicht das geringste einzuwenden, so lange man die Theilchen, die in Ansehung einer andern Größe vor nichts gehalten werden, so annimmet, wie wir sie bisher betrachtet haben. So lan-

lange sie ihre bestimte und begreifliche Größe haben, ist es immer möglich sich den Fehler vorzustellen, welcher dadurch begangen wird, daß man ein solches Theilchen zu dem Ganzen zusetzet, oder davon abziehet, und bey dieser Vorstellung kan derjenige, welcher eine vollkommene Richtigkeit suchet, sich unmöglich zufrieden geben. Eben deswegen haben auch diejenigen, welche diese Begriffe in die Geometrie einzuführen bemühet gewesen sind, denselben noch verschiedenes zusetzen müssen.

§. 18. Man stellet sich erstlich die Theile, welche in Ansehung dieses oder eines andern Ganzen vor Nichts gehalten werden sollen, so klein vor, daß eine ungeheure Zahl solcher Theile erfordert wird, dieses Ganze auszumachen, und behält sich dabey doch noch vor, die Theilchen immer kleiner und kleiner zu machen, und dieses zwar ohne Ende. Durch das erste wird der Fehler, welchen man begehet, indem man ein solches Theilchen zusetzet oder weglässet, vor sich fast undenklich klein; durch das letztere aber wird er immer kleiner und kleiner, und entziehet sich endlich aller menschlichen Einsicht ganz und gar, indem er kleiner wird als eine jede Größe, die wir uns vorstellen können. Wir wollen sehen, wie dieses zugehet.

§. 19. Ich nehme an, daß eine Linie, die ich mir unter A vorstelle, nach diesen Begriffen in Theilchen getheilet werde, deren eins a ist, und setze $A+a=A$, folgends $a=0$. Will jemand sagen, daß ich hierinne fehle, so werde ich ihn bitten, die Größe zu bestimmen oder anzuzeigen, um welche ich fehle. Sagt er, zum Beyspiel, ich fehle um den tausendsten Theil der Größe A, so werde ich antworten: Nein, mein Fehler ist a, welches ich vor ganz und gar nichts halte, ob es zwar an sich etwas, und nur in Ansehung der A nichts ist. Ich nehme aber a kleiner an als den tausendsten Theil von A. Sagt er mein Fehler sey der millionste Theil der A, so werde ich wieder sagen, ich nehme a kleiner an, als diesen Theil, und so immer fort. Ich kan dieses immer mit Recht sagen, weil ich mir vorbehalten habe a so klein zu nehmen, als es mir beliebt. Dadurch muß mein Gegner bald dahin gebracht werden, daß er gestehet, mein Fehler sey kleiner als eine jede Größe, die er selbst oder sonst jemand, anzeigen kan. Und dieses wird mir genug seyn. Denn wolte er weiter sprechen, mein Fehler sey doch etwas, nemlich a, welches ich bloß in Absicht auf die Größe A, und nicht an sich, vor nichts ausgebe: so würde ich endlich sagen, daß da dieses Etwas kleiner ist als alles, so ein Mensch anzeigen kan, auch der Fehler, welchen ich begehe, indem ich setze $A+a=A$, mir von keinen Menschen könne gezeiget werden: und daß alles, was ein Mensch von einem Menschen fodern kan, dieses sey, daß er seine Beweise so führe, daß es keinem an-

andern Menschen möglich ist, die Fehler derselben anzuzeigen. Bey dergleichen Schlüssen verschwindet das Theilchen a endlich ganz. Es entziehet sich meinen Gedanken, und ich kan nicht anders damit umgehen, als ob es ein bloßes Nichts wäre.

§. 20. So richtig aber diese Begriffe an sich sind, so muß man doch gestehen, daß diejenigen, welche sie in die Anfangsgründe der Geometrie einführen wollen, nicht bey allen Beyfall finden. Insonderheit stoßen sich öfters solche Anfänger an denselben, welche gewohnet sind auf alles genau Acht zu haben. Und man kan nicht in Abrede seyn, daß sie sich von der Deutlichkeit, welche in der Geometrie überall herschen soll, einiger maßen entfernen, und die vollkommene Uebereinstimmung aller Theile dieser Wissenschaft durch solche Redensarten aufheben, welche einigen Sätzen derselben zu widersprechen scheinen. Derowegen haben sich auch die Alten, welche nicht die bloße Wahrheit, sondern die augenscheinlichste Wahrheit und eine vollkommene Evidenz in ihren Geometrischen Schriften zum Augenmerke hatten, derselben niemals bedienet. Sie nehmen nichts als möglich an, so nicht wirklich kan bewerkstelliget werden, und nennen also eine Theilung einer geraden Linie niemals möglich, wenn sie nicht zeigen können, wie sie zu verrichten sey. Dieses aber gehet bey einer Theilung ohne Ende nicht an, in diesem Verstande, in welchem das Wort hier genommen wird. Es ist zwar richtig, und wir sehen es aus dem, so gewiesen worden ist, vollkommen ein, daß eine jede gerade Linie in zwey gleiche Theile getheilet werden kan, welche Theile wiederum gerade Linien sind, und daß demnach ein jeder solcher Theile wieder dergestalt getheilet werden könne, und dieses ohne Ende fort, das ist, ohne daß man von der innern Beschaffenheit des Dinges gezwungen wird, jemals aufzuhören, wie dieses zum Exempel geschehen würde, wenn man durch eine dergleichen Theilung endlich auf wirkliche Puncte käme, welche keine Größe und Theile haben, und sich also auch nicht in Theile zertheilen lassen. Allein man kan doch durch eine noch so oft wiederholte Theilung niemals auf unendlich kleine Theile kommen, und wenn man auch seine ganze Lebenszeit anwenden wolte, eine Linie immer fort zu theilen, und so scharfe Sinnen hätte, daß man alle diese Theilungen bey den kleinsten Linien auf das genaueste verrichten könte: so würde doch die Zahl dieser Theile endlich, und weit kleiner seyn, als die Zahl der Zeitsecunden eines menschlichen Alters, und man könte die Größe des kleinsten Theilchens aus der Größe des Ganzen durch einen Bruch bestimmen.

§. 21. Wir wollen uns an diese alten Begriffe, als die leichter und deutlicher sind als diejenigen, so eine unendliche Theilung zum Grunde legen,

gen, vornehmlich halten: und zeigen, wie man sowol solche Größen genau vergleichen soll, welche aus gleichen Theilen zusammen gesetzet sind, als auch die Gründe der Vergleichung derjenigen Größen angeben, bey welchen diese Theilung entweder nicht statt findet, oder doch nicht geschehen ist. Dieser letztern werden diejenige entbehren können, welche annehmen wollen, daß alle Größen von einerley Art aus unendlich kleinen gleichen Theilen zusammen gesetzet werden können, welche einander vollkommen gleich sind.

[*Fig.* 155.] §. 22. Vergleichet man nun zwo Linien A und B mit einander, und bestimmet die Größe der ersten A aus der Größe der andern B alleine, ohne was fremdes anzunehmen; indem man sich einen Begrif von dieser Größe machet, oder denselben auf diese oder jene Art durch Worte oder Zeichen ausdrücket: so saget man, man habe die **Verhältniß** der Linie A gegen die Linie B bestimmet oder ausgedrücket. Eben dieses hat bey allen Größen von einerley Art statt, VI, 3. und man kan hieraus sehen, was das Wort, **Verhältniß**, bedeute, wenigstens so viel zum ersten Anfang genug ist, denn wir werden in dem Verfolg dieser Abhandlung alles deutlicher einsehen. Die beyden Größen welche man mit einander veralcichet, wie hier A und B, heißen die **Glieder** der Verhältniß. Und zwar das **erstere** oder **vorhergehende** Glied, dasjenige, so man zuerst nennet, das **nachfolgende** oder **zweyte** aber, dasjenige, so man jenem nachsetzet.

Welche Verhältnisse einander gleich oder ungleich sind.

[*Fig.* 157. 158.] §. 23. Wenn die Größe der Linie A aus der Größe der Linie B eben so bestimmet wird, wie die Größe der C aus der Größe der Linie D, so saget man, die Verhältniß der A gegen die B sey der Verhältniß der C gegen die D **gleich** oder **ähnlich**, oder jene Verhältniß sey mit dieser **einerley**. Alle diese Redensarten bedeuten eben das. Zum Exempel, wenn A der B gleich ist, und C der D; so wird die Verhältniß der A gegen die B eben dadurch angezeiget, wenn man saget, die A sey der B gleich. Eben so aber und nicht anders wird auch die Verhältniß der C gegen die D bestimmet, und diese beyden Verhältnisse sind demnach einerley oder einander gleich, und ähnlich. Man muß sich in Acht nehmen, aus diesem Exempel zu schließen, daß bey allen gleichen Verhältnissen auch die Glieder gleich seyn müssen, $A = B$, und $C = D$. Dieses ist nicht nothwendig. Die A kan in Ansehung der B eine jede andere Größe

haben, und die Verhältniß der A gegen die B bleibet doch der Verhältniß der C gegen die D gleich, wenn nur die C in Ansehung der D eben die Größe hat.

§. 24. Wenn die Verhältnisse A zu B und C zu D einander gleich sind, und A ist größer als B, so muß auch C größer seyn als D, ist aber A kleiner als B, so muß auch C kleiner seyn als D, und ist A der B gleich, so muß auch C der D gleich seyn. Alles dieses fließet so gleich aus den Begriffen, welche wir gegeben haben, und wir haben uns dabey nicht aufzuhalten.

[*Fig.* 159.] §. 25. Eine jede Größe, welcher die A gleich ist, E zum Exempel, kan an die Stelle des Gliedes A in der Verhältniß A zu B, oder B zu A gesetzet werden, ohne die Verhältniß zu ändern, das ist: wenn A = E, so ist die Verhältniß der A zu B der Verhältniß der E zu B gleich, wie auch die Verhältniß der B zu A gleich der Verhältniß der B zu E. Auch dieses braucht keines Beweises. Weil in der Größe des ersten Gliedes der Verhältniß der A zu B keine Veränderung vorgehet, wenn man an die Stelle der A die ihr gleiche E setzet, so kan auch die Größe des ersten Gliedes in Ansehung des zweyten durch diese Verwechselung der E mit der A nicht verändert werden. Eben so ist es, wenn A die Stelle des zweyten Gliedes vertritt.

[*Fig.* 160.] §. 26. Ob zwo Verhältnisse einander gleich sind oder nicht, siehet man am allerleichtesten, wenn die zweyten oder nachfolgende Glieder derselben einander gleich sind, wie bey den Verhältnissen der 160 Figur, da die Linie B der Linie D gleich genommen worden. Ist in diesem Falle auch das Glied A dem Gliede C gleich, so ist die Verhältniß der A zur B, der Verhältniß der C zur D gewiß gleich. Wie kan in den Größen A und C einige Verschiedenheit statt haben, wenn man sie auf die Größen der B und D beziehet, da so wohl diese B und D, als auch jene A und C einander gleich sind?

§. 27. Sind aber bey der Gleichheit der Glieder B und D die Glieder A und C einander ungleich, so kan die Verhältniß der A zur B, der Verhältniß der C zur D, ohnmöglich gleich seyn. Wie ist es möglich, daß verschiedene Größen A und C, wenn man sie auf einerley Größe B oder D beziehet, einerley seyn solten? Gesetzt, C ist der B oder D gleich, so kan A ohnmöglich eben der B oder D gleich seyn; da sie größer ist als C = B = D. Dieses aber oder etwas dergleichen müste möglich seyn, wenn die A gegen die B = D, eben die Verhältniß haben könte, welche die C gegen eben die B = D hat, ob zwar A der C ungleich ist.

§. 28. In diesem Falle, wenn zwo Verhältnisse A zur B, und C zur D, deren zweyte Glieder B und D einerley Größe haben, ungleich sind, nennet man diejeniae Verhältniß die größere, deren vorhergehendes Glied größer ist, die andere wird die kleinere genennet. In unserer Zeichnung ist A größer als C, und demnach die Verhältniß der A zur B größer als die Verhältniß der C zur D. Eine jede andere Verhältniß, welche der Verhältniß A zur B gleich ist, ist auch größer als die Verhältniß der C zur D. Wie könte sie sonst der Verhältniß der A zur B gleich seyn? Gesetzt, die Verhältniß der E zur F sey der Verhältniß der A zur B gleich, so ist diese Verhältniß der E zur F größer als die Verhältniß der C zur D.

§. 29. Hieraus siehet man, daß, wenn die zweyten Glieder zweyer gleichen Verhältnisse gleich sind, die erstern Glieder derselben ohnmöglich ungleich seyn können, denn wären sie ungleich, so wären auch die Verhältnisse ungleich. Wiederum wenn eine Verhältniß A zur B größer ist als eine andere C zur D, und die zweyten Glieder dieser Verhältnisse sind einander gleich, B=D, so ist das erste Glied der größern Verhältniß, A, größer als das erste der zweyten, C. Denn wäre A=C, so wären auch die Verhältnisse A zur B und C zur D einander gleich, VI, 26. Wäre aber A kleiner als C, so wäre auch die Verhältniß A zur B kleiner als die Verhältniß C zur D, VI, 28. Beydes widerspricht demjenigen so gesetzt wird, daß nemlich die Verhältniß der A zur B größer sey als die Verhältniß der C zur D. Auf eben die Art siehet man ein, daß, wenn die Verhältniß der C zur D kleiner ist, als die Verhältniß der A zu B, und die zweyten Glieder derselben B und D sind einander gleich, auch das erste Glied der kleinern Verhältniß C kleiner seyn müsse als das erste Glied der größern A. Dieses ist in der That von demjenigen, so eben gesaget worden ist, nicht verschieden, und kan gar leicht vor sich eingesehen werden, wenn man sich vorstellet, daß wenn C der A gleich wäre, oder größer als A, auch die Verhältniß der C zur B oder D, der Verhältniß der A zu der B oder D gleich seyn müsse, oder größer als diese, welches demjenigen widerspricht, so gesetzt wird.

[*Fig.* 161.] §. 30. Es ist aber auch in dem Fall nicht schwer zu sagen, welche Verhältnisse einander gleich, oder ungleich seyn, und welche die größere oder kleinere sey, wenn die ersteren Glieder derselben einerley Größe haben. Wir haben dieses in der 161 Figur vorgestellet, da beyden Verhältnissen der A zur B und der C zu D, die Glieder A und C einander gleich sind. Sind in diesem Fall auch die zweyten Glieder B und D einander gleich, so sind auch die Verhältnisse gleich: denn worinne sol-

ten

ten sie verschieden seyn? Sind aber die Glieder B und D ungleich, so sind auch die Verhältnisse ungleich. Denn es ist ohnmöglich, daß die gleichen Größen A und C aus den ungleichen B und D auf einerley Art sollen können bestimmet werden. Es kan B größer seyn als A=C, und D kleiner als A=C. Ist es bey diesem Umstand möglich, daß die kleinere A auf die größere B sich eben so beziehe, wie sich die größere C=A auf die kleinere D beziehet? Dieses aber oder etwas dergleichen müste man zugeben, wenn man setzen wolte, A und C könten einander gleich seyn, und doch gegen die verschiedene Größen B und D einerley Verhältnisse haben.

§. 31. Sind aber bey den ungleichen Verhältnissen A zur B, und C zur D, die ersteren Glieder A, C gleich, und die zweyten B, D ungleich, so ist diejenige Verhältniß die größere, in welcher das zweyte Glied kleiner ist, und wenn die B kleiner ist als die D, so ist die Verhältniß der A zur B größer, als die Verhältniß der C zur D, und diese im Gegentheil ist kleiner als jene. Man kan aber dieses, daß man eine Verhältniß unter den bemerkten Umständen größer oder kleiner nennet, als eine andere, als eine beliebige Redensart ansehen.

[*Fig.* 160. 161.] §. 32. Daß aber diese Redensart mit derjenigen Benennung nicht streite, der wir zuerst VI, 28. erwehnet haben, und daß bey beyderley Umständen eben die Verhältniß größer oder kleiner genennet werde, siehet man ein, wenn man überhaupt bemerket, daß eine Verhältniß A zur B größer genennet werde, als eine andere C zur D, wenn das erste Glied der erstern Verhältniß A in Ansehung des zweyten Gliedes B derselben Verhältniß größer ist, als das erste Glied C der zwoten Verhältniß, in Ansehung des zweyten Gliedes D eben der Verhältniß. Nun kan man nicht nur, wenn B so groß ist als D, und A größer als C, schließen, es sey A in Ansehung der B oder D größer, als C in Ansehung eben der B oder D: sondern man kan auch eben das einsehen, wenn A und C gleich sind, B aber ist kleiner als D. Denn es ist klar, daß einerley Größe A in Ansehung der kleinern B größer seyn müsse, als eben diese A oder C in Ansehung der größern D ist. Ein Pferd ist in Ansehung einer Maus viel größer, als in Ansehung einer Ziege.

§. 33. Hieraus schließen wir wiederum, daß, wenn in zwo gleichen Verhältnissen, A zu B, und C zu D, die ersteren Glieder A und C gleich sind; die zwey letzteren B und D ohnmöglich ungleich seyn können. Denn wäre dieses, so wären auch die Verhältnisse ungleich. Und daß, wenn die Verhältniß A zu B grösser ist als die Verhältniß C zu D, die ersten Glieder aber derselben A und C einander wieder gleich sind, auch B kleiner seyn

müsse

müsse als D. Denn wenn dieses nicht wäre, sondern B wäre so groß als D, so wären die Verhältnisse A zu B und C zu D einander gleich, oder wenn B grösser wäre als D, so wäre die Verhältnis der A zu B kleiner als die Verhältniß der C zu D, VI, 31. Beydes streitet mit demjenigen so angenommen wird.

§. 34. Es können auch Grössen von verschiedener Art gleiche Verhältnisse gegen einander haben. Es hindert nichts, daß ein Gewicht dem andern gleich sey, eben wie eine Länge einer andern gleich ist. Und in diesem Fall verhält sich das erste Gewicht zu dem zweyten, wie die erste Länge zu der zwoten. Es hindert nichts, daß das erste Gewicht in Ansehung des zweyten eben so groß sey, als eine Länge in Ansehung einer andern, in welchem Fall die Verhältnis der Gewichte wiederum der Verhältnis der Längen gleich ist. Aber man kan nicht sagen, daß ein Gewicht, ein Centner zum Exempel, gegen die Länge von einer Meile, sich so verhalte, wie ein anderes Gewicht gegen eine andere Länge. Denn das Gewicht hat gegen die Länge gar keine Verhältnis, VI, 22. Wie groß ist ein Centner in Ansehung einer Meile Weges? Ist der Centner grösser oder kleiner als die Meile, oder ist der Centner der Meile gleich? Welch ungereimte Frage! Dennoch findet man dergleichen Redensarten in Büchern.

[*Fig.* 157. 158.] §. 35. Es können aber auch die vier Grössen A, B, C, D, deren erste zu der zwoten sich verhält, wie die dritte zu der vierten, alle von einerley Art seyn. Ist dieses, so siehet man bloß aus dem gezeigten, daß, wenn die erste A grösser ist als die dritte C, auch die zwote B grösser seyn müsse als die vierte D, und daß, wenn A kleiner ist als C, auch B kleiner seyn müsse als D: woraus man leicht schließen könte, daß, wenn A der C gleich ist, auch B der D gleich seyn müsse, wenn dieses nicht bereits VI, 33. da gewesen wäre.

§. 36. Ist aber A größer als C, so ist nothwendig die Verhältniß der A zur B größer als die Verhältniß der C zur B; denn die größere A hat zu einer jeden Größe, und folgends auch zur B, eine größere Verhältniß, als die kleinere C, VI, 28. Nun wird gesetzt, daß die Verhältniß C zur D der Verhältniß A zur B gleich sey: demnach ist auch die Verhältniß der C zur D größer als die Verhältniß der C zur B. In diesen zwo Verhältnissen C zur D, und C zur B, deren erstere größer ist als die zwote, sind die erstere Glieder C von einerley Größe: also ist D kleiner als B, und folgends B größer als D, VI, 33.

§. 37. Eben so siehet man, daß, wenn A kleiner ist als C, auch nothwendig B kleiner seyn müsse als D, wenn man nemlich wiederum, wie vorher

her setzet, daß die Verhältniß der A zur B, und der C zur D einander gleich seyn. Denn wenn A kleiner ist als C, so ist die Verhältniß der A zur B kleiner als die Verhältniß der C zu eben der B, VI, 27. Da nun wieder die Verhältniß der A zur B der Verhältniß der C zur D gleich gesetzt wird, so ist auch diese Verhältniß der C zu D kleiner als die Verhältniß der C zu B. Und demnach, da die erstern Glieder dieser Verhältnisse C einerley sind, so ist auch das zweyte Glied D der kleinern Verhältniß größer als das zweyte Glied der größern Verhältniß B, und B kleiner als D, VI, 31.

§. 38. Wir können aber diesen Beweiß auch etwas natürlicher fassen. Wir setzen noch, daß die Verhältniß der A zur B der Verhältniß C zur D gleich sey, und daß A größer sey als C. Wolte man nun setzen, daß bey diesen Bedingungen die zwoten Größen B und D einander gleich seyn, so siehet man leicht, daß daraus folgen würde, es sey die erste Verhältniß der A zur B größer als die zwote, VI, 28. welches dem gesetzten widerspricht, und also nicht statt haben kan. Wolte man aber annehmen, daß die B kleiner wäre als die D, so wird dadurch die erste Verhältniß der A zur B noch größer, als die andere C zur D. Denn je kleiner das zweyte Glied einer Verhältniß wird, je größer wird das erste in Ansehung desselben, und je größer wird auch die Verhältniß, VI, 31. Also kan in diesem Falle, wenn A größer ist als C, und B kleiner als D, die Gleichheit der Verhältnisse der A zur B, und der C zur D noch vielweniger statt haben, und bleibet also nichts anders übrig so man sagen könte, als daß auch B größer sey als D. Auf eben die Art kan man auch schließen, daß, wenn A kleiner ist als C, auch B kleiner seyn müsse als D.

Merkmale der Gleichheit der Verhältnisse bey Zahlen und getheilten Größen.

§. 39. Dieses alles konten wir sogleich aus dem Begriffe der Verhältniß, welchen wir gegeben haben herleiten. Das übrige wird ungemein deutlicher, wenn wir die Merkmale der Gleichheit der Verhältnisse, so wohl bey solchen Größen, die aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind, als auch bey solchen, welche man sich nicht dergestalt zusammen gesetzt vorstellet, genauer angeben, zu welcher Betrachtung wir uns also nunmehro wenden wollen.

[*Fig.* 162.] §. 40. Wenn zwo Größen aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind, wie die zwo Linien A und B, da die Theile in A so groß sind als die in B, so beurtheilet man die Größe der ersten A genau

aus

aus der Zahl der Theile, welche in der zweyten dieser Größen B, enthalten sind, und aus der Zahl der gleichen Theile, welche die erstere A ausmachen. Es bleibet nichts zu fragen übrig, wenn man mir saget, B sey in drey gleiche Theile getheilet, und A enthalte fünf dergleichen Theile. So bald ich dieses weiß, so weiß ich die Größe der A in Ansehung der B, und es wird mir die Größe der A auch an sich bekant, so bald man mir die eigentliche Größe der B bekant machet, indem man sie mir nemlich vorleget, oder sonst, wie man kan, anzeiget.

§. 41. Man stellet sich demnach die Verhältniß der A zur B in diesem Falle, wenn diese Linien beyde in gleiche Theile getheilet sind, vor, wenn man die Zahl der gleichen Theile in B anmerket, und sich über dieses bekant macht, wie viele derselben die Linie A ausmachen. Derowegen kan man sagen, die Verhältniß der A zur B sey nichts anders, als die Art und Weise wie A aus der B entstehet, wenn man diese B vor eine Einheit annimmet. Denn hält man B vor Eins, und will aus derselben die A machen, so muß man B in gleiche Theile theilen, aber in solche, aus welchen sich auch A zusammen setzen lässet, und sodann die A aus dergleichen Theilen der B würklich zusammen setzen, I, 10. 11.

§. 42. Alle ganze Zahlen lassen sich auf diese Art aus andern machen, wenn sie aus einerley Einheiten bestehen. Ja da man, wie gleich Anfangs I, 6. erinnert worden ist, bey den Zahlen auf die Größe ihrer Einheiten selten Acht zu haben pfleget, sondern bloß die Vielheit derselben in den Zahlen betrachtet: so kan man sagen, daß überhaupt eine jede Zahl aus einer jeden andern entstehen könne, wenn man jene in gleiche Theile theilet, und aus solchen Theilen die erste Zahl zusammen setzet. Nemlich man darf nur die zwote Zahl in ihre Einheiten theilen, und aus diesen Einheiten die erste Zahl zusammen setzen, so hat man erhalten, was hier verlanget wird. Doch ist es nicht immer nöthig diese Zahlen bis in ihre Einheiten zu zerfällen. Man kan zuweilen bey größern Theilen stehen bleiben. So wird die Zahl 5 aus der Zahl 3, wenn man die letztern 3 in drey gleiche Theile theilet, und fünfe dieser Theile zusammen setzet. Will man aber sechse aus drey machen, so hat man nicht nöthig die drey zu theilen, sondern man kan nur dieselbe zwey mal nehmen, so ist die 6 da. Zwölfe wird aus 8, wenn man achte in zwey gleiche Theile theilet, deren jedes 4 ist, und dieser Theile dreye zusammen nimt.

§. 43. Eben dieses ist auch von den Brüchen zu sagen, die sich auf Einheiten beziehen, welche einerley sind, oder als einerley betrachtet werden. Nur muß man öfters in der Theilung bis selbst auf die Theile der ganzen

Einheit zurück gehen, wenn man eine ganze oder gebrochene Zahl aus einer gebrochenen machen will, gleichwie dieses immer geschehen muß, wenn ein Bruch aus einer ganzen Zahl zu machen ist. So entstehet der Bruch $\frac{3}{7}$ aus $\frac{6}{7}$, wenn man diesen in zwey gleiche Theile theilet, und ein solches Theil annimt; und $\frac{4}{9}$ wird aus $\frac{6}{9}$ herausgebracht, wenn man den dritten Theil des letztern Bruchs, nemlich $\frac{2}{9}$, zweymal nimt. Die Zahl 2 aber erhält man aus dem Bruch $\frac{8}{4}$, wenn man den dritten Theil des Bruchs $\frac{1}{4}$ achtmal nimt, denn $\frac{8}{4}$ ist so viel als 2: und eben so verhält es sich in tausend andern Fällen.

§. 44. Man siehet hieraus, daß in dem Falle, welchen wir hier betrachten, wenn nemlich die Größen A und B aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind, man die Größe der A in Ansehung der B durch einen Bruch ausdrücken könne, welcher sich auf die zwote dieser Größen B, als auf seine Einheit beziehet, und dessen Nenner die Zahl der Theile in B ausdrücket, der Zehler aber anzeiget, wie viele solcher Theile in A enthalten sind. Der Bruch $\frac{5}{3}$ drücket die A aus der B dergestalt aus: er zeiget, daß die B, auf welche man ihn beziehet, und welche als die Einheit angenommen wird, in drey gleiche Theile zu theilen sey, und daß man fünf dieser Theile nehmen müsse, die Linie A zusammen zu setzen. Eben so drücket der Bruch $\frac{7}{5}$ die Größe der Zahl 7 in Ansehung der Zahl 5 aus, weil man würklich die letztere Zahl 5 in fünf gleiche Theile theilen, und dieser Theile sieben zusammen setzen muß, wenn man aus der Zahl 5 die Zahl 7 heraus bringen will.

§. 45. Dieser Bruch, welcher die Verhältniß einer getheilten Größe gegen eine andere, die aus eben so großen Theilen bestehet, so nett ausdrücket, und welcher allezeit zu seinem Nenner die Zahl der Theile der zweyten Größe, auf welche man die erste beziehet, und zu seinem Zehler die Zahl der Theile der ersten Größe hat, die man auf die zweyte beziehet und aus derselben ausdrücket: Dieser Bruch, sage ich, heißet derowegen **der Name** der Verhältniß.

[*Fig.* 163.] §. 46. Zwo Verhältnisse, dergestalt getheilter Größen, sind einander gleich, wenn die erstern Glieder derselben aus den letztern, als aus ihren Einheiten auf einerley Art entstehen: oder wenn man die letztern Glieder beyderseits in gleich viele Theile theilen, und aus einerley Zahl dieser Theile die erstern Glieder zusammen setzen kan: das ist, wenn sie gleiche Namen haben. So ist es mit den Linten der 163 Figur beschaffen, deren erstere A wir auf die zwote B beziehen: und die dritte C auf die vierte D, und uns die Verhältniß der A zur B, wie auch die Verhältniß der C zu der D vorstellen. Wil man die A aus der B machen, so theile man die B in drey gleiche Theile, und setze fünf dieser Theile zusammen, so hat man die A. Auf eben die Art aber entstehet auch die C aus der D. Die D muß

ebenfals in drey gleiche Theile getheilet werden, und man muß dieser Theile 5 zusammen setzen, wenn man C aus D machen wil. In B und D sind gleich viele Theile, wie auch in A und C. Die A wird aus der B durch den Bruch $\frac{5}{3}$ ausgedrücket, welcher sich auf B als die Einheit beziehet, denn A enthält $\frac{5}{3}$ dieser Einheit B. Eben so wird auch C durch den Bruch $\frac{5}{3}$ angezeiget, welchen man auf die Einheit D beziehen muß, von welcher C $\frac{5}{3}$ enthält. Die Namen dieser beyden Verhältnisse A zur B, und C zur D sind einerley, weil sie beyde $\frac{5}{3}$ sind.

§. 47. Im Gegentheil wären die Verhältnisse A zur B, und C zur D ungleich, wenn man A nicht dergestalt aus B machen könte, wie C aus D entstehet. Nemlich, wenn auf C, wie in der Figur, fünf solche Theile gehen, deren drey die D ausmachen, und es gingen auf A nicht fünf, sondern vier oder sechs Drittel der B, oder A bestünde aus etwas mehr oder weniger als $\frac{5}{3}$ der B, so könte die Verhältniß der A zur B, der Verhältniß der C zur D ohnmöglich gleich seyn. In diesem Falle sind auch die Namen der Verhältnisse ungleich. Denn wenn A nicht dergestalt aus der B entstehen kan, wie die C aus der D entstehet, so ist es nicht möglich, die beyden A und C durch einerley Brüche auszudrücken, welche sich auf die Einheiten B und D beziehen. Denn, macht man die Nenner dieser Brüche gleich, welches geschiehet, indem man B in so viele gleiche Theile theilet als D, so werden die Zehler derselben nothwendig ungleich.

§. 48 Man kan also aus der Ungleichheit der Namen zwoer Verhältnisse allezeit auf die Ungleichheit der Verhältnisse selbst schließen. Denn weil, wenn die Verhältnisse gleich sind, auch ihre Namen gleich sind, und im Gegentheil ungleiche Verhältnisse auch ungleiche Namen haben; so folget, daß, wenn die Namen zwoer Verhältnisse ungleich sind, auch die Verhältnisse ungleich seyn müssen. Wären die Verhältnisse nicht ungleich, sondern gleich, so wären auch ihre Namen gleich.

[*Fig.* 164.] §. 49. Und zwar ist iejenige Verhältniß (wir reden noch immer von der Verhältniß solcher Größen, welche aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind), größer als die andere, welche einen größern Namen hat. Denn wenn die Glieder B und D nicht allein gleich viele Theile haben, sondern auch diese Theile einander alle gleich sind, wodurch B so groß wird als D; es beträgt aber A $\frac{5}{3}$ der B, C hingegen weniger, zum Exempel $\frac{4}{3}$ der D, so ist klar, daß auch A größer seyn werde als C. Da nun die größere A gegen eben die B oder D, allezeit eine größere Verhältniß hat, als die kleinere C, VI, 28. so ist leicht einzusehen, daß die Verhältniß der A zur B größer seyn werde, als die Verhältniß der C zur D. Setzet man nun an die Stelle

der vorigen Verhältniß A zur B eine andere, welche ihr gleich ist, nemlich E zur F, so ist auch diese Verhältniß gröſer, als die Verhältniß C zur D. Nun ist der Name der Verhältniß A zur B, dem Namen der Verhältniß E zur F gleich, und demnach der Name der Verhältniß E zur F gröſer als der Name der Verhältniß C zur D. Die Verhältniß also, welche einen gröſern Namen hat, E zur F, ist auch selbst gröſer als die Verhältniß C zur D mit dem kleinern Namen. Und umgekehrt ist die Verhältniß mit dem kleinern Namen C zur D kleiner, als die Verhältniß E zur F, deren Name gröſer ist.

§. 50. Da nun also die Gleichheit oder Ungleichheit zwoer Verhältnisse zwischen Gröſen von dieser Art aus dem Namen derselben jederzeit geschlossen werden kan, und wenn der Name einer Verhältnisse gröſer ist als der Name der andern, die Verhältniß selbst gröſer ist: So darf man, um die Gleichheit zwoer Verhältnisse kurz zu bezeichnen, nur diese Gleichheit ihrer Namen anzeigen. Nun kommet der Name der Verhältniß A zur B allezeit, wenn man die Zahl der gleichen Theile in A durch die Zahl der gleichen Theile in B dividiret, oder welches auf eben das hinaus kommet, wenn man die Zahl der gleichen Theile in A vor den Zehler eines Bruches annimmet, dessen Nenner die Zahl der gleichen Theile in B ist. Und eben so kommet der Name der Verhältniß der C zur D, wenn man die Zahl der gleichen Theile in C, durch die Zahl der gleichen Theile in D theilet, oder aus diesen Zahlen wieder einen Bruch, wie den vorigen, machet. Demnach kan $\frac{A}{B}$ nichts anders als den Namen der Verhältniß der A zur B bedeuten, wenn man sich unter A die Zahl der gleichen Theile in A vorstellet, und unter B die Zahl der gleichen Theile in B: und eben so bedeutet $\frac{C}{D}$ den Namen der Verhältniß der C zur D. Folgends bedeutet $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nichts anders, als daß die Namen der beiden Verhältnisse A zur B und C zur D, gleich seyn, und daß folgends diese Verhältnisse selbst einerley Gröſe haben.

§. 51. Und wenn zween Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{6}{9}$ einander gleich sind, so sind die Namen der Verhältnisse der Zehler zu den Nennern gleich, folgends hat jeder Zehler dieser Brüche gegen seinen Nenner eben die Verhältniß, welche der andre Zehler gegen seinen Nenner hat. Und umgekehret, wenn die Verhältnisse zwoer Zahlen, 2 zur 3 der Verhältniß zwoer andern Zahlen 6 zu 9 gleich ist, so ist auch der Name der ersten Verhältniß $\frac{2}{3}$, dem Namen der zwoten Verhältniß $\frac{6}{9}$ gleich, das ist, die Brüche sind

gleich,

gleich, welche man machet, indem man die ersten Glieder dieser Verhältnisse vor die Zehler, und die zweyten vor die Nenner annimmet.

§. 52. Man könte also die Verhältnisse getheilter Größen eben so bezeichnen, wie die Brüche gezeichnet werden. Es wäre aber dieses im Druck etwas unbequem, weil die Zeilen öfters gebrochen werden müsten. Derowegen hat man noch ein anderes Zeichen der Division angenommen, welches dieses ist (:), und man schreibet vermittelst desselben $\frac{A}{B}$ auch also A:B, daß demnach auch A:B den Namen der Verhältniß A zur B ausdrücket, und A:B = C:D nichts anders bedeuten kan, als daß der Name der Verhältnisse, A zur B, dem Namen der Verhältniß C zur D, und folgends die Verhältnisse A zur B, der Verhältniß C zur D gleich sey. Wir werden uns künftig überall dieser Art zu zeichnen bedienen.

[*Fig.* 162.] §. 53. Alle Verhältnisse gleich getheilter Größen lassen sich durch ganze Zahlen ausdrücken, oder: man kan zwo ganze Zahlen schaffen, welche sich gegen einander verhalten wie A zur B, wenn diese Größen A, B in Theile zertheilet werden können, die einander gleich sind. Diese Zahlen sind allezeit selbst die Zahlen der Theile in A, B, oder andere, welche eben diese Verhältniß gegen einander haben. Die Verhältniß der Größe A zu der Größe B ist der Verhältniß der Zahl 5 zu der Zahl 3 gleich, weil A in fünf und B in drey gleiche Theile zertheilet ist, und über dieses die Theile in A den Theilen der B gleich sind. Es entstehet A aus der B, wie die Zahl 5 aus der Zahl 3 entstehet. Aber man kan auch andere Zahlen schaffen, deren erstere aus der zweyten, wie 5 aus 3 entstehen kan, und wir haben oben I, 103. gewiesen, daß alle Zahlen, welche kommen, wenn man 5 und 3 durch eine beliebig angenommene Zahl multipliciret, diese Eigenschaft haben. Es verhält sich also 5 zu 3, wie 2×5 zu 2×3, das ist, wie 10 zu 6, und eben diese Verhältniß 10:6 drücket auch die Verhältniß A:B aus, wenn man unter A und B die Linien der 162 Figur verstehet, welchen diese Buchstaben beygeschrieben sind.

§. 54. Oder man stelle sich vor, daß man ein jedes Theilchen der A wieder in eine Zahl anderer gleicher Theile theile, und ein jedes Theilchen der B in eben so viele. Man theile zum Exempel ein jedes Theilchen in den beiden Linien A, B wieder in drey gleiche Theile, so ist klar, daß dieselben Theile ebenfals alle gleich seyn werden. Es sind aber nunmehro der Theile in A, 15, und der Theile in B, 9, also verhält sich A zur B nicht nur wie 5 zu 3, sondern auch wie 15 zu 9: und man siehet, daß man

noch

noch ohne Ende andere Zahlen finden könte, welche eben diese Verhältniß A:B ausdrücken.

§. 55. Unter den ganzen Zahlen, welche einerley Verhältniß A:B ausdrücken, sind nothwendig einige größer als andere. Die Verhältniß 5:3 ist der Verhältniß 15:9 gleich. Die Zahl 5 entstehet aus der 3 eben so wie 15 aus der 9 entstehet. Und die Namen dieser Verhältnisse $\frac{5}{3}$ und $\frac{15}{9}$ sind einerley, weil der letzte Bruch keinen andern Werth hat, als der erste, wie man findet, wenn man die Glieder desselben durch 3 theilet. Es entstehet demnach hierbey die Frage, in welchem Falle die Zahlen, welche einerley Verhältniß ausdrücken, die kleineste unter allen sind, die eben diese Verhältniß haben, und wie die größeren Zahlen von eben dieser Verhältniß aus der kleinesten entstehen?

§. 56. Wir können dieses aus demjenigen herleiten, so von den Brüchen gewiesen worden ist. Wenn die Verhältnisse 5:3 und 20:12 gleich sind, so sind auch die Brüche $\frac{5}{3}$ und $\frac{20}{12}$ gleich, und sind die Brüche gleich, so sind auch die Verhältnisse gleich, VI, 51. Ist nun der Bruch durch die kleinesten der Zahlen ausgedrückt, durch welche er sich ausdrücken lässet, so ist auch die Verhältniß des Zehlers zu dem Nenner in den kleinesten Zahlen dargestellet. Es lässet sich aber ein Bruch nicht durch noch kleinere Zahlen ausdrücken, wenn die Glieder desselben sich auf einander wie einfache Zahlen beziehen, II, 105. Also sind auch solche Zahlen, die sich auf einander wie einfache Zahlen beziehen, die kleinesten unter allen, die eben die Verhältniß haben. Aus der Ursache kan die Verhältniß 5:3 nicht durch noch kleinere ganze Zahlen ausgedrücket werden.

[*Fig.* 165.] §. 57. Doch es wird dieses, und was noch hievon zu zeigen ist, ohnfehlbar deutlicher, wenn wir uns an die gegebene Begriffe unmittelbar halten, ohne auf die Bruchrechnung zurück zu gehen. Wir wollen demnach setzen, daß die Verhältniß der Zahl A zu der Zahl B durch andere Zahlen C, D auszudrücken sey, dergestalt, daß die Verhältniß A:B der Verhältniß C:D gleich werde: so muß man A und B in gleiche Theile theilen, wie in der 165 Figur geschehen ist, und so dann der C so viele Theile geben, als die A hat, und der D so viele, als deren in B enthalten sind: alsdenn verhält sich ohnstreitig A zur B, wie sich C zur D verhält. Damit aber die Zahlen C und D von denen zu erst angenommenen A und B verschieden werden; so muß man die Theile dieser Zahlen C und D kleiner oder größer annehmen als die Theile sind, in welche die Zahlen A und B zertheilet worden, wie wir gethan, indem wir vor die Theile der Zahlen C und D die Einheit genommen haben.

§. 58.

§. 58. Ist dieses letztere geschehen, und hat man die Einheit vor den Theil der C und D angenommen, so entstehen die Zahlen A und B aus den Zahlen C und D, wenn man diese letztere Zahlen C und D durch einen der Theile, in welche man A und B zerfället hat, multipliciret; Als in unserer Figur wird A aus C und B aus D, wenn man diese letztere Zahlen durch 2 multipliciret, und im Gegentheil kommen die Zahlen C und D, wenn man die erstere A und B durch eben die Zahl 2 dividiret. Je größer man die Theile der Zahlen A und B annimmet, und je kleiner die Theile sind, aus welchen man die Zahlen C und D zusammen setzet, je kleiner werden auch diese letztere Zahlen C und D. Man kan aber die Theile in C und D nicht kleiner machen als die Einheit, weil C und D ganze Zahlen seyn sollen. Denn wenn man vor einen jeden Theil in A und B einen Bruch in die Zahlen C und D setzen wolte, zum Exempel $\frac{1}{5}$, so würde $C = \frac{4}{5}$ und $D = \frac{3}{5}$, dieses aber wollen wir nicht haben. Wenn man demnach die Zahlen A und B in so große Theile theilet, als nur möglich ist, und setzet vor einen jeden solchen Theil in A die Einheit in C, und vor einen jeden solchen Theil in B die Einheit in D, das ist, wenn man die Zahlen A und B durch den größesten gemeinschaftlichen Theiler dividiret, welchen sie haben können, und bemerket die Quotienten bey C und D, so sind C und D die kleinesten Zahlen, welche eben die Verhältniß ausdrücken die A zur B hat.

[*Fig.* 166.] §. 59. Ist nun aber dieses alles dergestalt geschehen, so beziehen sich die Zahlen C und D nothwendig als einfache Zahlen auf einander, und sie haben keinen andern gemeinschaftlichen Theiler als die Einheit. Denn wenn die Zahlen C und D einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, welcher größer wäre als die Einheit, zum Exempel 2, wie die Zahlen C und D der 166 Figur, da diese Theilung durch die gedoppelten Striche angezeigt ist, so müsten auch die Zahlen A und B sich durch einen gemeinschaftlichen Theiler theilen lassen, welcher in unserm Exempel gedoppelt so groß ist, als der vorige, weil vor eine jede Einheit der Zahlen C und D ein solcher gedoppelter Theil in A und B stehet. Dieses aber widerspricht demjenigen, so gesetzt wird, daß man nemlich die Zahlen A und B mit den grösten Theilern getheilet habe, welcher sie beide theilen konte. Es ist demnach nicht anders möglich, C und D müssen sich als einfache Zahlen auf einander beziehen.

[*fig.* 165.] §. 60. Und ist eine Verhältniß C:D durch zwo Zahlen ausgedrücket, die sich auf einander wie einfache Zahlen beziehen, so kan sie nicht durch andere Zahlen ausgedrücket werden, die sich ebenfals wie einfache Zahlen auf einander beziehen. Denn will man zwo Zahlen A und B

machen, deren erstere A sich zu der zwoten B verhält wie C zur D; so muß man C und D in gleiche Theile theilen. Diese Theile aber sind hier keine andere als die Einheit, weil C und D sich als einfache Zahlen auf einander beziehen. Vor einen jeden Theil in D, das ist, vor eine jede Einheit dieser Zahl, muß man nachhero einen nach Belieben angenommenen Theil, zum Exempel 2, in B setzen, und vor eine jede Einheit, die in C angetroffen wird, eben den Theil 2 in A bringen. Alsdenn verhält sich A zur B, wie C zur D, und man kan auf keine andere Art ganze Zahlen heraus bringen, welche von den Zahlen C und D verschieden sind, und deren Verhältnisse doch der Verhältniß C zur D gleich ist, als auf diese, wie aus dem Begriffe der Verhältniß überflüssig klar ist. Hieraus aber folget, daß alle ganze Zahlen, welche sich gegen einander verhalten wie C zur D, aus der Multiplication dieser zwo Zahlen durch eben die dritte Zahl entstanden sind, wenn C und D sich als einfache Zahlen auf einander beziehen.

§. 61. Demnach sind die Zahlen A und B keine einfache Zahlen, sie beziehen sich auch nicht auf einander als einfache Zahlen, weil sie durch die Multiplication der Zahlen C und D, die sich als einfache Zahlen auf einander beziehen, entstanden sind. Ist es aber nicht möglich, daß einerley Verhältniß durch verschiedene Zahlen ausgedrücket werden solte, die sich auf einander als einfache Zahlen beziehen, so ist noch vielweniger möglich, daß einerley Verhältniß durch verschiedene würklich einfache Zahlen solte können ausgedrücket werden. Denn alle einfache Zahlen beziehen sich auf einander als einfache Zahlen.

§. 62. Man pfleget die Verhältniß solcher Größen, die aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind, durch die Verhältniß der kleinsten Zahlen auszudrücken, durch die sie ausgedrücket werden kan. Man sagt eine Linie, die wir A nennen wollen, verhalte sich zu einer Linie B, wie 2 zu 1, wenn A doppelt so groß ist als B, oder A verhalte sich zu B, wie 3 zu 2, wenn A drey Theile enthält, deren zwey die B ausmachen: oder wenn A sechs Theile hat, deren viere in B enthalten sind. Dasjenige, so wir eben gezeiget haben, giebt uns an die Hand, was dieses vor Zahlen sind, durch welche eine dergleichen Verhältniß ausgedrücket wird. Sie sind entweder einfache Zahlen, oder beziehen sich auf einander als einfache Zahlen, und werden gefunden, wenn man erstlich die Verhältniß A zur B durch beliebige Zahlen ausdrücket; zum Exempel, durch diese 18:12, und alsdenn die Glieder dieser Verhältniß durch den grösten gemeinschaftlichen Theiler theilet, welchen sie haben können. Dieser ist im gegenwärtigen Fall 6, die Verhältniß 18:12 wird, wenn man beyde Glieder durch 6 dividiret, durch die Verhältniß 3:2 ausgedrücket, welche die Verhältniß A:B in den kleinsten Zahlen darstellet.

§. 63.

§. 63. Die Gleichheit zwoer Verhältnisse wird mit einem Wort die **Proportion** genennet, welche also allezeit aus vier Gliedern bestehet, deren erstes sich zu dem zweyten verhält, wie das dritte zu dem vierten. Doch kan auch ein Glied die Stelle von zweyen vertreten, oder es können zwey Glieder einer Proportion einander gleich seyn. Man siehet hieraus leicht, daß A : B = C : D nichts anders bedeuten könne, als daß die vier Größen, die durch die Buchstaben A, B, C, D, bedeutet werden, sie mögen nun Zahlen oder Linien oder was anders seyn, eine Proportion haben, oder, wie man auch anders zu reden pfleget, daß diese Größen A, B, C, D in der Ordnung, in welcher sie stehen, proportional sind, VI, 52.

[*Fig.* 167.] §. 64. Das erste Glied einer Proportion A muß nothwendig mit dem zweyten B von einerley Art seyn, sonst kan es gegen dasselbe keine Verhältniß haben, und das dritte C muß von der Art des vierten D seyn. Es ist aber nicht nothwendig, daß C und D von der Art der Glieder A und B seyn, wiewohl auch nichts hindert, daß dieses nicht ebenfals statt haben könte. Wir haben dieses bereits oben VI, 23. eingesehen, und wiederholen es bloß hier mit andern Worten.

[*Fig* 168.] §. 65. Wenn aber bey einer Proportion eines der Glieder der ersten Verhältniß, zum Exempel B, von der Art eines Gliedes der zwoten Verhältniß, als des C, ist; so sind nothwendig alle vier Glieder von einerley Art. Dieses aber ist gewißlich so, wenn B der C gleich ist. Denn gleiche Dinge können nicht verschiedener Art seyn. Ist nun in der Proportion A : B = C : D das Glied B dem Gliede C gleich, so saget man, die Proportion **gehe in einem fort**, sie sey **steig** oder **zusammenhängend**. Nemlich die Glieder A, B, C, D, das ist (wenn man B vor C, oder C vor B setzet, welches in diesem Falle allezeit geschehen kan,) die Glieder A, B und B, D, oder A, C, und C, D sind in diesem Falle in einer stetigen oder zusammenhängenden Proportion. Man pfleget auch das mittlere Glied B oder C, nur einmal zu nennen, und zu sagen, A, B und D, oder A, C und D seyn in einer zusammenhangenden Proportion, oder auch, die Proportion der Glieder A, B und D, oder A, C und D gehe in einem fort. In welchem Falle man sich einbilden muß, daß das mitlere Glied der Proportion B oder C die Stelle sowohl des zweyten Gliedes der ersten Verhältniß A : B, als auch die Stelle des ersten Gliedes der zwoten C : D vertrete. Es werden aber dergleichen Proportionen nicht anders bezeichnet als die übrigen. Man schreibet A : B = B : D, oder A : C = C : D. Die Gleichheit der mittlern Glieder ist ein genugsames Kennzeichen, daß die Proportion zusammenhange.

§. 66. Es ist also die Richtigkeit einer Proportion einzusehen, überhaupt kein Kennzeichen nöthig, als dasjenige, woraus man die Gleichheit zwoer Verhältnisse schließet; wie dieses bey den getheilten Größen gezeiget worden ist. Wenn nemlich die Proportion $A:B=C:D$ richtig seyn soll, und es ist $A=\frac{n}{m}B$, so muß auch seyn $C=\frac{n}{m}D$, was auch n und m vor Zahlen bedeuten mögen, wenn sie nur beyderseits einerley bedeuten, VI,44. Ja, wenn $A=pB+qB-rB+sB$ und $C=pD+qD-rD+sD$, so ist ebenfals $A:B=C:D$, die Buchstaben p, q, r, s, mögen ganze oder gebrochene Zahlen bedeuten, und es mögen dieser Zahlen so viel seyn als man will. Denn es entstehet in allen diesen Fällen immer A aus B eben so, wie C aus D entstehet, und es ist eins, ob man A auf einmal aus B machet, indem man nimmet $A=\frac{n}{m}B$, oder ob man dieses nach und nach thut, indem man erstlich nimmet pB, zu demselben qB hinzuthut, von der Summe rB abziehet, und zu dem übrig gebliebenen sB, setzet. Wenn man eben dergleichen auch bey der D beobachtet, und dadurch die C herausbringt, so wird auch nunmehro C aus D eben so heraus gebracht, wie A aus B gemacht worden ist. Man kan sich auch vorstellen, daß $p+q-r+s$ den Bruch $\frac{n}{m}$ gleich seyn. Denn man kan würklich jene Zahlen durch die Addition und Subtraction auf eine bringen, welche man durch $\frac{n}{m}$ andeuten kan, sie mag ganz oder gebrochen seyn. Alsdenn aber ist $pB+qB-rB+sB$ nichts anders als $\frac{n}{m}B$, $pD+qD-rD+sD$ aber ist $\frac{n}{m}D$, und das gegenwärtige Zeichen der Proportion komt auf das vorige hinaus.

Merkmale, woraus die Gleichheit der Verhältniß ungetheilter Größen geschlossen wird.

§. 67. Wenn die Größen, welche man mit einander vergleichet, nicht aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind, oder man sie wenigstens nicht aus gleichen Theilen zusammen gesetzt betrachtet, so muß man ein anderes Kennzeichen haben, woraus man die Gleichheit zwoer Verhältnisse, und die Proportion der Glieder die er Verhältnisse schließet, welches wir nunmehro deutlich vorzutragen bemühet seyn werden.

[*Fig.* 169. 170.] §. 68. Gesetzt, es seyn die vier Größen AB, AC, und ab, ac gegeben; und man soll sagen, ob die Verhältniß AC: AB der Verhältniß ac; ab gleich sey oder nicht: so theile man die Größen AB, ab in

eine

eine beliebige Zahl gleicher Theile, welche in unserer Figur fünfe ist, und trage diese Theile auf die verlängerten AB, ab fort, bis man über die Puncte C, c hinaus kommet; wenn nemlich AC, ac gröſser sind als AB, ab, denn sonst ist dieses nicht nöthig. Findet man, daß zwischen A und C eine andere Zahl dieser Theilchen liege, als zwischen a und c, so siehet man so gleich, daß die Verhältniß AC: AB der Verhältniß ac: ab ohnmöglich gleich seyn könne, VI, 47. Findet man aber, daß zwischen A und C eben so viele Theilchen liegen, als zwischen a und c, so ist man zwar nicht gesichert, daß die Proportion AC: AB = ac: ab vollkommen richtig sey, aber so viel weiß man doch, daß die Verhältnisse AC: AB und ac: ab nicht sonderlich ungleich seyn können. Und zwar kommen sie der Gleichheit desto näher, je mehrere Theilchen man der AB gegeben hat, und je kleiner diese Theilchen ausgefallen sind.

§. 69. Will man aber darthun, daß die Verhältnisse AC: AB und ac: ab vollkommen gleich seyn, so muß man zeigen, daß, was von einer Theilung richtig ist, auch bey allen übrigen statt habe, und daß nicht nur, wenn man AB und ab in fünf gleiche Theile theilet, und dergleichen Theilchen aus A nach C, und aus a nach c fort träget, zwischen A und C so viele Theile zu liegen kommen als ihrer zwischen a und c liegen, sondern daß eben dieses erfolge, wenn man AB und ab in 15, in 29, in 377, und mit einem Wort, in so viele gleiche Theile theilet als man will.

§. 70. Man kan dieses auch also ausdrücken: Wenn die Gröſsen AC, AB, ac, ab proportional seyn sollen, und man theilet AB in eine beliebige Zahl gleicher Theile, und ab in eben so viele gleiche Theile, so muß eine jede Zahl der Theile, in welche AB getheilet ist, weniger bringen als AC, wenn eben die Zahl der Theile der ab weniger giebt als ac, und giebt die Zahl der Theile der AB, welche man angenommen hat, eben so viel als AC, so muß auch eben die Zahl der Theile der ab so viel ausmachen als ac. Giebet aber eine nach Belieben angenommene Zahl der Theile, in welche AB getheilet worden, mehr als AC, so muß auch eben die Zahl der Theile der ab mehr betragen als ac. In der 169 Figur ist AB in fünf gleiche Theile getheilet, und ab in eben so viele Theile. Ein Theilchen der AB ist kleiner als AC, und ein Theilchen der ab ist auch kleiner als ac. Zwey Theilchen der AB bringen weniger als AC, und zwey Theilchen der ab bringen auch weniger als ac. Hingegen geben drey Theilchen der AB mehr als AC, und drey Theilchen der ab geben ebenfals mehr als ac. Hieraus schlieſset man, daß die Verhältniß AC: AB von der Verhältniß ac: ab so sonderlich nicht abgehen könne, und wenn eben dergleichen eintrift, man mag

der Theilchen in AB, ab so viele machen als man will, so sind die Verhältnisse AC : AB, und ac : ab würklich gleich. Man kan eben dieses auf den Fall anwenden, wenn die AC, ac größer sind als die AB, ab, welchen die 170 Figur vorstellet.

§. 71. Oder noch anders. Wenn man der AB eine beliebige Zahl gleicher Theile giebt, und die ab in eben so viele gleiche Theile theilet, eben diese Theile aber, so oft es nöthig ist, von B, b weiter über C, c forträget, und findet, daß die Punete C, c zwischen gleichnahmige Theilungspuncte fallen, die nemlich von dem Anfange der Linien A, a um einerley Zahl von Theilchen ab stehen, und dieses trift beständig zu, wie viele Theile man auch den Linien AB, ab geben mag: so kan man sicher schließen, daß die Verhältniß AC : AB der Verhältniß ac : ab gleich, und die Proportion AC : AB = ac : ab richtig sey.

§. 72. In der That folget aus diesen Kennzeichen nichts anders, als daß man sich die angegebene Proportion AC : AB = ac : ab nicht als unrichtig vorstellen könne. Wenn, nachdem man AB und ab in gleichviele gleiche Theile getheilet hat, man fände, daß die AC aus mehr oder wenigern Theilen der AB bestehe, als die ac Theile der ab enthält, so wäre man versichert, daß die angegebene Proportion unrichtig sey, man möchte den Größen AB oder ab diese oder eine andere Zahl der Theile gegeben haben. Wenn also gezeiget wird, daß keine Theilung der AB und ab in einerley Zahl von gleichen Theilen möglich sey, bey welcher die AC mehr oder weniger dergleichen Theile der AB bekömt, als Theile der ab die ac ausmachen, so wird in der That dadurch nichts anders erwiesen als daß man sich vergeblich bemühen würde, zu zeigen, daß die Verhältnis AC : AB der Verhältniß ac : ab ungleich sey: oder daß es einem jeden Menschen unmöglich sey, diese Ungleichheit darzuthun. Dieses aber ist eben so viel gesagt, als alle Menschen müssen, bey den öfters wiederhohlten Umständen, die Proportion vor richtig halten: ja nicht nur alle Menschen, sondern auch alle denkende Wesen überhaupt. Kan man aber mehr verlangen, und wird nicht dadurch die Richtigkeit der Proportion aufs bündigste erwiesen?

§. 73. Wenn man wieder $\frac{n}{m}$ AB einen jeden Bruch der AB, und $\frac{n}{m}$ ab einen Bruch der ab, welcher jenem gleich ist, bedeuten läst, zum Exempel $\frac{2}{3}$ oder $\frac{5}{4}$ oder $\frac{21}{56}$ oder was man sonst will: So werden noch eben diese Begriffe ausgedrückt, wenn man saget, die Proportion AC : AB = ac : ab habe ihre Richtigkeit, wenn bey einer jeden Bedeutung, die man den

Buch-

Buchstaben m, n geben mag, fals $\frac{n}{m}$ AB größer ist als AC, auch zugleich $\frac{n}{m}$ ab größer wird als ac: und fals $\frac{n}{m}$ AB kleiner ist als AC, auch zugleich $\frac{n}{m}$ ab kleiner ist, als ac: und fals $\frac{n}{m}$ AB so groß ist als AC, auch zugleich $\frac{n}{m}$ ab so groß ist als ac. Man erwege alles genau, so wird man finden, daß dieser Ausdruck nichts anders bedeuten könne, als was vorher mit Worten vorgetragen worden ist.

§. 74. Dieses ist das Merkmal, woraus die Alten die Proportion geschlossen haben: Sie trugen aber dasselbe etwas anders vor, vielleicht weil sie die Brüche vermeiden wolten. Wenn $\frac{n}{m}$AB größer ist als AC, so ist auch nAB größer als mAC. Denn diese Größen nAB und mAC entstehen, wenn man die erstern $\frac{n}{m}$ AB und AC beyderseits durch die Zahl m multipliciret; I, 150. und wenn man zwo Größen durch einerley Zahl multipliciret, so entstehet aus der Multiplication der größeren allezeit was Größeres, als aus der Multiplication des Kleineren. Aus eben der Ursache ist nAB kleiner als mAC, wenn $\frac{n}{m}$ AB kleiner ist als AC, und nAB $=m$ AC, wenn $\frac{n}{m}$AB$=$AC. Man kan aber auch umgekehret schließen, von nAB$=m$AC auf $\frac{n}{m}$AB$=$AC, und so bey den übrigen: also sind diese zwo Arten sich auszudrücken, im Grunde einerley. Diesem zufolge kan man sagen, daß, wenn nAB größer ist als mAC, und zugleich $n$ab größer als $m$ac; oder wenn nAB kleiner ist, als mAC, und zugleich $n$ab kleiner als $m$ac, oder wenn nAB$=m$AC, und zugleich $n$ab$=m$ac, so sind die Größen AC, AB, ac, ab proportional. Das ist, wenn man vier Größen hat AC, AB, ac, ab und man findet, daß, wenn man die erste AC und dritte ac mit einer beliebigen Zahl m und die zwote AB wie auch die vierte ab durch eine ebenfals nach Belieben angenommene Zahl n multipliciret, niemals mAC größer werde als nAB, wenn nicht auch $m$ac größer wird als $n$ab, oder kleiner, wenn nicht auch $m$ac kleiner wird als $n$ab, oder der nAB gleich, wenn nicht auch $m$ac der $n$ab gleich wird: so sind die vier Größen AC, AB, ac, ab proportional. Auf diese Art haben die Alten das Kennzeichen der Proportion vorgetragen: Doch werden wir uns des erstern Ausdrucks durch Brüche VI, 73. lieber bedienen.

[*Fig.* 171.] §. 75. Es kan uns nicht aufhalten, daß hiebey angenommen werden muß, es könne eine jede Größe, dergleichen die Linien AB,

AB, ab sind, in eine beliebige Zahl gleicher Theile getheilet werden. Denn daß dieses geschehen könne, ist an sich selbst klar, und muste in der Rechenkunst überall zum Grunde geleget werden. Von geraden Linien aber, mit welchen wir hier meist umgehen, haben wir IV, 196. gewiesen, auf was Art ihre Theilung möglich sey. Man kan daraus leicht die Anweisung herleiten, wie diese Theilung würklich zu verrichten ist. Es sey AB in der 171 Figur in fünf gleiche Theile zu theilen. Man ziehe durch A eine beliebige Linie, ohne ihr Ende zu bestimmen, und trage auf dieselbe von A an eine Linie von beliebiger Länge fünf mal. Dadurch wird die ganze Linie AC aus fünf gleichen Theilen zusammen gesetzet. Man ziehe BC von dem Ende dieser Linie, an das Ende der vorigen AB, welche man theilen sol: und durch alle Theilungspuncte der AC ziehe man mit dieser BC Parallellinien. Diese werden die AB in fünf gleiche Theile theilen. Denn wenn man auch durch A die Linie AD den übrigen parallel ziehet, so siehet man, daß AB zwischen den äußersten der Parallellinien liege, welche AC in fünf gleiche Theile theilen. Demnach wird AB ebenfals in fünf gleiche Theile getheilet, und eben so kan man eine jede andere gerade Linie in fünf oder so viele gleiche Theile theilen, als aufgegeben wird.

§. 76. Die nachfolgende Betrachtungen können noch vieles zur Erleuterung der Proportionen beytragen, indem sie, was bisher gesagt worden ist, kurz zusammen fassen, und uns dasselbe in einem deutlichen Satz vorstellen, dessen Anwendung auf dasjenige, so noch gezeigt werden muß, gar leicht ist. Es gründen sich dieselben unmittelbar auf die Art und Weise, wie die Größen erzeuget werden.

[*Fig.* 169. 170.] §. 77. Gleichwie eine Linie AB durch die Bewegung eines Puncts A entstehet, und nach und nach anwächset indem Dieses Punct von A nach B fortgehet: so können auch alle Größen, welche, wie die Linien ohne Absatz in einem fortgehen, durch die Bewegung einer andern Größe, oder, ein anderes anhaltendes Wachsthum, hervor gebracht werden. Dieses Wachsthum aber kan auf verschiedene besondere Arten eingerichtet seyn, welche man sich am deutlichsten vorstellen kan, wenn man zwo Linien annimmet, AB und ab und diese aus gleichen Theilen zusammen setzet. Ich setze AB werde durch die Bewegung des Puncts A, und ab durch die Bewegung des Puncts a, erzeuget und nach und nach vergrößert; So kan dieses Wachsthum dergestalt eingerichtet seyn, daß, indem durch die Bewegung des A der erste Theil der AB erzeuget wird, auch zugleich durch die Bewegung des a der erste Theil der ab entstehet: und daß, indem diese Puncte fortfahren sich zu bewegen, auch die zweiten Theile die-

di[illegible]r Linien AB und ab, von den Puncten A und a gerechnet, mit einander zugleich entstehen, und so die dritten, die vierten, und alle nachfolgende. Man kan auch annehmen, daß eben dieses bey einer jeden andern Theilung der Linien AB und ab richtig sey, man mag nun die vorigen Theilchen derselben noch weiter theilen, oder denen ganzen Linien eine ganz andre Zahl von gleichen Theilen geben. Wird dieses alles angenommen, so entstehen die beiden Linien durch ein **gleichförmiges Wachsthum**. Wird aber der erste Theil der Linie AB erzeuget, indem der erste Theil der ab entstehet, hernach aber der zweite Theil der AB nicht mit dem zweiten Theil der ab hervor gebracht, sondern eher oder später, und so die übrigen, so ist das Wachsthum der Linien nicht gleichförmig. Wir werden uns nur bey dem gleichförmigen Wachsthum aufhalten, und haben mit dem, so nicht gleichförmig ist, hier nichts zu schaffen. Man siehet aber leicht, daß jede zwo gerade Linien durch ein gleichförmiges Wachsthum zugleich entstehen können, sie mögen gleich oder ungleich seyn, wie man will.

§. 78. Wenn nun die zwo Linien AB, und ab in der 169 Zeichnung durch ein gleichförmiges Wachsthum zugleich entstanden sind; und die Theile derselben AC, ac sind durch eben dieses Wachsthum zugleich entstanden, so verhält sich AC zur AB wie sich ac zur ab verhält, und die Proportion AC : AB = ac : ab hat ihre Richtigkeit. Man siehet dieses leicht, wenn man die Linien AB, ab beide nach einerley Zahl in gleiche Theile theilet. Denn man mag diese Zahl annehmen wie man will, so müssen immer die Puncte C und c in gleichnahmige Theilchen, und zwischen gleichnahmige Theilungspuncte fallen. Als, wenn C in das dritte Theilchen der AB, von A an gerechnet, fällt, so muß auch c in das dritte Theilchen der ab, von a an gerechnet, fallen: und so in allen übrigen Eintheilungen. Wäre dieses nicht, so könte man eben daraus schließen, daß entweder die Linien AB und ab nicht gleichförmig angewachsen, oder daß, wenn man sich vorstellt, daß diese Linien durch ein gleichförmiges Wachsthum zugleich entstanden sind, man doch nicht annehmen könne, daß die Theile derselben AC und ac zugleich erzeuget worden seyn. Daraus aber, daß C und c bey einer jeden solchen Theilung der AB und ab in gleichnahmige Theile fallen, folget die Proportion AC : AB = ac : ab nach dem VI, 71. angemerkten Satz.

§. 79. Eben so ist es auch in dem Fall, welchen die 170 Zeichnung vorstellet, da wieder die Linien AB und ab von A und a an gleichförmig angewachsen und mit einander zugleich entstanden sind; indem sie aber dergestalt zu wachsen fortgefahren, zugleich die Größen AC und ac erreichet haben.

ben. Wenn man auch hier die beyden Linien in einerley nach Belieben anzunehmende Zahl von gleichen Theilen theilet, und diese Theilchen so weit es nöthig ist, auf die zu dem Ende verlängerte Linie fortsetzet; so müssen auch nunmehro die Puncte C und c immer zwischen gleichnahmige Theilungspuncte, und in Theilchen fallen, zwischen welchen und den Puncten A und a in beyden Linien AC und ac einerley Zahl von Theilchen liegt. Also ist nach eben den Satz VI, 71. auch hier AC:AB=ac:ab.

§. 80. Man kan aber auch umgekehrt schließen, daß, wenn die Proportion AC:AB=ac:ab richtig, und also die Verhältniß AC:AB dieser andern ac:ab würklich gleich ist, und man stellet sich vor, daß die zwo Linien AB und ab ihre Größe zugleich erhalten haben, indem sie beyde gleichförmig angewachsen sind, auch die Linien AC und ac zugleich haben entstehen müssen, wenn nemlich in dem Fall, wenn AC größer ist als AB, und folgends ac größer als ab, die Linien AB und ab fortfahren mit einander gleichförmig anzuwachsen, bis sie diese Größen der AC und ac erreichet haben. Denn gesetzt, es wäre, indem das Punct A die AB beschrieben hat, zwar das Punct a in ab angelanget, indem aber A die AC beschrieben hat, hätte das andere Punct a nicht die ac sondern eine andere Linie beschrieben, die größer oder kleiner ist als ac, ohngeachtet sich die Puncte dergestalt beweget haben, daß dadurch die beyden Linien ACB und acb oder ABC und abc gleichförmig haben anwachsen müssen: und man nennet die Linie, welche von dem a beschrieben worden ist, indem A die AC beschrieben hat, L, so ist AC:AB=L:ab, wie eben gewiesen worden ist, also keines weges AC:AB=ac:ab, welches doch angenommen wird.

§. 81. Die Regeln der Proportionen, welche aus diesen Begriffen hergeleitet werden, sind allgemein, weil der Beweis, der von ungetheilten Größen gegeben wird, ohnfehlbar auch von denen getheilten richtig seyn muß: und wir könten also auf diese allgemeinere Begriffe allein bauen. Doch wollen wir größerer Deutlichkeit halber, diese Beweise auch insbesondere auf solche Größen einrichten, welche aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind; welche diejenigen vor allgemein annehmen können, die sich alle Größen, als aus gleichen Theilen zusammen gesetzt, vorstellen, indem sie diese Theile, wenn die Zusammensetzung nicht anders geschehen kan, von unendlicher Kleinigkeit annehmen.

§. 82. Wir werden uns bey diesen Beweisen und sonst zuweilen des Zeichens ▷ bedienen, welches, wenn man es zwischen die Buchstaben setzet, welche gewisse Größen andeuten, allezeit bedeutet, daß diejenige Größe, welche an der Spitze des Zeichens bezeichnet ist, kleiner sey als die andere,

dere, welche ihr entgegen stehet. $A \rhd B$, oder $B \lhd A$ bedeutet es sey die Größe, welche B bedeutet, kleiner als diejenige, welche der Buchstab A anzeiget, oder es sey die A größer als B. Wir werden auch zuweilen schreiben, wenn $A \rhd = \lhd a$, so ist auch $B \rhd = \lhd b$, wodurch wir anzeigen wollen, daß, wenn A größer ist als a, so sey auch B größer als b, und wenn A der a gleich ist, so sey auch B der b gleich, und wenn A kleiner ist als a, so sey auch B kleiner als b.

§. 83. Was die Beweise selbst anlanget, zu welchen wir uns nunmehro wenden, so betreffen dieselbe gewisse Regeln, vermittelst welcher man aus einer Verhältniß auf andere schließen, und aus einer oder etlichen Proportionen, andere herleiten kan, welche allezeit richtig sind, wenn die ersten ihre Richtigkeit haben. Sie sind von ungemeinen Nutzen und müssen vollkommen bekant seyn. Dieses ist eben die Ursache, warum wir den Leser so lange bey dieser Sache aufhalten, und uns bemühen alles aus den Gründen herzuleiten.

Regeln zur Verwandelung der Proportionen. Die erste.

[*F.* 169. 170.] §. 84. Die erste dieser Regeln ist so natürlich und so leicht, daß sie kaum eines Beweises bedarf. Wenn die vier Größen AC, AB und ac, ab proportional sind, und folgends $AC : AB = ac : ab$; so sind sie auch verkehrt gesetzt proportional, und der Satz, welchen diese Zeichnung ausdrücket, $AB : AC = ab : ac$, ist ebenfals richtig. Denn diese beyden Sätze $AC : AB = ac : ab$ und $AB : AC = ab : ac$ zeigen nichts anders an, als daß sowol AB und ab, als auch AC und ac durch einerley gleichförmiges Wachsthum zugleich entstanden sind, VI, 80. Ist nun der erste Satz $AC : AB = ac : ab$ wahr; so muß auch der andere Satz $AB : AC = ab : ac$ richtig seyn, welcher eben das, und nichts anders, ausdrücket.

[*Fig.* 163.] §. 85. Bedeuten die Buchstaben A, B, C, D die getheilten Größen der 163 Figur, und ist $A : B = C : D$, so siehet man eben so leicht, daß auch diese Proportion $B : A = D : C$ richtig sey, wenn man sich der Gründe bedienen will, die wir von der Proportion solcher Größen insbesondere angegeben haben, VI, 46. Die Größen B und D bestehen aus gleich vielen Theilen, und in A sind so viele Theile als in C. Also kan man sich auch vorstellen, daß A und C in eine gleiche Zahl Theile getheilet seyn, und daß man aus gleichen Zahlen dieser Theile B und D zusammen gesetzt habe, die B nemlich aus den Theilen der A und die D aus den Theilen der C. Wenn man aber die Sache auf der Seite betrachtet, so muß man sagen, es verhält sich B zur A, wie D zur C. Doch wem ist es unbekant, daß, wenn A

in Ansehung der B eben so groß ist, als C in Ansehung der D, auch wiederum B in Ansehung der A so groß seyn werde als D in Ansehung der C. Dieses aber und nichts anders will man sagen, wenn man angiebt, daß sich die Glieder zwoer gleichen Verhältnisse versetzen lassen, die zweyten in die Stelle der ersten, und die ersten in die Stelle der zweyten, ohne daß dadurch die Gleichheit der Verhältnisse oder die Proportion aufhöre.

Die zweyte Regel.

[*Fig. 172.*] §. 86. Die zweyte Regel, welche verschiedene besondere Fälle unter sich begreifet, ist diese. Man setzet, daß in der 172 Figur, die Verhältniß AB:CD der Verhältniß ab:cd gleich sey, wie auch daß BC:CD = bc:cd. Diese Bedingungen sind wohl zu bemerken. Die hintern Glieder dieser Verhältnisse CD und cd, sind gleich, die vordern Glieder aber können verschieden seyn. Damit dieses desto deutlicher in die Augen fallen möge, wollen wir diese Proportionen unter einander setzen:

AB:CD = ab:cd
BC:CD = bc:cd.

Man mache die Summe der zweyen ersten Glieder der Verhältnisse AB + BC, wie auch ab + bc, und setze diese Summe an die Stelle der ersten Glieder in einer neuen Proportion, mit Beybehaltung der hintern Glieder, dergestalt, AB + BC:CD = ab + bc:cd. Diese Proportion wird richtig seyn.

§. 87. Man kan die Wahrheit aller dieser Sätze mit Zahlen versuchen; und ob es zwar keinen vollständigen Beweiß giebet, wenn die Zahlen eintreffen, weil man glauben kan, daß dieses von ohngefehr geschehe: so dienen doch dergleichen Versuche, die Sätze selbst besser einzusehen, und sich zu überführen, daß man sie eingesehen habe. Zum gegenwärtigen Falle dienen alle Proportionalzahlen, wenn die letztern Glieder der Verhältnisse einerley sind, zum Exempel diese:

5 : 2 = 10 : 4
7 : 2 = 14 : 4

Nach dem Satze verhält 7 + 5, das ist 12 zu 2, wie 10 + 14, das ist 24 zu 4, und man siehet leicht, daß dieses richtig sey.

[*Fig. 163.*] §. 88. Auch hat der Beweis bey Zahlen oder getheilten Größen nicht die geringste Schwierigkeit. Man stelle sich eine solche Verhältniß unter dieser Zeichnung vor, $nA : mA = nB : mB$, wie man allezeit thun kan. Es bedeutet nemlich n die Zahl der Theile in den vorherge-

hen-

henden zweyen Gliedern der Verhältnisse, welche in der 163 Zeichnung 5 ist, A bedeutet einen Theil der Glieder der ersten Verhältniß, und B einen der Theile, aus welchen die Glieder der zweyten Verhältniß bestehen, m aber die Zahl der Theile, welche in den nachfolgenden Gliedern der Verhältnisse enthalten sind, die in der Zeichnung 3 ist. Man nehme noch eine andere Proportion, in welcher die ersten Glieder der Verhältnisse von beliebiger Größe seyn können, die zweyten aber mit den vorigen einerley sind, und aus eben so vielen Theilen bestehen als jene. Diese Proportion sey $sA : mA = sB : mB$. Wenn man nun diese Proportionen unter einander zeichnet,

$$nA : mA = nB : mB,$$

$$sA : mA = sB : mB,$$ und wie der Satz lehret, die Glieder zusammen setzet, so bekomt man $nA + sA : mA = nB + sB : mB$. Es ist aber leicht einzusehen, daß diese Proportion richtig sey. Denn die zweyten Glieder mA, mB derselben haben einerley Zahlen von Theilen m, und die ersten Glieder ebenfals. Die Zahl der Theile A in dem ersten Glied $nA + sA$ ist $n + s$, und eben so groß ist auch die Zahl der Theile B in dem dritten Gliede $nB + sB$.

§. 89. Dieser Beweiß ist allgemein, ob wol in demselben angenommen wird, daß die hintern Glieder der beyden Verhältnisse nicht allein einander gleich, sondern auch in gleich viele Theile getheilet sind, deren Zahl m anzeiget. Denn wenn in den zwo Proportionen

$$E : F = G : H$$

und $$K : F = L : H$$

die Glieder F und H zum Beyspiel in 5 Theile getheilet werden müssen, wenn man aus den Theilen derselben E und G zusammen setzen will, und in 7, damit K und L aus diesen Theilen zusammen gesetzt werden können: so theile man jedes Theilchen in F und H, wie auch jedes Theilchen in E und G in der ersten Proportion in 7 gleiche Theile; wodurch die hintern Glieder F und H, die vorher 5 Theilchen hatten, deren nunmehro 5×7 oder 35 erhalten werden. In der zweyten Proportion aber theile man jedes Theilchen in F und H, wie auch jedes Theilchen in K und L in 5 gleiche Theile. Dadurch bekommen die hintern Glieder F und H wieder 35 Theile. Und wenn man sich diese Zahl unter den Buchstaben m vorstellet, die übrigen Buchstaben n und s aber die Zahlen der Theile bedeuten lässt, die durch diese neue Eintheilung in die vordern Glieder gebracht werden: so kan man allerdings die zwo Proportionen also ausdrücken:

$$nA : mA = nB : mB$$

$$sA : mA = sB : mB,$$

und hieraus dergestalt schließen, wie würklich geschehen ist.

[Fig. 172.] §. 90. Will man aber sich den Beweis allgemein, und dergestalt vorstellen, daß er auch auf die ungetheilten Größen angewendet werden kan, so muß man wieder die 172 Figur vor sich nehmen und erwegen, daß dadurch, daß gesetzt wird, es sey die Verhältniß AB : CD der Verhältniß ab: cd gleich, auch gesetzt werde, es seyn AB und ab, wie auch CD und cd durch einerley gleichförmiges Wachsthum zugleich entstanden, VI,80. Eben so wird auch durch die zweyte Proportion BC : CD = bc : cd gesetzt, daß das Wachsthum, durch welches die beyden Größen BC, bc zugleich entstanden sind, gleichförmig, und eben dasjenige sey, durch welches die zwo CD, cd zugleich entstanden sind. Hieraus aber folget, daß auch das Wachsthum, durch welches die ganze AC entstanden ist, demjenigen, durch welches die ac entstanden, gleichförmig, und eben dasjenige sey, durch welches CD und cd zugleich erzeugt worden sind, und daß die ersten dieser Linien AC und ac zugleich angewachsen. Demnach ist allerdings AC : CD = ac : cd. VI, 78. 79.

§. 91. Es begreifet dieser Satz verschiedene andere in sich, welche man als besondere Proportionsregeln ansehen kan. Vor allen Dingen sehen wir, daß er nicht von zwoen Proportionen allein richtig sey, sondern von so vielen als man will. Der Satz lässet sich dergestalt ausdrücken:

Wenn A : B = C : D, und
E : B = F : D,

so ist A + E : B = C + F : D. Man kan diesen Schluß nunmehro als einen bekanten Satz annehmen, und außer dem setzen, G : B = H : D, so folget aus beyden, es sey auch A + E + G : B = C + F + H : D, und wenn man diesem wieder die Proportion J : B = K : D beysetzet, so kan man aus beyden ferner die nachstehende schließen, A + E + G + J : B = C + F + H + K : D, und so immer fort. Man muß demnach sagen, daß, wenn man so viele Proportionen annimmet, als man annehmen wil, deren hintere Glieder von einerley Größe sind, sich allezeit die Summe aller ersten Glieder zu dem zweyten verhalten werde, wie sich die Summe der dritten Glieder aller dieser Verhältnisse zu dem vierten verhält. Aus den Proportionen

A : B = C : D
E : B = F : D
G : B = H : D
J : B = K : D kan man allezeit schließen A + E + G + J : B = C + F + H + K : D, es mögen der angenommenen oder gegebenen Proportionen so viele seyn als man will.

§. 92. Es verstehet sich, ohne daß wir es erinnern, daß die Richtigkeit der Proportionen, aus welchen eine neue sol geschlossen werden, erst zu erweisen sey, ehe man aus denselben schließet. Im nachfolgenden Falle ist nur die erstere Proportion zu erweisen,

A:B=C:D und

B:B=D:D, denn die andere ist überall richtig. Hieraus aber folget, wie beständig, A+B:B=C+D:D. Weil also diese Folge bey einer jeden Proportion gemacht werden kan, ohne etwas weiter zum Grunde zu setzen: So kan man sagen, daß bey einer jeden Proportion A:B=C:D sich die Summe der zwey ersten Glieder A+B zu dem zweyten Gliede B verhalte, wie die Summe der zwey letzteren Glieder C+D, sich zu dem letzten Gliede D, verhält. Weil aber auch die Glieder einer Proportion sich also versetzen lassen, daß die hintern die vordern und die vordern die hintern werden, dergestalt B:A=D:C, und dem ohngeachtet die Proportion A+B:B=C+D:D richtig bleiben muß; so verhält sich auch in einer jeden Proportion die Summe des ersten und zweiten Gliedes, zu dem ersten, wie die Summe des dritten und vierten, zu dem dritten. So ist zum Exempel 3:2=6:4, folgends 3+2:2=6+4:4, oder 5:2=10:4, wie auch 5:3=10:6.

§. 93. Wiederum wenn A:B=C:D, so kan man diese Proportion wiederholen, und so oft setzen, als man wil.

A:B=C:D
A:B=C:D
A:B=C:D. Hieraus folget wieder nach dem allgemeinen Satze A+A+A:B=C+C+C:D, das ist in unserm Falle 3A:B=3C:D. Und weil man die Proportion so oft wiederholen kan als man will, oder so oft, als viele Einheiten in der Zahl, die wir uns unter dem Buchstaben n vorstellen, enthalten sind, so kan man überhaupt sagen, wenn A:B=C:D, so sey auch nA:B=nC:D. Das ist, wenn man das erste und das dritte Glied einer Proportion durch einerley ganze Zahl multiplicirt, so wird dadurch die Proportion selbst nicht aufgehoben. Nemlich die Verhältniß nA; B ist freylich größer als die Verhältniß A:B, aber bey dem allen ist die Verhältniß nA:B der Verhältniß nC:D gleich, gleichwie die Verhältniß A:B der Verhältniß C:D gleich ist. Die Verhältniß 3:2 ist der Verhältniß 6:4 gleich; multipliciret man die ersten Glieder dieser Verhältnisse durch 4, so wird auch 12:2=24:4.

§. 94. Und da sich bey einer jeden Proportion die Glieder versetzen lassen, das zweyte in die Stelle des ersten, und das vierte in die Stelle

des

des dritten VI, 84. so siehet man leicht, daß, was von dem ersten und dritten Gliede einer Proportion erwiesen worden ist, auch von dem zweiten und vierten gelten müsse. Nemlich überhaupt, wenn man setzet:

B:A=D:C
B:E=D:F
B:G=D:H, so ist auch B:A+E+G=D:C+F+H, VI, 91. Und in einer jeden Proportion B:A=D:C ist B:A+B=D:D+C VI, 92. wie auch B:nA=D:nC VI, 93.

§. 95. Setzet man aber die beyden letzteren Sätze zusammen und erweget, daß in einer jeden Proportion man so wohl das erste und das dritte, als auch das zweyte und vierte Glied durch einerley Zahl multipliciren könne, ohne die Proportion aufzuheben; so siehet man auch, daß, wenn man beides zugleich thut, und so wohl das erste und dritte, als auch das zweyte und vierte Glied einer Proportion, durch einerley Zahl multipliciret, die Proportion dennoch bleibe. Wenn man also hat A:B=C:D, so ist allezeit nA:mB=nC:mD, was auch n und m vor Zahlen bedeuten mögen.

§. 96. Wenn die Proportion A:B=C:D richtig ist, und man setzet zu einem dieser Glieder, welches man annehmen will, etwas hinzu, so groß oder so klein es auch seyn mag, welches wir E nennen wollen, so können die Verhältnisse A:B und C:D+E ohnmöglich gleich seyn. Denn dasjenige Glied, welchem etwas zugesetzet worden, ist nach Proportion zu groß, eben deswegen, weil die Proportion ohne diesen Zusatz richtig war. Wenn man nun die Glieder dieser verdorbenen Proportion eben so durch die Zahlen m und n multipliciret, wie wir in dem vorhergehenden Satze gethan haben, und schreibet nA:mB und nC:mD+mE, so sind diese Verhältnisse wieder nicht gleich, weil die Proportion nA:mB=nC:mD richtig ist, und dem vierten Gliede derselben mE zugesetzet worden. Es folget hieraus, daß, wenn zwo Verhältnisse ungleich sind, und man multipliciret ihre vorhergehende und nachfolgende Glieder durch einerley Zahlen n, m, ohnmöglich gleiche Verhältnisse kommen können. Denn man kan alle ungleiche Verhältnisse ansehen, als ob sie aus gleichen Verhältnissen entstanden wären, in dem einem Gliede der gleichen Verhältnisse etwas zugesetzet worden ist.

§. 97. Hieraus aber folget weiter, daß, wenn die Proportion A:B=C:D richtig ist, und man dividiret das erste und dritte Glied derselben durch einerley Zahl 3 oder n, oder das zweyte und vierte durch die Zahl 2 oder eine jede andere m, auch die Proportion $\frac{1}{3}$A:$\frac{1}{2}$B=$\frac{1}{3}$C:$\frac{1}{2}$B richtig seyn werde. Denn man multiplicire wieder das erste und dritte Glied durch die Zahl

3 durch welche man sie vorher dividiret hatte, und das zweyte und vierte durch die Zahl 2, nach welcher diese Glieder getheilet worden sind: so kommet A:B=C:D wiederum, und man weiß zum voraus, daß die Proportion der Größen, welche durch diese Multiplication entstanden sind, richtig sey, weil nemlich dieses eben die Proportion ist, die zuerst angenommen worden war. Da nun aber durch eine dergleichen Multiplication ohnmöglich eine richtige Proportion kommen kan, wenn nicht auch die Proportion richtig ist, deren Glieder man dergestalt multipliciret, VI, 96. so muß man schließen, daß die Proportion $\frac{1}{3}$A:$\frac{1}{2}$B=$\frac{1}{3}$C:$\frac{1}{2}$B, oder überhaupt $\frac{1}{n}$A:$\frac{1}{m}$B=$\frac{1}{n}$C:$\frac{1}{m}$D allerdings richtig sey, wenn die Proportion A:B=C:D richtig ist.

[*Fig.* 172.] §. 98. Was dergestalt von von der Addition gezeiget worden, ist auch von der Subtraction richtig, und man kan dasjenige, was von dieser Art die Proportion zu ändern zu sagen ist, noch mit dem vorigen unter eine allgemeine Regel bringen. Wenn die Proportion AC:CD=ac:cd richtig ist, aber auch diese: AB:CD=ab:cd, und die zweyten Glieder dieser Proportionen CD, cd sind wieder beiderseits einerley. Die ersten, und dritten aber sind, wenn man will, verschieden; so ist auch diese Proportion richtig: AC—AB:CD=ac—ab:cd, oder BC:CD=bc:cd. Die vordern Glieder BC, bc dieser Proportion sind der Unterschied der vordern Glieder der vorigen Proportionen AC, AB, und ac, ab, die hintern Glieder der vorigen Proportionen aber sind an ihren Stellen geblieben. So ist es bey den Zahlen:

5:4=15:12.

3:4=9:12, die Proportion 5—3:4=15—9:12, oder 2:4=6:12 hat ihre Richtigkeit.

§. 99. Der Beweiß dieses Satzes ist bey Zahlen, oder solchen Größen, welche aus gleichen Theilen zusammen gesetzet sind, mit dem vorigen, welchen wir bey der Addition gebrauchet haben, IV, 88. meist einerley. Es sey nA:mA=nB:mB, und sA:mA=sB:mB. Die Zahl aber, welche s bedeutet, sey kleiner als die Zahl n, und folgends sA $\prec$ nA, und sB $\prec$ nB. Man ziehe die kleineren Glieder von den größern ab, so werden die Unterschiede nA—sA, und nB—sB, oder n—s.A, n—s.B. Man siehet aber leicht VI, 46. daß die Proportion n—s A:mA=n—s.B:mB richtig sey. Denn die nachfolgenden Glieder mA, mB bestehen aus der Zahl m der Theile A und B, und die vorhergehenden Glieder nA—sA, nB—sB

sind beide aus der Zahl $n-s$ eben dieser Theile A und B in der gehörigen Ordnung zusammen gesetzet.

§. 100. Es ist aber auch der allgemeine Beweiß von dem vorigen gar wenig unterschieden. Weil die Verhältniß AC:CD der Verhältniß ac:cd gleich ist, so kan man sich vorstellen, daß AC mit ac, und CD mit cd durch einerley gleichförmiges Wachsthum zugleich entstanden sind. Und weil über dieses AB:CD=ab:cd, so sind auch AB und ab, wie auch CD und cd durch eben das gleichförmige Wachsthum zugleich erzeuget worden. Aus beiden siehet man sogleich, daß durch eben das gleichförmige Wachsthum, durch welches CD und cd zugleich entstanden sind, auch BC mit der bc zugleich habe entstehen müssen. Es ist also BC:CD=bc:cd.

§. 101. Man kan hieraus wieder schließen, daß wenn man eine Proportion hat A:B=C:D und die letztern Glieder der Verhältnisse B und D sind kleiner als die erstern, man auch werde sagen können A—B:B=C—D:D, oder B—A:B=D—C:D, wenn die letztern Glieder größer sind als die erstern. Denn es ist allezeit B:B=D:D. Wenn man nun zum Grunde setzet A:B=C:D, und schließet aus diesen beiden Verhältnissen, nach dem allgemeinen Satze so bekommet man allerdings A—B:B=C—D:D, oder B—A:B=D—C:D. Es sey 6:2=12:4, so ist nach dem Satz 6—2:2=12—4:4, das ist 4:2=8:4, die Richtigkeit aber dieser Proportion ist leicht einzusehen.

§. 102. Versetzet man die Glieder dieser Verhältnisse, und schreibet B:A=D:C, so bekommet man eine neue Regel, welche von der vorigen kaum unterschieden ist, nemlich diese B—A:A=D—C:C, oder A—B:A=C—D:C. Es verhält sich also überhaupt der Unterschied der Glieder der ersten Verhältniß, zu dem zweiten (oder ersten) dieser Glieder, wie sich der Unterschied der Glieder der zweiten Verhältniß zu dem zweiten (oder ersten) dieser Glieder verhält. Denn die vordern Glieder der Proportion A:B=C:D sind die hintern Glieder dieser andern B:A=D:C.

§. 103. Weil also bey den Bedingungen, welche hier angenommen werden, weder die Addition noch die Subtraction der vorhergehenden Glieder der Verhältnisse die Proportion ändert, so folget, daß wenn man hat.

A:B=C:D, und
E:B=G:D, und
H:B=J:D, und so weiter wenn man will, und setzet sodann die erstern Glieder mit ihren Zeichen zusammen, oder subtrahiret einige der in zwo gleichen Verhältnissen vorhergehenden Glieder, als E und G, von

G, von der Summe der übrigen; es folget, sage ich, daß auch die Proportion A—E+H:B=C—G+J:D richtig seyn werde.

§. 104 Setzet man aber die zwo Regeln VI, 92. 98. zusammen, so bringt man aus der Proportion A:B=C:D auch diese heraus, A+B:A—B=C+D:C—D, oder A+B:B—A=C+D:D—C, nachdem die hintern oder die vordern Glieder in den angenommenen Verhältnissen die größern sind. Denn vermittelst der erstern dieser Regel wird aus der angenommenen Proportion A+B:A=C+D:C, wie auch A+B:B=C+D:D. Verwechselt man nun die Glieder dieser Proportionen so, daß die hintern die vordern werden, und setzet sie alsdann unter einander:

A:A+B=C:C+D

B:A+B=D:C+D, so siehet man so gleich, daß man vermittelst der letztern Regel VI, 98. werde schließen können, A—B:A+B=C—D:C+D, oder B—A:A+B=D—C:C+D. Hieraus aber entstehet die Proportion, deren Richtigkeit erwiesen werden solte, wenn man nur die Glieder in verkehrter Ordnung letzet. Es verhält sich also in einer jeden Proportion die Summe des ersten und zweiten Gliedes, zu dem Unterschied dieser Glieder, wie sich die Summe des dritten und vierten Gliedes, zu dem Unterschied dieser Glieder verhält. Also wird aus der Proportion 8:3=24:9 diese 8+3:8—3=24+9:24—9, das ist 11:5=33:15 herausgebracht.

Die dritte Regel.

[*Fig.* 173. 174.] §. 105. Die dritte Proportionsregel, nach unserer Einrichtung, ist nicht schwerer einzusehen, als die zweyte. Es ist angemerket worden, daß, wenn man die zweyten Glieder zweyer gleichen Verhältnisse in gleich viele gleiche Theile theilet, und diese Theile fort träget, bis sie die erstern Glieder der Verhältnisse übertreffen, die äußerste Gränzen dieser erstern Glieder immer zwischen gleichnahmigte Theilungspuncte fallen müssen, wie viel auch der Theilchen in den hintern Gliedern der Verhältnisse seyn mögen: und daß hinwiederum, wenn das letzte geschiehet, auf die Gleichheit der Verhältnisse zu schließen sey, VI, 68. Hierauf wollen wir unsern gegenwärtigen Beweis gründen. Es sey die Verhältniß AC:AB der Verhältniß ac:ab gleich; man setze die ersten Glieder dieser Verhältniß zusammen, und mache AC+ac, man setze auch die zweyten Glieder eben dieser Verhältniß zusammen, und mache AB+ab. Die Verhältniß der ersten Summe gegen die letzte AC+ac:AB+ab wird der Verhältniß AC:AB

oder der Verhältniß ac:ab gleich seyn. Dieses ist unsere dritte Regel, welche aber noch etwas zu erweitern seyn wird, und wieder verschiedene besondere Regeln unter sich begreifet. Man siehet leicht, daß hier AC und ac, und folgends auch AB und ab Größen von einerley Art seyn müssen, weil sie sich sonst nicht zusammen setzen ließen.

§. 106. Den Beweis einzusehen, theile man die zweyten Glieder der gleichen Verhältnisse AC : AB, und ac:ab, nemlich AB und ab in eine beliebige Zahl gleicher Theile, und wenn die ersten Glieder AC, ac größer sind als die zweyten, wie in der 173 Figur, so trage man die Theilchen der AB, ab fort, bis man AD, ad erhalten, welche die AC, ac unmittelbar übertreffen: so fallen die Puncte C, c zwischen solche Theilungspuncte der AD, ad, welche von A, a an um eine gleiche Zahl von Theilchen entfernet sind. In der 173 Figur fället C in das fünfte Theilchen der AD, und c in das fünfte Theilchen der ad und in der 174 Zeichnung liegt C sowol als c in dem dritten Theilchen der AB oder ab, und dergleichen geschiehet immer, man mag der AB und der ab so viele Theilchen geben als man will. Nun setze man erstlich AB und ab zusammen, aber um die Sache, welche wir erweisen sollen, einzusehen, verfahre man in dieser Zusammensetzung auf eine besondere Art. Weil nemlich in AB so viele Theilchen sind als in ab, so setze man immer einen Theil der AB zu einem Theile der ab, und mache auf die Art wieder gleiche Theile, deren jedes die Summe ist eines Theilchens der AB und eines Theilchens der ab. Aus diesen Theilchen setze man die Größe EF zusammen, welche demnach alle Theilchen der AB, zusamt allen Theilchen der ab enthalten, und in so viele gleiche Theile abgetheilet seyn wird, als viele Theile in AB oder in ab sind. Man trage ferner die übrigen Theilchen der AD, ad aus F auf eben die Art weiter fort, bis man EH erhält, welche so groß seyn wird als AD + ad. Nun mache man EG der Summe AC + ac gleich; so siehet man leicht, daß, gleichwie in der 173 Zeichnung das Punct G nothwendig in das fünfte Theilchen der EH fallen muß, da C in das fünfte Theilchen der AD und c in das fünfte Theilchen der ad fällt: also überhaupt bey einer jeden andern Theilung das Punct G zwischen solche Theilungspuncte der EH fallen werde, welche denjenigen gleichnahmig sind, zwischen welche C in AD, und c in ad fällt. Demnach ist die Verhältniß EG:EF, das ist AC + ac : AB + ab der Verhältniß AC:AB, oder der Verhältniß ac : ab gleich.

§. 107. Wenn man diesem Beweise etwas nachdenket, so findet man bald, daß er sich auch vor die Subtraction schicke: wenigstens kan man dadurch auf die Gedanken kommen, daß, wenn die Verhältniß EG:EF

der

der Verhältniß AC.: AB gleich ist, und man subtrahiret die kleinern Glieder dieser Verhältnisse von den größern, in der Ordnung in welcher sie stehen, und machet EG — AC, und EF — AB, die Verhältniß dieser Ueberbleibseln EG — AC : EF — AB einer jeden der vorigen Verhältnisse EG : EF, und AC : AB, gleich seyn werde. Und so ist es auch, wie man finden wird, wenn man sich die Sache umständlich vorstellet.

§. 108. Denn man theile EF in eine beliebige Zahl gleicher Theile, und gebe der AB eben so viele Theile. Man setze die Theilchen der EF, wenn es nöthig ist, fort, bis man EH bekomt, welche unmittelbar größer ist als EG, und eben dieses thue man auch bey AD; so bekommen EH und AD eine gleiche Zahl von Theilen, VI, 68. und die Puncte G und C fallen zwischen gleichnamige Theilungspuncte. Nun subtrahire man einen jeden Theil der AB von einem jeden Theile der EF, den ersten von dem ersten, den zweyten von dem zweyten, und so fort, und aus den gleichen Ueberbleibseln setze man die Größe ab zusammen, welche demnach so viele gleiche Theile haben wird, als EF oder AB. Eben diese Größe ab aber wird auch der Unterscheid seyn der beyden Größen EF und AB, weil sie entstanden ist, indem man alle Theile der kleinern von allen Theilen der größern abgezogen worden sind. Man fahre in dieser Arbeit weiter fort, (wenn nemlich, wie in der 173 Figur EG größer ist als EF, sonst hat man dieses nicht nöthig) und mache auf eben die Art ad = EH — AD, und ac = EG — AC, so siehet man wieder, daß ad so viele Theile bekommet als deren in EH oder AD anzutreffen sind, und daß c zwischen diejenige Theilungspuncte fällt, welche von a um so viele Theilchen entfernet sind, als viele der Theilchen sind, um welche die Theilungspuncte, zwischen welchen G lieget von E, oder die Theilungspuncte, zwischen welchen C lieget, von A entfernet sind. Demnach ist die Verhältniß ac : ab der Verhältniß AC : AB, oder der Verhältniß EG : EF gleich. Und da ac = EG — AC, und ab = EF — AB, so ist die Verhältniß EG — AC : EF — AB von der Verhältniß EG : EF oder AC : AB niemals verschieden, wenn die erste dieser Verhältnisse EG : EF der zweyten AC : AB, gleich ist.

§. 109. Man siehet leicht, daß diese Beweise, wie sie da stehen, ohne überflüssige Weitläuftigkeit, auch auf die Verhältniß solcher Größen angewendet werden können, welche aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind. In diesem Falle können die Puncte C und D, c und d, wie auch G und H zusammen fallen, das übrige aber bleibet einerley. Will man sich etwas anders ausdrücken, so kan man den Beweis von dergleichen Größen auch folgendergestalt fassen. Die Verhältniß nA : mA ist der Verhältniß nB : mB,

mB gleich, und alle gleiche Verhältnisse solcher Größen die aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind, lassen sich dergestalt ausdrücken. Man setze die erstern wie auch die letztern Glieder dieser Verhältnisse zusammen, und mache $nA+nB$, wie auch $mA+mB$. So siehet man daß $nA+nB$ so viel sey als $n.A+B$, und heraus komme, wenn man die Summe der Theile $A+B$ durch die Zahl n multipliciret. Und eben so ist $mA+mB=m.A+B$. Stellet man sich nun die Verhältniß $n.A+B : m.A+B$ vor, so siehet man ferner, daß dieselbe der Verhältniß $nA : mA$ oder $nB : mB$ gleich sey, weil in allen diesen Verhältnissen einerley Größe A oder B, oder $A+B$ durch die Zahl n multipliciret worden ist, um das erste Glied zu erhalten, und durch m das zweyte Glied herauszubringen, VI, 46. Eben so siehet man, daß die Verhältniß $nA-nB : mA-mB$, das ist $n.A-B : m.A-B$ von der Verhältniß $nA : mA$, oder $nB : mB$ nicht verschieden sey.

§. 110. Am allerleichtesten aber siehet man die Richtigkeit dieser Regel ein, wenn man wieder auf das gleichförmige Wachsthum zurück gehet. Wenn die Verhältniß $A:B$ der Verhältniß $C:D$ gleich ist, und also die Proportion $A:B=C:D$ ihre Richtigkeit hat: so sind A und C wie auch B und D durch einerley gleichförmiges Wachsthum zugleich entstanden VI, 80. Hat man hierauf acht, so siehet man alsobald, daß auch A und C zusammen, das ist $A+C$ durch eben das gleichförmige Wachsthum mit der $B+D$ zugleich habe entstehen müssen. Also ist $A+C:B+D=A:B=C:D$, VI, 78. 79. Nicht schwerer ist es einzusehen, daß auch $A-C$ und $B-D$ durch eben das gleichförmige Wachsthum, durch welches A mit C und B mit D zugleich entstanden sind, zugleich haben entstehen müssen. Also ist auch $A-C:B-D=A:B=C:D$.

§. 111. Zum Exempel: die Verhältniß $9:3$ ist der Verhältniß $6:2$ gleich. Addiret man die Glieder dieser Verhältnisse in der Ordnung, so kommet die Verhältniß $15:5$, von welcher leicht zu sehen ist, daß sie jeder der vorigen gleich sey; weil in allen diesen Verhältnissen das erste Glied dreymal so groß ist als das zweyte. Subtrahiret man aber die kleinern Glieder von den größern; so komt die Verhältniß $3:1$, welche ebenfals der gegebenen gleich ist.

§. 112. Also verändert weder die Addition der Glieder gleicher Verhältnisse, noch die Subtraction derselben, die Verhältniß. Es ist dieses genugsam erwiesen, wenn man nur zwo gleiche Verhältnisse annimmet. Daß es aber auch mit so vielen gleichen Verhältnissen angehe, als man annehmen will, siehet man daraus, weil, wenn die Verhältniß nicht verändert wird, wenn man die Glieder zwoer gleicher Verhältnisse dergestalt zusam-

men

men setzet, sie auch nicht verändert werden kan, wenn man die Glieder der dritten Verhältniß, welche den vorigen gleich ist, zu der Summe der Glieder setzet, welche dergestalt herausgebracht worden sind. Eben dieses ist auch zu sagen, wenn man sich anstatt der Addition der Subtraction bedienet. Die Sache wird am deutlichsten, wenn wir sie durch Zahlen erläutern. Es sey $6:3=4:2=8:4=14:7$. Setzet man die Glieder der ersten zwo gleichen Verhältnisse $6:3$ und $4:2$ zusammen, so komt die Verhältniß $10:5$, welche von der ersten oder von der zwoten, und folgends auch von der dritten $8:4$ nicht verschieden ist. Wenn man demnach die Glieder dieser dritten Verhältniß $8:4$ von den Gliedern der Verhältniß $10:5$, welche wir dergestalt heraus gebracht haben, abziehet, so komt die Verhältniß $2:1$, welche noch der vorigen, und folgends auch der vierten Verhältniß $14:7$ gleich ist, deren Glieder sich demnach wieder zu den Gliedern dieser letzten Verhältniß addiren, oder von denselben subtrahiren lassen, ohne daß in der Verhältniß etwas geändert werde. Es sind demnach die Verhältnisse $16:8$ und $12:6$ noch mit einer jeden der gegebenen einerley.

§. 113. Eben so ist es auch, wenn man setzet, $A:a=B:b=C:c=D:d$, und machet $A+B+C+D:a+b+c+d$, oder $A-B+C-D:a-b+c-d$, oder verknüpfet sonst die ersten Glieder A, B, C, D mit den Zeichen + und − wie man wil, und giebet den letztern Gliedern eben dieser Verhältnisse a, b, c, d, welche zu den erstern gehören, eben die Zeichen. Es ist allezeit $A+B+C+D:a+b+c+d=A+B-C-D:a+b-c-d=A-B+C+D:a-b+c+d=A:a=B:b$, und so fort.

§. 114. Hieraus ist zu schließen, daß, wenn man setzet, $A:a=A:a=A:a$, und so ferner, so oft als man will, die Verhältniß $A+A:a+a$, oder $A+A+A:a+a+a$, das ist, $2A:2a$, oder $3A:3a$, oder $4A:4a$, und so überhaupt $nA:na$ von der Verhältniß $A:a$ nicht verschieden seyn werde. Es sind hier die Glieder der Verhältniß $A:a$ durch einerley ganze Zahl n multipliciret worden: man kan demnach sagen, daß, wenn man zwo Größen A und a durch einerley ganze Zahl n multipliciret, die Verhältniß der multiplicirten Größen $nA:na$ mit der Verhältniß der Größen selbst $A:a$ einerley seyn werde. So ist bey Zahlen die Verhältniß $3:2$ der Verhältniß $4\times3:4\times2$ oder $12:8$ gleich. Wir haben dieses bereits bey der Multiplication gesehen, I, 103. und angemerket, daß 3 aus 2 eben so entstehe, wie das Product 3×4 oder 4×3 aus dem Producte 2×4 oder 4×2 entstehet.

§. 115. Hieraus aber schließen wir ferner, daß auch die Division zwoer Größen A, B durch einerley ganze Zahl m die Verhältniß nicht ändern könne, sondern daß die Verhältniß $A:B$ der Verhältniß $\frac{1}{m}A:\frac{1}{m}B$ gleich sey,

was

was auch m vor eine ganze Zahl bedeutet. Denn man nehme die Verhältniß $\frac{1}{m}A : \frac{1}{m}B$ zuerst an, und multiplicire beyde Glieder derselben durch die Zahl m. Wir wissen schon, daß dadurch die Verhältniß nicht geändert werde, es komt aber durch diese Multiplication nichts anders als A und B. Denn weil in $\frac{1}{m}A$ die Größe A in Theilchen getheilet ist, deren Zahl m vorstellet, so kommet das ganze A wiederum, wenn man ein solches Theilchen so oft nimt, als oft die Einheit in der Zahl m enthalten ist, das ist, wenn man $\frac{1}{m}A$ durch m multipliciret. Eben so ist es mit $\frac{1}{m}B$. Demnach ist $\frac{1}{m}A : \frac{1}{m}B = A:B$. Als $3:2=6:4$, da die erstern Zahlen kommen, wenn man die letztern durch 2 theilet. Dieses ist schon oben VI, 58. berühret worden, als wir gewiesen, wie man ein Verhältniß, die in Zahlen gegeben ist, durch die kleinste Zahlen ausdrücken soll, welche dieselbe ausdrücken können.

§. 116. Und hieraus folget weiter, daß auch die Verhältniß $\frac{n}{m}A : \frac{n}{m}B$ der Verhältniß $A:B$ gleich seyn müsse. Denn es wird $\frac{n}{m}A$ aus A, wenn man A durch die Zahl n multipliciret, und das Product durch m dividiret; und eben so wird $\frac{n}{m}B$ aus B. Da nun aber weder die Multiplication noch die Division der Größen A, B durch einerley Zahl die Verhältniß $A:B$ ändert, so muß auch diese Verhältniß ungeändert bleiben, wenn man diese Größen A, B beyde erstlich durch n multipliciret, und sodann das Product durch m dividiret. So ist es bey den Zahlen $\frac{2}{3}12$ ist $=8$, und $\frac{2}{3}9$ ist $=6$, und 12 verhält sich zu 9, wie 8 zu 6. Der Name der einen dieser Verhältnisse so wohl als der andern ist $\frac{4}{3}$.

Die vierte Regel.

§. 117. Aus diesem letzten Satze schließen wir nun die vierte Proportionsregel, welche ist, daß bey einer jeden Proportion man die zwey mittlern Glieder versetzen könne, das zweyte in die Stelle des dritten, und das dritte in die Stelle des zweyten, ohne die Proportion aufzuheben. Wenn die Proportion $A:B=C:D$ richtig ist, so ist auch allezeit diese Proportion richtig, $A:C=B:D$. Man siehet leicht, daß hier zum Grunde geleget werde, die Größen A und C seyn von einerley Art. Wäre dieses nicht, so hätten sie gar keine Verhältniß gegen einander, VI, 34. und man könte also nicht im rechten und eigentlichen Verstande sagen, es verhalte sich A zur C, wie B zur D. Sind aber die Größen A und C von einerley Art,

so

so sind alle vier Größen A, B, C, D von einerley Art. Denn A und B, wie auch C und D sind gewiß von einerley Art.

§. 118. Die Richtigkeit aber der Satzes schließen wir folgender gestalt. Es sey $A:B=C:D$, so ist auch $A:B=\frac{n}{m}C:\frac{n}{m}D$, wie wir letztens VI, 116. gesehen haben. Nun haben wir oben angemerket, daß, wenn das erste Glied einer Proportion größer ist als das dritte, auch das zweyte größer sey als das vierte, und daß, wenn das erste Glied dem dritten gleich ist, auch das zweyte dem vierten gleich sey, und wenn das erste Glied kleiner ist als das dritte, auch das zweyte kleiner sey als das vierte, VI, 35. Wenn demnach in dem gegenwärtigen Falle $A \gtrless \frac{n}{m}C$, so ist auch $B \gtrless \frac{n}{m}D$. Denn dieses bedeutet nichts anders als was wir eben mit Worten ausgedrücket haben, VI, 82. Wir haben aber auch VI, 73. gesehen, daß aus demjenigen, so diese Zeichen ausdrücken, folge, daß die Proportion $A:C=B:D$ richtig sey. Wenn man nemlich einen beliebigen Bruch $\frac{n}{m}$ der Größen C und D annehmen kan, und $\frac{n}{m}C$ ist größer als A, wenn $\frac{n}{m}D$ größer ist als B, oder $\frac{n}{m}C$ ist so groß als A, wenn $\frac{n}{m}D$ so groß ist als B, oder $\frac{n}{m}C$ ist kleiner als A, wenn $\frac{n}{m}D$ kleiner ist als B, so sind allezeit die Verhältnisse $A:C$ und $B:D$ einander gleich, und die Proportion $A:C=B:D$ hat ihre Richtigkeit. Also muß diese Versetzung der mittlern Glieder, durch welche aus der Proportion $A:B=C:D$ diese andere $A:C=B:D$ heraus gebracht wird, überall statt haben.

§. 119. Bey Zahlen und solchen Größen, die aus gleichen Theilen zusammen gesetzet sind, ist die Sache noch leichter einzusehen. Wie wir öfters gesehen haben, so kan $nA:mA=nB:mB$ eine jede solche Proportion ausdrücken. Versetzet man aber die mittleren Glieder, so bekommet man $nA:nB$ und $mA:mB$, da man denn leicht siehet, daß diese Verhältnisse gleich seyn. Denn die Verhältniß $nA:nB$ so wohl als die Verhältniß $mA:mB$ ist der Verhältniß $A:B$ gleich, wie ohne viele Worte sichtlich ist, VI, 114. Es ist, $5:7=10:14$, also ist auch nach der Regel $5:10=7:14$, man siehet aber die Richtigkeit dieser Proportion auch vor sich ein.

§. 120. Dieses ist dasjenige so wir von den Proportionen zum voraus setzen musten, ehe wir in unsern Geometrischen Betrachtungen weiter

gehen konten. Es ist noch etwas von der Zusammensetzung der Verhältnisse übrig, welches wir aber an einen anderen Ort versparen wollen, da wir es unmittelbar brauchen werden. Wir hoffen, daß es sodann leichter werde einzusehen seyn, wenn man sich das gegenwärtig abgehandelte erst durch die Anwendung recht wird bekant gemacht haben. Wir wollen nur noch, ehe wir uns wieder zur Geometrie wenden, die Aufgaben welche bey Proportionalzahlen vorkommen, auflösen.

Zu zwo oder drey Zahlen die dritte oder vierte Proportionalzahl zu finden.

§. 121. Alle Zahlen welche einerley Verhältniß gegen einander haben, lassen sich folgender gestalt ausdrücken, $n.A:A=n.B:B$ und diese Zeichnung kan eine jede Proportion, die in Zahlen gegeben ist, bedeuten, es mögen die Zahlen ganz oder gebrochen seyn, nur muß es frey seyn, sich unter n eine ganze oder gebrochene Zahl vorzustellen. Denn es ist n der Name so wohl der ersten Verhältniß $n.A:A$, als auch der zwoten $n.B:B$, weil in beyden Verhältnissen die ersten Glieder $n.A$, $n.B$ durch die Multiplication der zweyten in die Zahl n entstanden sind, VI, 44. Man nehme also $n.A:A=n.B:B$ vor eine jede dergleichen Proportion an, und stelle sich vor, daß man die äußeren Glieder derselben so wohl als die mittleren in einander multipliciren wolle, um zu sehen was dadurch vor Producte kommen. Man multiplicire erstlich das erste Glied $n.A$ durch das vierte B. Da das erste Glied ein Product ist aus dem Namen der Verhältniß n und aus A, so wird das Product aus dem ersten und letzten Gliede $n.A\times B$ aus dem Namen der Verhältniß aus A und aus B bestehen, oder diese drey Zahlen werden durch ihre Multiplication das erwehnete Product der äußeren Glieder der Proportion heraus bringen. Man multiplicire auch das zweyte Glied in das dritte, und mache $n.B\times A$, so siehet man, daß dieses Product zu erhalten, ebenfals das Product $B\times A$ durch den Namen der Verhältniß n müsse multipliciret werden wie vorher. Da also beyde Produete durch die Multiplication des Namens der Verhältniß n in das Product $A\times B$ entstehen, so kan man nicht anders schließen, als daß das Product aus den äußeren Gliedern einer Proportion, dem Producte der mittleren gleich sey. Es sey die Proportion in Zahlen $5:2=10:4$, so ist das Product der äußeren Glieder $5\times 4=20$, und eben so viel beträget auch das Product der mittleren 2×10. Eben so ist es auch bey dieser Proportion

7:5

$7:5=3:2\frac{1}{7}$. Das Product der mittleren Glieder 3×5 ist $=15$, und das Product der äußeren ist $14\frac{7}{7}=15$. Der Name der Verhältniß ist hier $\frac{7}{5}$, also ist das erste Glied $\frac{7}{5}\times5$, und das dritte $\frac{7}{5}\times2\frac{1}{7}$, das ist $\frac{7}{5}\times\frac{15}{7}$, die Proportion aber stehet so: $\frac{7}{5}\times5:5=\frac{7}{5}\times\frac{15}{7}:\frac{15}{7}$. Demnach ist das Product der äußeren Glieder $\frac{7}{5}\times5\times\frac{15}{7}$, das ist $\frac{7\times5\times15,}{7\times5}$ und das Product der mittleren Glieder ist $5\times\frac{7}{5}\times\frac{15}{7}$, das ist wieder $\frac{7\times5\times15,}{7\times5}$ das eine so wohl als das andere giebet 15.

§. 122. Gehet die Proportion in einem fort, und ist also das zweyte Glied derselben dem dritten gleich, VI, 65. so wird das Product der mittlern Glieder eine Quadratzahl. Das übrige bleibet; das Product der äußern Glieder ist dem Product der mittleren auch hier gleich, folgends ist dasselbe ebenfals eine Quadratzahl. Zum Exempel bey der Proportion, welche die erwehnte Beschaffenheit hat $5:7=7:9\frac{4}{5}$ ist das Product der mittlern Glieder die Quadratzahl 49, und eben so groß ist auch das Product der äußern $45\frac{20}{5}=49$.

§. 123. Wenn nun aufgegeben wird, zu dreyen gegebenen Zahlen die vierte zu finden, welche die Proportion voll machet, dergestalt, daß man sagen kan, wie die erste der gegebenen Zahlen zu der zwoten, so die dritte zu derjenigen, welche gefunden werden sol: so kan man ohne sonderliche Schwierigkeit aus denjenigen, so eben gezeiget ist, die Weise dieses zu verrichten, herleiten. Man kan sich vorstellen, daß die drey Zahlen, welche gegeben sind durch nA, A, nB ausgedrücket werden, und die vierte welche gesuchet wird durch B. Denn da alle Proportionen in Zahlen sich dergestalt ausdrücken lassen, so kan diejenige deren drey erste Glieder gegeben sind und deren viertes Glied gesuchet wird, hievon nicht ausgenommen seyn. Also ist bloß zu untersuchen wie in der Proportion $n.A:A=n.B:B$, aus den drey erstern Gliedern das vierte könne gefunden werden. Man siehet aber dazu verschiedene Regeln aus dieser Bezeichnung ein, welche alle in der Anwendung auf eines hinaus kommen. Aus den zwey ersten Gliedern nA, A findet man den Namen der Verhältniß n, wenn man das erste Glied nA durch das zweyte A dividiret. Mit dieser Zahl n dividire man nun ferner das dritte Glied n.B, so bekommet man das vierte, B. Als es seyn die drey Zahlen gegeben 8, 4, 12, zu welchen die vierte Proportionalzahl zu finden ist: so dividire ich 8 durch 4, der Quotient ist $2=n$.

Mit diesem n dividire ich nun ferner die dritte gegebene Zahl 12, so ist der Quotient 6, und die Proportion ist richtig $8:4=12:6$.

§. 124. Diese Regel scheinet von derjenigen, welche gemeiniglich gegeben wird, verschieden zu seyn: sie kommet aber in der Anwendung mit derselben auf eins hinaus. Es seyn die Zahlen 5, 2, 7 gegeben, zu welchen die vierte Proportionalzahl zu finden ist. Nach der Regel ist die erste dieser Zahlen durch die zweyte zu dividiren. Der Quotient wird $\frac{5}{2}$, und auf die Art kan man sich denselben allzeit vorstellen. Nunmehro ist ferner mit diesem Quotienten die dritte Zahl 7 zu dividiren, und dadurch wird die vierte Proportionalzahl erhalten, welche man suchet. Wil man dieses thun so kan man nur die Glieder des Bruchs $\frac{5}{2}$, durch welchen die Zahl 7 dividiret werden soll, verkehret setzen, den Nenner an die Stelle des Zehlers, und den Zehler an die Stelle des Nenners, also $\frac{2}{5}$, und mit diesem Bruche die Zahl 7 multipliciren, II, 44. Das Product $\frac{2\times 7,}{5}$ welches auf die Art erhalten wird, ist der gesuchte Quotient, und folgends die gesuchte vierte Proportionalzahl, und so kan man allezeit verfahren. Gleichwie die vierte Proportionalzahl zu den dreyen 5, 2, 7 ist $=\frac{2\times 7,}{5}$ so ist überhaupt, wenn man sich drey gegebene Zahlen unter den Buchstaben A, B, C, vorstellet, die vierte, welche die Proportion voll machet, $=\frac{B\times C,}{A}$ oder bey einer jeden Proportion $A:B=C:D$ ist $D=\frac{B\times C.}{A}$

§. 125. Es wird demnach die vierte Proportionalzahl auch aus den drey ersteren heraus gebracht, wenn man die zwo mittlern, die zwote nemlich B und die dritte C, in einander multipliciret, und das Product derselben $B\times C$ durch die erste Zahl A dividiret. Dieses ist die gemeine Regel, deren Richtigkeit man auch anders einsehen kan.

§. 126. Es seyn die Zahlen 5, 2, 7 nochmals gegeben, und zu denselben die vierte Proportionalzahl zu finden. Wir wollen diese Zahl z nennen, welche also von der Größe seyn muß, daß dieser Ausdruck $5:2=7:z$ der Wahrheit gemäß sey. Ist aber dieses, so muß auch das Product der äußeren zwey Glieder 5 und z, dem Producte der mittlern 2 und 7 gleich seyn. Das ist $2\times 7=5\times z$, VI, 121. Man hat also, nicht zwar die gesuchte Zahl z insbesondere, sondern ein Product welches aus derselben ent-

entstanden ist, indem sie durch eine bekante Zahl ist multipliciret worden, und man weiß in dem vorgelegeten Beyspiele, daß 2×7 oder 14 so groß sey als die annoch unbekante Zahl z fünfmal genommen. Ist es nun schwer die Zahl z zu finden, da man weiß wie viel sie fünfmal genommen beträget? Man siehet leicht, daß dieses zu erhalten, man bloß $5 \times z$ oder 14 durch 5 dividiren dörfe. Dadurch wird $z = \frac{14}{5}$, das ist $\frac{2 \times 7}{5}$ wie vorhero. Und so ist es allezeit. Wenn zu den drey Zahlen A, B und C die vierte D zu finden, welche die Proportion $A : B = C : D$ voll mache, so sind die Producte $A \times D = B \times C$ nothwendig gleich, und es ist also das Product $A \times D$ bekant, denn $B \times C$ ist bekant, weil die Zahlen B und C bekant sind, und aus denselben das Product leicht zu machen ist. Ueber dieses aber ist auch der eine Factor A des Products $A \times D$ bekant. Wenn aber bey einem bekanten Producte $A \times D = B \times C$, ein Factor A bekant ist, so findet man den andern Factor D leicht, wenn man das Product durch den bekanten Factor A dividiret, dadurch kommet der andere Factor D, und wird der Quotiente. Demnach ist $D = \frac{B \times C.}{A}$

§. 127. Es bedeutet also $\frac{B \times C}{A}$ allezeit die vierte Proportionalzahl zu den dreyen A, B und C, und man kan, wie auch gemeiniglich geschiehet, eine jede vierte Proportionalgröße zu drey gegebenen Größen A, B und C eben so bezeichnen, ob schon diese Größen keine Zahlen sind. Es seyen A, B und C Linien, so ist zwar wahr, daß man nicht eigentlich sagen kan, man müsse die Linie B durch die Linie C multipliciren, und durch die Linie A dividiren, um eine neue Linie $\frac{B \times C}{A} = D$ zu erhalten, welche mit den dreyen ersteren die Proportion $A : B = C : D$ voll machen wird; wenigstens können wir bey diesen Redensarten keinen rechten Verstand haben, da wir sie bloß in arithmetischem Verstande gebrauchen, ob sie sich zwar dergestalt erklären lassen, daß sie nichts widersinnisches enthalten. Allein dieses hindert nicht, daß wir nicht die vierte Proportionallinie zu A, B und C mit $\frac{B \times C}{A}$ bezeichnen solten. Denn dergleichen Zeichen sind eigentlich ganz willkührlich; man

thut aber allezeit wohl, wenn man, so viel möglich ist, eine Uebereinstimmung bey denselben beobachtet.

§. 128. Es wird aber durch diese Regel nicht nur diejenige vierte Proportionalzahl zu drey gegebenen gefunden, welche würklich in der Ordnung die vierte ist: sondern man kan nach derselben überhaupt aus jeden drey Zahlen einer Proportion, der ersten zum Exempel, der dritten und der vierten, die noch übrige finden, welche hier die zwote ist. Denn man kan die Glieder der Proportion allezeit so versetzen, daß die gesuchte Zahl die vierte werde. Man stelle sich die Proportion vor $5:z=3:4$. Die zwote Zahl an deren Stelle z stehet, ist unbekant, und sol gefunden werden. Man setze $3:4=5:z$, und mache nach der Regel $z=\frac{4\times 5}{3}=0\frac{2}{3}$, so ist $5\cdot 6\frac{2}{3}=3:4$. Man nehme eine andere Proportion, $z:3=7:4$ bey welcher die erste Zahl unbekant ist, und gefunden werden soll: so kan man wieder versetzen $4:7=3:z$, wodurch die gesuchte Zahl z in der Ordnung die vierte wird. Demnach wird auch hier $z=\frac{7\times 3}{4}=5\frac{1}{4}$, und die Proportion $5\frac{1}{4}:3=7:4$ ist voll und richtig. Es sey drittens $3:5=z:2$, so versetze man die Glieder der Verhältniß wieder, und mache $5:3=2:z$, so ist $z=\frac{3\times 2}{5}=1\frac{1}{5}$, und demnach $3:5=1\frac{1}{5}:2$.

§. 129. Auf eben diese Art wird auch zu zwo gegebenen Zahlen die dritte Proportionalzahl gefunden, wenn nemlich die Proportion in einem fort gehet und stetig oder zusammenhangend ist. Man siehet dieses leicht. Es sey $2:5=5:z$, so hat man, die z zu finden, bloß, wie sonst überall, die zwote Zahl in die dritte zu multipliciren. Das Product wird hier eine Quadratzahl, welches aber in dem übrigen nichts ändert. Demnach bedeutet $\frac{B\times B}{A}=C$ nichts anders, als daß C die dritte Proportionalzahl zu den zwoen A und B sey, und daß die Proportion $A:B=B:C$ ihre Richtigkeit habe. Eben diese Zeichnung kan die dritte Proportionallinie zu zwo Linien A und B, und überhaupt eine jede Größe C bedeuten, welche mit den zwo A und B die Proportion $A:B=B:C$ voll machet.

§. 130. Die Weise aber aus den zwey äußeren Gliedern einer solchen Proportion A und C das mittlere Glied B zu finden, stellet man sich folgender gestalt vor. Wenn man die äußern Glieder A und C in einander mul-

multipliciret, so wird das Product A×C die Quadratzahl des mittleren Gliedes B, VI, 122. Also ist B die Quadratwurzel dieses Products, und man hat, wenn man das mittlere Glied aus den äußeren finden wil, nur diese äußeren Glieder in einander zu multipliciren, und aus ihrem Product A×C die Quadratwurzel zu ziehen. Diese ist das mittlere Glied B. Zum Exempel, man stellet sich die Proportion 3:z=z:27 vor, und z sey zu finden, so mache man 3×27=81, und nehme die Quadratwurzel von 81, dieses ist 9 und =z. Demnach ist die Proportion welche man ergänzen solte: 3:9=9:27.

§. 131. Man siehet nach einer kleinen Ueberlegung, daß man nicht immer dieses mittlere Glied genau werde schaffen können, weil nicht eine jede Zahl eine Quadratwurzel hat, welche ausgesprochen werden könte, III, 37. In diesem Falle muß man sich begnügen, daß man sich der mittleren Proportionalzahl so viel als nöthig ist, nähere, welches eben so geschiehet, wie man einer unaussprechlichen Quadratwurzel nach und nach näher kommet, III, 48. Es sey zwischen den Zahlen 2 und 10 die mittlere Proportionalzahl zu setzen, so ist das Product dieser Zahlen 20. Die Wurzel von 20 fänget sich an mit 4,47, und eben diese Zahl ist auch der mittlern Proportionalzahl zwischen 2 und 10 ziemlich nahe.

Sie:

Siebenter Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

Die Gründe dieser Lehre.

[Fig. 175.] §. 1.

Man saget, daß zwo Figuren einander ähnlich sind, wenn die Winkel derselben einander gleich sind, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, und die Seiten, welche die gleiche Winkel dergestalt einschließen, daß sie auch zwischen den Spitzen gleicher Winkel liegen, gegen einander einerley Verhältniß haben. Oder deutlicher, wenn in den beyden Vierecken ABCD, abcd, der Winkel A dem Winkel a gleich ist, und B dem b, C dem c, D dem d, und wenn über dieses sich AB zur AD so verhält, wie ab zur ad, und eben diese Gleichheit der Verhältniß bey allen übrigen Seiten vorkommet, welche die gleichen Winkel einschließen, so daß auch AB:BC=ab:bc, und BC:CD=bc:cd und so ferner; so werden die Figuren einander ähnlich genant.

§. 2. Dieses ist der gemeine Begrif von der Aehnlichkeit, wie man dieselbe bey cörperlichen oder andern ausgedehnten Dingen antrift; man wendet aber bey solchen Dingen den Begrif der Aehnlichkeit in dem allereigentlichsten Verstande an. Sollen zwey Portraite, deren eines, wenn man will, groß, das andere klein gezeichnet ist, einander ähnlich seyn, so müssen alle Linien in beyden Gemählden auf einerley Art liegen, und einerley Verhältniß gegen einander haben. So bald dieses ist, so sind die Gemälde einander ähnlich, und weiter wird zur Aehnlichkeit nichts erfordert. Man siehet aber, daß die gleichen Lagen der Linien in den Gemälden gleiche Winkel ausmachen, also ist der Begrif, welchen man gemeiniglich von der Aehnlichkeit hat, mit dem geometrischen vollkommen einerley.

§. 3. Man kan aber dasjenige, so wir von der Proportion der Seiten bey ähnlichen Figuren gesaget haben, auch so verstehen, daß sich eine jede Seite der erstern Figur, zu der Seite der zwoten, welche in dieser Figur zwischen Winkeln lieget, die denjenigen gleich sind, zwischen welchen die erstere Seite lieget, verhalte, wie eine jede andere dergleichen Seite der ersten Figur,

gur, zu einer eben dergleichen Seite der andern. Denn dieses fließet aus dem erstern, und aus diesem fließet wieder das erstere. Setzet man

AD : AB = ad : ab, und
AB : BC = ab : bc, wie auch
BC : CD = bc : cd, und
CD : DA = cd : da, so erhält man, wenn man die Glieder dieser Verhältnisse wechselt, wie allezeit geschehen kan, VI, 117.

AD : ad = AB : ab, und
AB : ab = BC : bc, wie auch
BC : bc = CD : cd, und
CD : cd = AD : ad, und man siehet, daß diese Verhältnisse alle einander gleich sind. Denn die erste AD : ad ist gleich der zwoten AB : ab, und diese ist gleich der dritten BC : bc, und so fort. Man siehet aber auch, daß, wenn man diese letztere Proportionen als richtig angenommen hätte, man aus denselben leicht und durch die bloße Verwechselung, die erstern hätte heraus bringen können.

§. 4. Hieraus aber folget ferner, daß in allen ähnlichen Figuren sich die ganzen Umkreise gegen einander verhalten, wie sich jede zwo Seiten derselben, die zwischen gleichen Winkeln liegen, gegen einander verhalten, und daß demnach in den zwo Figuren, deren wir uns hier bedienen, welche einander ähnlich gesetzt werden, sich der Umkreis ABCDA zu dem Umkreise abcda verhalte, wie AB zur ab, oder wie BC : bc. Denn wir haben eben gesehen, daß die Verhältnisse AB : ab
BC : bc
CD : cd
DA : da einerley seyn. Wenn man nun die Summe aller erstern und aller letztern Glieder derselben machet, so wird die Verhältniß dadurch nicht geändert, VI, 113. sondern diese Summen verhalten sich gegen einander eben so, wie sich jede zwo Linien, die einander entgegen stehen, gegen einander verhalten, das ist, die erste Summe verhält sich zu der zwoten wie AB : ab, oder wie BC : bc und so ferner. Nun ist die erste Summe AB + BC + CD + DA nichts anders als der Umkreis ABCDA, und die zweyte Summe ab + bc + cd + da ist der Umkreis der zweyten Figur abcda. Derohalben verhält sich der Umkreis ABCDA zu dem Umkreise abcda, wie AB : ab, oder wie BC zur bc, und so fort. Eben dieses ist auch von solchen Theilen der Umkreise richtig, welche sich in den beyden Figuren mit den Spitzen gleicher Winkel anfangen und endigen, wie man leicht siehet.

§. 5. Es sind alle reguläre Figuren einander ähnlich, die einerley Zahl

der Seiten haben. Das ist, ein jedes gleichseitiges Dreyeck ist einem jeden andern gleichseitigen Dreyecke ähnlich; ein jedes Quadrat einem jeden andern Quadrate; ein jedes reguläres Fünfeck einem jeden andern regulären Fünfecke, und so fort. Wir wollen, um dieses vollkommen einzusehen, uns zwey Quadrate vorstellen, und dieselbe etwas genauer erwegen, wodurch das übrige alles deutlich werden wird. Es ist ein jeder Winkel des einen Quadrats einem jeden des andern gleich, denn die Winkel der Quadrate sind alle gerade. Und wie sich zwo Seiten gegen einander verhalten, die einen Winkel in einem Quadrate einschließen, so verhalten sich auch zwo Seiten gegen einander, die den Winkel des andern Quadrats einschließen. Denn diese letztern Seiten sind einander sowohl gleich als die erstern. Derowegen sind jede zwey Quadrate einander ähnlich. Man kan aber dergleichen Schlüsse bey allen regulären Figuren anbringen. Es sind zwar die Winkel derselben nicht gerade, aber sie sind doch einander allezeit gleich, in was Ordnung man sie auch nehmen will, und die Seiten, welche einen Winkel in einer dieser Figur einschließen, sind den Seiten, welche einem Winkel in einer andern regulären Figur einschließen, die eben so viele Winkel hat als jene, proportional, weil jene sowol als diese einander gleich sind.

§. 6. Dieses ist es so wir uns gleich Anfangs überhaupt von allen ähnlichen Figuren vorstellen können, da wir noch kein anders Kennzeichen der Aehnlichkeit haben, als die Gleichheit aller Winkel der Figuren, und die gleiche Verhältniß aller Seiten, welche zwischen den gleichen Winkeln liegen. Wenn man die Figuren insbesondere betrachtet, so kan man auch aus weniger Gründen die Aehnlichkeit schließen, weil einige derselben in den andern liegen, und sobald zum Exempel, die Gleichheit der Winkel statt hat, die gleiche Verhältniß der Seiten nothwendig da ist. Wir haben nunmehro zu betrachten, auf was Art und Weise diese Gründe der Aehnlichkeit von einander abhangen, und fangen billig wieder von den einfachesten Figuren, das ist, von den Dreyecken an: aus demjenigen so von diesen erwiesen werden kan, folgt das übrige alles.

[*Fig.* 176. 177. 178. 179.] §. 7. Ehe wir uns aber zu denselben wenden, müssen wir für allen Dingen, um ein Kennzeichen bekümmert seyn, aus welchem wir die gleiche Verhältniß der geraden Linien schließen können, welches sich unmittelbar anwenden lässet, und dieses lieget im folgenden allgemeinen Satze. Wenn man in der geraden Linie AB das Punct C nach Belieben annimmet, und ziehet durch die Puncte A, B und C die geraden Linien AD, CE und BF einander parallel, welche sich gegen die AB neigen können wie man will, und mit derselben Winkel von beliebiger Größe ein-

einschließen; und man ziehet sodann von einer der äußersten dieser Parallellinien AD an die andere BF die gerade Linie ab ebenfals nach Belieben, welche von der CE in c geschnitten wird, so wird die Verhältniß AC: AB der Verhältniß ac: ab gleich seyn, und die Proportion AC : AB = ac : ab wird ihre Richtigkeit haben.

§. 8. Dieser Satz wird gar leicht erwiesen. Man theile AB in eine beliebige Zahl gleicher Theile, und bezeichne die Theilungspuncte mit G, H, I, K. Durch alle diese Theilungspuncte ziehe man gerade Linien mit der AD parallel, welche folgends auch der CE und der BF parallel laufen, und weder einander noch eine von den Linien CE, BF jemals schneiden werden, IV, 193. Es theilen aber eben diese Parallelinien auch die Linie ab in gleiche Theile in den Puncten g, h, i, k, wie in der Abhandlung von den Parallellinien IV, 198. angemerket worden ist. Demnach ist ab in so viele gleiche Theile getheilet, als viele gleiche Theile man der AB gegeben hat. Es fällt aber auch nothwendig das Punct c in der ab zwischen die Theilungspuncte h, i, welche den Theilungspuncten H, I in der Linie AB in der Ordnung gegen über stehen, und das Theilchen hi ist von dem Puncte a um so viele Theilchen der ab entfernet, als viele der Theilchen der AB sind, um welche das Theilchen HI, in welches C fällt, von A entfernt ist, wie man bey der Betrachtung der Parallellinien leicht siehet. Es komt also den Linien AC, AB und ac, ab das Kennzeichen zu, woraus die Gleichheit der Verhältnisse allezeit geschlossen werden kan, VI, 71. Denn daß dasjenige, so von einer Theilung der AB wahr ist, auch richtig sey, man mag AB in so viele gleiche Theile theilen als man will, ist ohne Anstand einzusehen. Der Beweis ist nicht auf eine gewisse Zahl von Theilen eingeschränkt, sondern gilt von einer jeden Theilung der AB.

§. 9. Auch dieser Beweis lässet sich aus dem Begriffe des gleichförmigen Wachsthums viel kürzer geben. Man stelle sich vor, das die Linie AD zuerst gezogen sey, und daß von derselben man die zwo andern AB, ab von unbestimter Länge nach Belieben in eben der Fläche gezogen habe. Sodann nehme man an, daß die AD sich aus ihrem Ort in eben der Fläche dergestalt bewege, daß sie immer ihrer vorigen Lage AD parallel bleibt, indem sie nach und nach in Gg, Hh, CE, und endlich in BF anlangt. Es ist klar, daß dadurch die gleichen Theile AG, ag; GH, gh; HI, hi, und so fort, zugleich entstehen, und also die beyden Linien AB, ab gleichförmig wachsen, wie auch, daß durch dieses gleichförmige Wachsthum AC mit der ac, und AB mit der ab zugleich entstehen. Also ist allerdings AC : AB = ac : ab.

§. 10. Aus eben dem Beweise siehet man auch, daß die nachstehende Proportionen: AB:AC=ab:ac,
AC:CB=ac:cb,
CB:AB=cb:ab alle richtig sind, wie wohl dieselben auch aus dem vorigen durch die Proportionsregeln leicht hergeleitet werden können. Denn ist AC:AB=ac:ab, so ist auch umgekehrt VI,84. AB:AC=ab:ac. Aus dieser Proportion AB:AC=ab:ac fließet, VI, 101. AB—AC:AC=ab—ac:ac, das ist CB:AC=cb:ac, welche, wenn man sie verkehrt setzt, die Proportion AC:CB=ac:cb giebet. Eben die Proportion AB:AC=ab:ac giebet auch VI, 102. AB—AC:AB=ab—ac:ab, das ist, CB:AB=cb:ab. Man kan aber auch diese Proportionen alle in einen allgemeinen Satz verfassen, wenn man saget, daß diejenigen Theile der Linie AB, welche zwischen den Parallellinien AD, CE, BF auf gewisse Art liegen, und die Theile der Linie ab die zwischen eben den Parallellinien auf eben die Art liegen, einerley Verhältniß gegen einander haben. Man muß aber unter den Theilen der AB auch AB selbst verstehen, und unter den Theilen der ab, die ab selbst. Die Beschaffenheit der Sprache zwinget uns öfters auf die Art zu reden. Es liegen aber zum Exempel BC und AB zwischen den Parallellinien AD, CE, BF auf eben die Art wie bc und ab zwischen eben diesen Parallellinien liegen: also ist die Proportion BC:AB=bc:ab richtig. Man siehet leicht, daß man auch sagen könne, AC:ac=AB:ab, und AC:ac=CB:cb, wenn man nemlich die mittlern Glieder der Proportion verwechselt, wie allezeit geschehen kan, VI, 117.

§. 11. Wenn die zwo gerade Linien AB, ab so gezogen sind, daß sie einander schneiden, oder in einem Puncte zusammen stoßen, und eine der drey Parallellinien AD, CE, FB gehet durch dieses Punct wie bey der 178 und 179 Figur: so ist diese Parallellinie in der That unnütze, denn sie bezeichnet keine andere Puncte als die durch den Durchschnitt ohnedem bezeichnet werden. Man braucht demnach in diesem Falle nur zwo Parallellinien, so daß man nachfolgenden Satz aus unserm allgemeinen machen kan: Wenn zwo gerade Linien AB und ab in dem Puncte A oder C zusammen kommen, oder einander schneiden, und man ziehet nach Belieben zwo Parallellinien CE, BF in der 178 Figur, oder AD, BF in der 179, welche diese Linien in C, c, B, b, oder A, a, B, b schneiden, so ist AC:AB=ac:ab, und das übrige so wir in den vorhergehenden Sätzen angegeben haben.

§. 12. In der 178 Figur ist ABb ein Dreyeck und mit der Seite Bb desselben die Linie Cc parallel gezogen. Man kan demnach sagen: wenn man in einem Dreyecke ABb mit einer Seite Bb eine andere gerade Linie Cc parallel ziehet, so erlange man allezeit die Pro-

por-

portion, AC:AB=ac:ab, und die übrigen, welche angegeben worden sind. Und dieses ist der Satz, von welchem man gemeiniglich die gegenwärtige Lehre anzufangen, und aus welchem man das übrige, so wir gleich Anfangs zugleich erwiesen, herzuleiten pfleget.

[*Fig.* 180.] §. 13 Hieraus kan man nun eine Anweisung ziehen, zu drey gegebenen geraden Linien die vierte Proportionallinie zu finden, welche pur geometrisch ist, und mit Zahlen gar nichts zu schaffen hat. Es seyn die gegebenen drey Linien ab, bc und ad, zu welchen man die vierte Proportionallinie finden soll, so ziehe man eine gerade Linie von genugsamer Länge, und bringe auf dieselbe AB=ab, und ferner BC=bc, ziehe sodann von A noch eine andere gerade Linie, welche mit der vorigen einen Winkel machet, von was Größe man will, und trage auf diese Linie aus A die dritte der gegebenen Linien AD=ad; sodann ziehe man B und D mit der geraden Linie BD zusammen, und durch C ziehe man eine andere gerade Linie der BD parallel, welche die verlängerte AD in E schneide: so ist DE die gesuchte vierte Proportionallinie. Denn es verhält sich allerdings, vermöge des eben erwiesenen Satzes, AB:BC wie AD:DE, das ist, ab:bc wie ad:DE.

§. 14. Man hätte auch die zwote der gegebenen Linien aus A anfangen können, aber in diesem Falle hätte man den Anfang der vierten ebenfals in A nehmen müssen. Gesetzt, es wäre zu den Linien AB, AC und AD die vierte Proportionallinie zu suchen gewesen, so hätte man dieselbe setzen können, wie die Figur ausweiset. Die Linie CE, so auch hier der BD parallel zu ziehen ist, würde das Ende E der vierten Proportionallinie AE, bezeichnet haben. Denn es ist auch AB:AC=AD:AE.

§. 15. Wäre die zweyte der gegebenen Linien bc der dritten ad gleich gewesen, so hätte man die vierte Proportionallinie nach eben der Anweisung finden können, ohne die geringste Aenderung. In diesem Falle gehet die Proportion ab:bc=ad:DE, oder AB:BC=AD:DE in einem fort, weil die zwey mittlere Glieder BC, AD einerley Größe haben, und man also sagen kan AB:BC=BC:DE. Es wird also zu einer solchen Proportion das dritte Glied eben so gefunden, wie zu einer andern, deren mittlere Glieder verschieden sind, das vierte gefunden wird.

§. 16. Weil $\frac{B \times C}{A}$ überhaupt die vierte Proportionalgröße ausdrücket, zu den dreyen gegebenen Größen A, B und C, VI, 127. so folget, daß, wenn A die Linie ab, oder AB, B die Linie bc, oder BC, und C die Linie ad oder AD bedeutet, sodann $\frac{B \times C}{A}$ nichts anders bedeuten könne als die Linie DE,

und in diesem Verstande muß man diese Zeichnung $\frac{B \times C}{A}$ allezeit nehmen, wenn von geraden Linien die Rede ist. Man zeichnet auch zuweilen so $\frac{B}{A} \times C$, dessen Bedeutung von der vorigen nicht verschieden ist.

§. 17. Sonst theilet man aus eben dem Satze eine gerade Linie in Theile, welche sich gegen einander und gegen die ganze Linie eben so verhalten, wie sich in einer andern getheilten geraden Linie, die Theile gegen einander und gegen die ganze Linie, deren Theile sie sind, verhalten. Es geschiehet die Sache eben so wie VI,75. gewiesen worden, eine gerade Linie in so viele gleiche Theile zu theilen, als viele der einander ebenfals gleichen Theile sind, in welche eine andere gerade Linie getheilet ist, und wir thun hier überhaupt nichts, als daß wir dasjenige, so gleich Anfangs von der Theilung gerader Linien durch Parallellinien gesaget worden ist, erweitern.

[*Fig.* 181.] §. 18. Es sey die gerade Linie AB in C, D und E getheilet: man soll eine andere gegebene gerade Linie ab eben so theilen wie AB getheilet ist, mit Beybehaltung nemlich der Verhältnisse der Theile gegen einander und gegen die ganze Linie: so bringe man die gegebene Linie ab an AB unter einen beliebigen Winkel, das ist, man mache Ab = ab, ziehe sodann durch die äußersten Puncte dieser Linien B und b die gerade Linie Bb, und mit dieser ziehe man durch alle Theilungspuncte C, D und E Parallellinien Ee, Dd, und Cc welche die Linie Ab in c, d, e schneiden, so ist die Theilung verrichtet. Denn es ist allerdings AC : CD = Ac : cd, und CD : DE = cd : de, und AB : EB = Ab : eb, und so ferner, wie es die Aufgabe erforderte, VII, 10.

[*Fig* 182.] §. 19. Wir können den Satz, welchen wir bis anher betrachtet haben, noch nicht verlassen. Man kan dasjenige, so von der Proportion der Seiten in einem Dreyecke VII, 12. gesaget worden ist, umkehren, und sagen, daß, wenn in der Seite AB eines Dreyeckes ABC, die AD nach Belieben angenommen, sodann zu den drey Linien AB, AC und AD die vierte Proportionallinie AE gesucht, und diese aus A auf AC gesetzet worden ist; auch die gerade Linie DE, welche die zwey Puncte D und E mit einander verknüpfet, der Seite des Dreyeckes BC parallel seyn werde. Denn weil die vierte Proportionallinie AE zu den drey gegebenen AB, AC und AD dadurch gefunden wird, daß man durch D eine gerade Linie DE mit der BC parallel ziehet VII, 14. so muß die gerade Linie, welche durch die Puncte D und E gehet, nothwendig mit der BC parallel laufen.

§. 20. Solte hiebey noch einiger Zweifel übrig seyn, so bedenke man,

daß,

daß, wenn man setzen wolte DE wäre nicht mit der BC parallel, man doch ohnmöglich leugnen könte, daß durch das Punct D eine Linie könne gezogen werden, die der BC parallel ist. Ist diese nicht DE, so ist es eine andere, zum Exempel DF. Ist aber DF mit der BC parallel, so muß man die Proportion AB:AC=AD:AF nothwendig zugeben, weil diese aus demjenigen folget, so VII, 14. erwiesen worden ist. Da aber auch angenommen wird, das folgende Proportion richtig sey, AB:AC=AD:AE, so ist aus beiden zusammen ferner zu schließen, daß AF der AE gleich seyn müsse. Denn die drey ersten Glieder in beiden Proportionen sind einerley, und also können die vierten, welche durch jene bestimt werden, nicht verschieden seyn. Wenn die Proportionen AB:AC=AD:AE, und AB:AC=AD:AF, beide als richtig angenommen werden, so muß man auch zugeben, daß die Verhältnisse AD:AE und AD:AF, welche einer dritten Verhältniß AB:AC gleich sind, einander selbst gleich seyn, AD:AF=AD:AE, woraus die Gleichheit der AF und AE allerdings fließet, VI, 33. Nun aber ist es ohnmöglich, daß AE der AF gleich seyn solte, wenn die Linie DF, welche man durch D der BC parallel gezogen, außer DE fällt: also kan diese Parallellinie nicht außer DE fallen, sondern die Linie DE ist selbst der BC parallel.

[*Fig.* 183.] §. 21. Außer dem, daß dieser Satz eine neue Anweisung geben kan, wie mit einer jeden geraden Linie eine andere parallel zu ziehen ist, wird er auch bey Erweisung anderer Sätze vielen Nutzen haben. Das letztere wird sich nächstens zeigen: Das Ziehen der Parallellinie aber kan auf folgende oder auf eine gleichgültige Weise geschehen. AB ist die gerade Linie, welcher eine andere parallel zu ziehen, und C ist das Punct durch welches die Parallellinie gehen sol. Man ziehe durch C eine gerade Linie nach Belieben, welche sich in der AB endiget, wo man wil, als in D, man mache CE so groß als CD, und ziehe ferner aus E eine andere Linie EF an AB wie man wil, diese theile man mit G in zwey gleiche Theile, so kan man durch C und G die verlangete Parallellinie ziehen. Denn weil EC und EG die Helften sind von ED und EF, so hat man VI, 97. die Proportion ED:EC=EF:EG, demnach ist CG der AB parallel.

§. 22. Man siehet leicht, daß man aus eben dem Grunde noch verschiedene andere kleine Aufgaben auflösen könne, welche wir aber der Uebung überlassen, als welche dergleichen Kleinigkeiten, wenn sie mit einigem Nachdenken verknüpfet ist, gar leicht selbst lehret. Und wir beschließen also hiermit dasjenige, so wir zum Grund legen musten, ehe wir uns zur Betrachtung der Aehnlichkeit der Dreyecke wenden konten.

Von

Von der Aehnlichkeit der Dreyecke.

§. 23. Es sind aber zwey Dreyecke ähnlich, erstlich, wenn sie zween gleiche Winkel haben, wie man diese nehmen wil. Weil aber aus der Gleichheit zwener Winkel in den Dreyecken auch die Gleichheit des dritten Winkels folget, so siehet man leicht, daß dieser Satz eigentlich sage, diejenigen Dreyecke seyn einander ähnlich, deren Winkel alle gleich sind; und da hat man freylich kein Auslesen, welche Winkel man in dem einen Dreyecke nehmen und mit den Winkeln des andern vergleichen wolle.

[*Fig.* 184.] §. 24. Es sey nemlich in dem Dreyecke ABC der Winkel A, dem Winkel a des Dreyeckes abc gleich, und der Winkel B dem Winkel b, woraus dann fließet, daß auch der Winkel C dem Winkel c gleich sey: so ist das Dreyeck ABC dem Dreyecke abc ähnlich, und hat dasjenige, so zur Aehnlichkeit der Figuren, außer der Gleichheit der Winkel erfordert wird, nemlich es haben auch die Seiten beyder Dreyecke, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, einerley Verhältniß gegen einander, VII, 1. Es ist demnach:

AB:BC=ab:bc, oder AB:ab=BC:bc.
AC:BC=ac:bc, oder AC:ac=BC:bc.
AB:AC=ab:ac, oder AB:ab=AC:ac.

welche dritte Proportion aber auch aus den zwo ersteren herfließet. Denn in derselben sind die Verhältnisse AB:ab, und AC:ac beide der Verhältniß BC:bc gleich, und müssen demnach nothwendig auch selbst einander gleich seyn, wie dieses in der dritten Proportion ausgedrücket wird.

§. 25. Die Richtigkeit aller dieser Proportionen einzusehen, trage man die Seite bc des kleineren Dreyecks aus B in D auf die Seite des gröseren BC, welche zwischen den Winkeln B und C lieget, die den Winkeln b und c, zwischen welchen bc enthalten ist, gleich sind, und mache also BD=bc. Ferner ziehe man durch D die gerade Linie DE mit der CA parallel. Weil nun dadurch der Winkel D dem Winkel C gleich wird, IV, 190. dieser Winkel C aber dem Winkel c gleich ist, so ist auch der Winkel D dem Winkel c gleich. Und da ferner auch der Winkel B dem Winkel b gleich ist, so ist das Dreyeck EBD dem Dreyecke abc in allem gleich, das ist, der Winkel E ist dem Winkel a gleich, BE=ba, und DE=ca. Denn diese Gleichheit folget aus der Gleichheit der Seiten BD, bc, und der zween Winkel die daran liegen, jederzeit, IV, 130. Man kan also das Dreyeck EBD selbst vor das Dreyeck abc halten, und was von den Seiten dieses Dreyeckes EBD bewiesen wird, ist auch von den Seiten

des

des Dreyeckes abc richtig. Nun folget daraus, daß DE der CA parallel lieget ohne Weitläuftigkeit, VII, 12.

AB:BE=BC:BD, oder AB:BC=BE:BD,

also ist auch AB:ab=BC:bc, oder AB:BC=ab:bc, und dieses ist die erste Proportion, welche wir erweisen solten.

§. 26. Man siehet aber auch leicht, daß der Winkel B vor den übrigen keinen Vorzug habe, und daß, gleichwie man das kleine Dreyeck in das große mit dem Winkel b schieben kan, dieses auch auf eben die Art angehen werde, wenn man dasselbe mit seinem Winkel a in den Winkel A des großen Dreyeckes schiebet. Man stelle sich vor, daß dieses geschehen sey, so kan man aus eben dem Grunde, weil nemlich wegen der Gleichheit der Winkel C und c, nachdem der Winkel a in A eingeschoben worden, bc der Seite BC nothwendig parallel fallen muß, die Proportion schließen, AB:ab=AC:ac oder AB:AC=ab:ac, welche die dritte in der Ordnung war, VII, 24. und auf eben die Art folget auch die zweyte, wenn man dieselbe nicht aus dieser und der vorigen machen wil. Denn sie lässet sich aus denselben machen. Weil nemlich

AB:ab=AC:ac, wie auch

AB:ab=BC:bc, das ist, weil die zwo letzteren Verhältnisse einer dritten AB:ab gleich sind, so müssen sie auch unter sich gleich seyn, und es ist, AC:ac=BC:bc, oder AC:BC=ac:bc, welches eben die zweyte Verhältniß des Satzes ist.

[*Fig.* 185.] §. 27. Man siehet hieraus, wenn man in einem Dreyecke ABC mit einer Seite AC eine Linie ED, wo man wil, parallel ziehet, daß außer den oben VII, 12. angezeigten Verhältnissen man auch noch diese habe BC:BD=CA:DE, oder BC:CA=BD:DE, wie auch BA:BE=AC:ED, oder BA:AC=BE:ED. Denn die Dreyecke ABC und EBD werden dadurch, daß ED der AC parallel ist, nothwendig gleichwinklicht. Ja es ist dieses auch richtig, wenn zwo gerade Linien AB, CD einander in E schneiden, und man schneidet sie ferner mit den Parallellinien AF, BG. Es ist nemlich AE:EB=AF:BG, oder AE:AF=EB:BG, wie auch EF:EG=AF:BG, oder EF:AF=EG:BG.

[*Fig.* 184.] §. 28. Der zweyte Grund der Aehnlichkeit zweyer Dreyecke ist die Gleichheit eines Winkels derselben, und die gleiche Verhältniß der Seiten, welche denselben Winkel in beiden Dreyecken einschließen. Es sey in den Dreyecken ABC und abc nunmehro der Winkel B dem Winkel b gleich, und es verhalte sich AB zur BC, wie sich ab zur bc verhält, oder welches eben das ist, es sey AB:ab=BC:bc; so sind die

Dreyecke ebenfals ähnlich, und haben alles übrige so zur Aehnlichkeit erfordert wird, nemlich die Gleichheit der Winkel C und c, wie auch A und a, welche auf einerley Art in den beiden Dreyecken liegen: und die gleiche Verhältniß der übrigen Seiten, welche an den gleichen Winkeln liegen. Es ist nemlich auch AB:AC=ab:ac, oder AB:ab=AC:ac, wie auch BC:AC=bc:ac oder BC:bc=AC:ac. Und dieses beweiset man fast auf eben die Art, wie der vorige Satz bewiesen worden ist.

§. 29. Man trage bc aus B auf die Seite BC, und mache BD=bc, und eben so verfahre man mit der ba: Man lege sie auf BA, dergestalt, daß BE=ba. Man kan alsdann in der Proportion BA:BC=ba:bc, an die Stelle der zwo letztern Linien und ihrer Verhältniß, die Verhältniß BE:BD setzen, woraus die Proportion BA:BC=BE:BD entstehet. Aus dieser Proportion aber siehet man ein, daß die gerade Linie DE der Linie AC parallel laufe. Denn wir haben VII, 19. gesehen, daß diese Lage der Linien DE, AC aus der angezeigten Proportion fließe. Hieraus aber sind die nachstehende Proportionen, welche VII, 23. allezeit statt haben, wenn in einem Dreyecke mit einer Seite eine Parallellinie gezogen wird, welche die übrigen Seiten schneidet, leicht zu schließen.

BA:AC=BE:ED
BC:AC=BD:ED.

Von der Gleichheit der Winkel D und C, wie auch E und A, ist vielleicht nicht einmal nöthig, etwas zu sagen, weil sie daraus, daß die Linien AC und DE einander parallel sind, unmittelbar fließet. Weil aber die zwey Dreyecke EBD, abc bey B gleiche Winkel haben, und weil man die Seite BD der bc, und BE der ba gleich gemacht hat, so sind auch nach dem bekanten Satze von der Gleichheit der Dreyecke IV, 116. die Seiten DE und ac, wie auch die Winkel E und a, einander gleich, und der Winkel D ist=c. Derowegen gilt von dem Dreyecke abc, und von seinen Seiten und Winkeln dasjenige, so von dem Dreyecke EBD, und seinen Seiten und Winkeln gewiesen worden ist. Es sind auch die Winkel a und A, wie auch C und c einander gleich, und die nachstehende Proportionen haben ebenfals statt:

BA:AC=ba:ac, oder BA:ba=AC:ac,
BC:AC=bc:ac, oder BC:bc=AC:ac.

§. 30. Wir wenden uns nunmehro zu dem dritten Grunde der Aehnlichkeit der Dreyecke. Dieser ist die gleiche Verhältniß aller Seiten in zweyen Dreyecken. Wenn in zweyen Dreyecken ABC und abc von denen nachstehenden Proportionen

AB:

AB:BC=ab:bc, oder AB:ab=BC:bc,
AB:AC=ab:ac, oder AB:ab=AC:ac,
BC:AC=bc:ac, oder BC:bc=AC:ac,

zwo richtig eintreffen, so sind die Dreyecke ähnlich. Wir setzen, daß nur zwo eintreffen dörfen, denn wenn wir diese Verhältnisse mit einander vergleichen, so sehen wir leicht, daß aus jeden zwoen derselben die dritte folge. Denn es komt in jeden zwo Proportionen einerley Verhältniß zweymal vor, gleichwie in der ersten und zweyten Proportion die Verhältniß AB:ab zweymal stehet. Man hat also unter den angezeigten Proportionen nur zwo als richtig anzunehmen, die dritte wird dadurch zugleich mit eingeschlossen.

§. 31. Daß aber aus zwo dieser Proportionen die Aehnlichkeit der Dreyecke folge, wird nachfolgender maßen erwiesen. Man lege wieder bc auf BC, welche letztere Linie der erstern in der Proportion gegenüber stehet, und mache solchergestalt BD=bc; man bringe auch ba auf BA in BE, und ziehe sodann die gerade Linie DE. So ist nunmehro gar leicht einzusehen, daß die Dreyecke ABC und EBD einander ähnlich sind, VII, 29. Nun ist aber wieder das Dreyeck EBD dem Dreyecke abc nach allen Seiten und Winkeln gleich, und dieses wird also erwiesen. Es ist gesetzt worden, daß AB:AC=ab:ac. Aus der Aehnlichkeit aber der Dreyecke ABC und EBD folget AB:AC=EB:ED, und es sind in diesen zwo Proportionen die drey ersten Glieder gleich, denn die allerersten AB, und die zweyten AC sind beyderseits vollkommen einerley, und EB ist der ab mit Fleiß gleich gemacht worden, also müssen auch die dritten Glieder ac und ED einander gleich seyn. Nun ist auch BD=bc. Demnach sind alle drey Seiten des Dreyecks EBD den drey Seiten des Dreyecks abc gleich, und die Dreyecke sind gänzlich von einer Größe, IV, 143. Man kan sich also wieder vorstellen, daß EBD nichts anders sey, als das in den Winkel bey B eingeschobene Dreyeck abc. Da nun also erwiesen ist, daß das Dreyeck EBD dem Dreyecke ABC ähnlich sey, so muß dieses auch von dem Dreyecke abc wahr seyn. Demnach ist der Winkel a dem Winkel A, der Winkel b dem Winkel B, und c dem C gleich, denn diese Winkel liegen in beiden Dreyecken zwischen solchen Seiten, welche einerley Verhältniß gegen einander haben.

[*Fig.* 184.] §. 32. Wir haben noch einen vierten Grund der Aehnlichkeit zweyer Dreyecke übrig, aber dieser ist etwas mehr eingeschrenkt als die vorigen. Zwo Dreyecke haben einen gleichen Winkel, und es sind die Seiten proportional, welche einen andern Winkel einschließen. Es ist möglich, daß bey diesen Umständen die Dreyecke ähnlich sind, sie kön-

nen aber auch unähnlich seyn. Doch sind sie gewiß ähnlich, wenn diejenige Seiten, welche den Winkeln entgegen stehen, von welchen gesetzt wird, daß sie einander gleich sind, größer sind als die Seiten, welche an den gedachten Winkeln anliegen. ABC, abc sind zwey Dreyecke, wir setzen, der Winkel C sey dem Winkel c gleich, und es verhalte sich AB zu BC, wie sich ab zu bc verhält; aber es sey auch AB größer als BC, und folgends ab größer als bc: es werden bey diesen Bedingungen die Dreyecke ABC, abc einander ähnlich seyn.

§. 33. Denn man bringe wieder die Linie bc auf die Linie BC, welche jener in der Proportion gegenüber stehet, und mache also BD=bc, sodenn aber ziehe man durch D die gerade Linie DE der CA parallel, wodurch der Winkel bey D dem Winkel C gleich wird. Da nun angenommen ist, daß der Winkel C dem Winkel c gleich sey, so muß auch der Winkel D dem Winkel c gleich seyn. Ferner folget aus eben der Lage der geraden Linien CA und DE die nachstehende Proportion: BC:BA=BD:BE, VII, 12. Nun hat man auch diese Proportion als richtig angenommen: BC:BA=bc:ba, und wenn man diese zwo Proportionen mit einander vergleichet, so findet man, daß die drey ersten Glieder derselben gleich sind. Es müssen demnach auch die vierten Glieder BE, ba einander gleich seyn. Und also haben wir zwey Dreyecke bac, BDE, welche einen gleichen Winkel haben D=c, und deren Seiten, welche denselben Winkel nicht einschließen, beiderseits gleich sind, BE=ba, und BD=bc, so doch, daß die Seite ba, die dem Winkel c entgegen stehet, größer ist, als die Seite bc, welche an demselben lieget. Hieraus aber folget, IV, 259. daß das Dreyeck EBD dem Dreyecke abc vollkommen und nach allen Seiten und Winkeln gleich sey, und daß man sich wieder vorstellen könne, daß das Dreyeck EBD selbst das Dreyeck abc sey, welches man in den Winkel B des Dreyecks ABC eingeschoben hat. Nun ist aus dem, so wir öfters gesagt haben, klar genug, daß das Dreyeck EBD dem Dreyeck ABC ähnlich sey, und man darf nur darauf Acht haben, daß DE der AC parallel laufe, um dieses einzusehen. Derowegen muß auch das Dreyeck abc dem Dreyecke ABC ähnlich seyn, und alles haben, was zur Aehnlichkeit erfordert wird, nemlich: die Winkel B, b, wie auch A, a müssen einander gleich, und die Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, proportional seyn.

§. 34. Ist in solchen Dreyecken der Winkel bey C gerade oder stumpf, so ist nothwendig die Seite AB, welche dem Winkel C entgegen gesetzt ist, größer als die Seite BC, welche an demselben lieget, IV, 260. und es sind also alle geradewinklichte Dreyecke, wie auch alle stumpfwinklichte unter

ter den gesetzten Bedingungen, wenn nemlich die Winkel C, c gleich, und die Seiten BA: BC den Seiten ba: bc proportional sind, einander ähnlich. Bey geradewinklichten Dreyecken hat man nicht einmal nöthig zu setzen, daß die geraden Winkel C, c gleich seyn sollen, denn weil sie gerade sind, verstehet sich dieses von selbsten. Man kan also von geradewinklichten Dreyecken den Satz kurz dergestalt abfassen: Alle geradewinklichte Dreyecke, bey welchen zwo Seiten einerley Verhältniß haben, sind einander ähnlich. Es mögen nehmlich diese zwo Seiten den geraden Winkel einschließen, wie in dem 28 Satze dieses Abschnittes angenommen worden ist, oder nicht.

[*Fig.* 186.] §. 35. Wenn man diese Sätze von der Aehnlichkeit der Dreyecke wiederhohlet und erweget, so siehet man, da in jeden zwey Dreyecken, welche man vergleichen mag ABC und abc, diese sechs Dinge vorkommen,

A = a
B = b
C = c
AB: BC = ab: bc
AB: AC = ab: ac
AC: BC = ac: bc

drey Winkel nemlich, und drey Verhältnisse der Seiten: Daß, wenn man zwey dieser Dinge gleich zu seyn setzet, auch die übrigen alle gleich seyn, nur muß man die einzige Bedingung unsers letzten Satzes nicht aus den Augen setzen, so oft als man in denselben fällt. Der Verstand ist dieser: setzet man A=a, und B=b, so ist auch C=c, AB:BC=ab:bc, und so ferner mit allen übrigen. Setzet man A=a, und AB:BC=ab:bc, so ist wieder B=b, C=c, und AB:AC=ab:ac, und so weiter. Es ist keine Ausnahme dabey, als daß, wenn man setzet, daß C=c, und AB: BC=ab:bc, auch AB größer seyn muß als BC, wenn das übrige alles ebenfals gleich seyn soll, sonst, wenn AB kleiner ist als BC, folget das übrige nicht nothwendig.

§. 36. Siehet man aber diese Sätze der Aehnlichkeit dee Dreyecke noch von einer andern Seite an, und vergleichet sie mit denjenigen, so wir gleich im Anfange von der Gleichheit der Dreyecke uns vorgestellet haben; so findet man, daß sie mit jenen gar sehr genau verwand sind, ja es sind jene Sätze alle unter diesen begriffen. Man schließet, daß zwey Dreyecke gleich sind, und gleiche Seiten und Winkel haben, wenn in denselben gleiche Winkel von gleichen Seiten beschlossen werden. Man schließet auch, daß zwey Dreyecke ähnlich sind, und gleiche Winkel, und eine gleiche

Verhältniß der Seiten haben, wenn in denselben gleiche Winkel von Seiten beschlossen werden, welche sich auf einerley Art gegen einander verhalten. Man schließet, daß zwey Dreyecke gleich sind, wenn sie zwey gleiche Winkel haben, und eine gleiche Seite: Man schließet ebenfals aus der Gleichheit zwener Winkel die Aehnlichkeit derselben, ob zwar sie keine gleiche Seiten haben. Man schließet, daß zwey Dreyecke gleich sind, aus der Gleichheit aller Seiten derselben: Man schließet auch die Aehnlichkeit der Dreyecke aus der gleichen Verhältniß ihrer Seiten. Man schließet in einigen Fällen die Gleichheit der Dreyecke aus der Gleichheit zwoer Seiten und eines Winkels, welcher von diesen Seiten nicht beschlossen wird, und in eben diesen Fällen schließet man auch die Aehnlichkeit der Dreyecke aus der Gleichheit eben desselben Winkels, und aus der gleichen Verhältniß dieser Seiten.

§. 37. Hieraus kan man den allgemeinen Satz ziehen, daß, wenn man zwey Dreyecke zu verfertigen ähnliche Dinge annimt, (gleiche Winkel oder Seiten, welche gleiche Verhältnisse gegen einander haben) und machet aus diesen Dingen die zwey Dreyecke aus, so werden dieselben ähnlich. Man muß nur solche Dinge annehmen, aus welchen das Dreyeck ganz und gar determiniret wird, so, daß nicht mehr als einerley Dreyeck aus demselben gemacht werden kan. Zum Exempel aus einem Winkel und den zwo Seiten, welche den Winkel einschließen, wird ein Dreyeck, und nicht mehr als eines, verfertiget. Wenn man demnach zu zweyen Dreyecken einerley Winkel A und a nimt, und Seiten an dieselbe leget, welche gleiche Verhältnisse gegen einander haben, so daß AB : AC = ab : ac, so werden die Dreyecke ABC, abc, welche man dergestalt verfertiget, einander ähnlich.

§. 38. Der Satz ist richtig, ja er ist allgemein. Alle Figuren, welche aus ähnlichen Dingen auf einerley Art zusammen gesetzet oder erzeuget werden, sind einander ähnlich, und dieses hat einige bewogen, daß sie diesen Satz brauchen, alles so von der Aehnlichkeit nicht allein der Dreyecke, sondern aller Figuren überhaupt zu sagen ist, zu erweisen. Ohnfehlbar können diese Beweise richtig seyn, aber der Satz selbst ist kein wahrer geometrischer Grundsatz. Es fehlet ihm diese Deutlichkeit, und die Ueberzeugung, welche ein geometrischer Grundsatz sogleich hervor bringet, so bald man ihn höret. Figuren die einander decken können sind einander gleich. Dieses ist ein wahrhaftig geometrischer Grundsatz. Man vergleiche ihn mit dem, von welchen wir reden, und sehe, ob man von diesem eben so sehr überzeuget werde, als von jenem? Ja wir können uns nicht anders vorstellen, als

daß

daß viele würklich an der Wahrheit dieses allgemeinen Satzes der Aehnlichkeit zweifeln werden, wenn wir bedenken, wie viele Mühe es uns gekostet, ihn erstlich recht zu verstehen, und zum zweyten uns von der Wahrheit desselben zu überführen. Und eben dieses, daß er unrecht verstanden werden, und dadurch zu vielen Fehlern Anlaß geben kan, ist eine neue Ursach, warum wir ihn als einen Grund der geometrischen Beweise nicht gebrauchen wolten. Man suchet in der Geometrie nicht nur eine gewisse Wahrheit, welche auch die Erfahrung, und zuweilen das Zeugniß anderer geben kan; sondern man suchet in dieser Wissenschaft den höchsten Grad der Ueberzeugung, welchen man die Evidenz nennet, und welche darin bestehet, daß man aus dem Begriffe der Sache selbst, nachdem man sich versichert, daß in demselben nichts widersprechendes liege, dasjenige herzuleiten fähig ist, so von den Dingen gesaget wird, welche diese Begriffe vorstellen.

§. 39. Wäre dieses nicht, und man hätte nicht alle Undeutlichkeit und Zweydeutigkeit in dieser Wissenschaft so sorgfältig zu vermeiden, so wäre es nicht ohnmöglich noch manchen dergleichen Satz in die Geometrie zu bringen, als der gegenwärtige ist, und ich glaube, daß ich Exempel von solchen Sätzen gegeben, und noch ferner zu geben im Stande seyn werde, welche zwar in einem oder andern Falle einen leichten Beweis machen können, aber deswegen nicht in die Geometrie als Grundsätze gebracht werden dürfen, weil wieder Fälle vorkommen können, da die Anwendung derselben mit einiger Undeutlichkeit verknüpft wäre.

[*Fig.* 187.] §. 40. Man kan noch verschiedene andere Eigenschaften der Seiten und Winkel der Dreyecke aus disen Sätzen herleiten. Wir aber können uns hier mit einer einzigen begnügen, welche diese ist. Wenn man in einem Dreyecke ABC einen beliebig angenommenen Winkel A in zween gleiche Winkel BAD und DAC schneidet, und verlängert die Linie AD welche den Winkel schneidet, bis sie auch die dem Winkel BAC entgegen gesetzte Seite BC, in D theilet: so verhalten sich diese Theile gegen einander, wie die Seiten des Dreyeckes ABC, an welchen sie liegen, und man hat BD:DC=AB:AC. Denn man ziehe durch C die gerade Linie CE mit der AD parallel, und verlängere die BA, bis sie diese CE in E schneidet: so ist der Winkel DAC dem Winkel ACE gleich, weil die Parallellinien AD, EC beyde von der Linie AC geschnitten werden, und dadurch diese Winkel entstehen. Weil aber auch BE eben diese Parallellinien AD, EC, schneidet, so ist auch BAD=AEC. Und da also die Winkel ACE und AEC, zween gleichen Winkeln DAC, BAD gleich sind, so sind sie auch selbst gleich, ACE=AEC. Folgends ist das Dreyeck AEC

gleich-

gleichschenklicht, und AE = AC; IV, 133. Weil aber auch in dem Dreyecke EBC, die AD mit der Seite CE parallel laufet, so hat man, VII, 10. BD : DC = AB : AE. Man setze an die Stelle der AE die ihr gleiche AC, so kommet die Proportion BD : DC = AB : AC, deren Richtigkeit wir erweisen solten.

Von der Aehnlichkeit der übrigen Figuren.

§. 41. Mit den übrigen Figuren, welche mehr als drey Seiten haben, giebet es bey weiten nicht so viele Weitläuftigkeit, wenn wir nur dasjenige betrachten wollen, so hauptsächlich nützlich ist. Sie mögen so viele Seiten haben als sie wollen, wenn sie nur einander ähnlich sind, so lassen sie sich in ähnliche Dreyecke zertheilen, indem man Queerlinien durch die Spitzen derjenigen Winkel ziehet, welche einander nothwendig gleich seyn müssen, wenn die Figuren ähnlich seyn sollen; und diese Queerlinien verhalten sich sodann gegen einander, wie jede zwo Seiten der Figuren, welche zwischen gleichen Winkeln liegen. Dieses ist das hauptsächlichste, so wir von solchen Figuren zu bemerken haben, und der Beweiß davon ist gar leicht.

[*Fig.* 188.] §. 42. Gesetzt, es seyn die Figuren ABCDE und abcde einander ähnlich, so müssen erstlich die Winkel der einen Figur, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, den Winkeln der andern Figur gleich seyn: und zweytens müssen die Seiten, welche in beyden Figuren zwischen den gleichen Winkeln liegen, einerley Verhältniß gegen einander haben, VII, 1. Wir setzen daß diejenigen Winkel gleich sind, welche wir mit einerley Buchstaben gezeichnet haben, so sind die Verhältnisse

AB : ab
BC : bc
CD : cd
DE : de
EA : ea, alle gleich, und jede zwo mit einander verknüpft, geben eine Proportion. Nun ziehe man die Queerlinien BE und be, zwischen den gleichen Winkeln B = b, und E = e. Es ist sogleich einzusehen, daß weil die Winkel A, a gleich sind, und die Seiten welche sie einschließen, einerley Verhältniß gegen einander haben, auch die Dreyecke ABE, abe ähnlich seyn, und BE zur be eben die Verhältniß haben werde, welche AB zur ab hat, VII, 28. daß demnach diese Verhältniß BE : be den vorigen gleichen Verhältnissen wird können beygesetzet werden.

Also

Also ist von diesen erstern Queerlinien gezeiget, daß ihre Verhältniß der Verhältniß jeder Seiten, die zwischen gleichen Winkeln liegen, gleich sey. Da nun aber die erwiesene Aehnlichkeit der Dreyecke ABE und abe auch die Gleichheit der übrigen Winkel in sich begreifet, nemlich ABE=abe, und AEB=aeb, die Winkel aber EBC und ebc übrig bleiben, wenn man von den gleichen Winkeln ABC und abc die Winkel ABE und abe wegnimmet, so müssen auch diese Winkel EBC und ebc gleich seyn. Sind nun aber diese Winkel EBC und ebc einander gleich, und ist ferner die Verhältniß EB:eb der Verhältniß BC:bc gleich, wie wir dieses ebenfals erwiesen haben, so ist wiederum das Dreyeck EBC, dem Dreyecke ebc ähnlich, und die Verhältniß der Queerlinien EC:ec ist mit der Verhältniß der Seiten BC:bc, und folgends der Verhältniß jeder andern zwo Seiten, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, einerley. Auf diese Art kan man ferner fortfahren die Gleichheit der Verhältnisse der Queerlinien mit den Verhältnissen der Seiten der Figuren, die zwischen gleichen Winkeln liegen, und die Aehnlichkeit der Dreyecke in welche die Figuren durch diese Querlinie zertheilet worden sind, zu zeigen. Man siehet leicht, daß dieses angehen werde, es mag die Figur aus so vielen Dreyecken bestehen, als sie wil.

§. 43. Da wir nun gezeiget haben, daß die ganzen Umkreise jeder zwo ähnlichen Figuren sich gegen einander, wie jede zwo Seiten der Figuren, die zwischen gleichen Winkeln liegen, verhalten, VII, 4. gegenwärtig aber erwiesen ist, daß die Verhältniß jeder dergleichen Seiten der Verhältniß der Querlinien, welche die Spitzen gleicher Winkel mit einander verknüpfen, gleich sey, so wird man schließen müssen, daß bey jeden ähnlichen Figuren die ganzen Umkreise sich wie solche Querlinien verhalten; und daß demnach in denjenigen Figuren, welche wir bis anhero betrachtet haben, die Verhältniß des Umkreises ABCDEA zu dem Umkreise abcdea der Verhältniß der Querlinie BE zur be, wie auch der Verhältniß der CE zu ce gleich sey. Nimmt man solche Theile des Umkreises, welche in den beyden Figuren zwischen den Spitzen gleicher Winkel liegen als ABCD, abcd, so verhält sich der erstere zu dem zweyten gleichfals wie BE zur be, oder wie CE zur ce, weil sich ABCD zu abcd ebenfalls wie BA zur ba verhält, VII, 4.

§. 44. Man kan diesen Satz umkehren und sagen, daß, wenn man zwo Figuren aus ähnlichen Dreyecken zusammen setzet, deren Seiten nemlich alle einerley Verhältniß gegen einander haben, und bey welchen diejenige Seiten gleich seyn, welche in den Figuren zusammen fallen sollen; die

also zusammengesetzte Figuren ebenfals einander ähnlich seyn werden: nur muß man sich in Acht nehmen, daß man die Dreyecke in der einen Figur nicht anders lege, als sie in der andern liegen. Ich setze, daß die Figuren ABCDE und abcde dergestalt aus ähnlichen Dreyecken zusammen gesetzet sind, und daß das Dreyeck ABE, dem Dreyecke abe ähnlich sey, EBC dem ebc und so weiter, so wird auch die Figur ABCDE der Figur abcde ähnlich seyn: das ist, es werden die Winkel der ersteren Figur den Winkeln der zwoten, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, gleich, und die Seiten, welche die gleiche Winkel einschließen, proportional seyn.

§. 45. Das letztere, daß die Seiten der beyden Figuren, welche auf einerley Art liegen, alle einerley Verhältnisse gegen einander haben müssen, ist ohne Weitläuftigkeit klar, weil man ähnliche, das ist, dergleichen Dreyecke angenommen hat, deren Seiten, die zwischen einerley Winkel und folgends auf einerley Art liegen, gleiche Verhältnisse gegen einander haben, und diese Seiten in der Figur auf einerley Art geleget worden sind. Es ist nemlich vermöge dieser Aehnlichkeit AB:ab=BE:be und BC:bc=BE:be, also ist auch AB:ab=BC:bc, und so rings herum. Was aber die Winkel der Figuren ABCDE, abcde anlanget, so sind diese aus gleichen Winkeln der Dreyecke entstanden. Denn eben der Begrif der Aehnlichkeit der Dreyecke schließet die Gleichheit der Winkel, welche in denselben auf gleiche Art liegen, in sich, und diese gleiche Winkel der Dreyecke sind in die Figuren auf gleiche Art gesetzet, und machen die Winkel der Figuren theils alleine, theils durch ihre Zusammensetzung aus. In dem ersten Falle, da die Winkel der Figur selbst die Winkel der Dreyecke sind, wie A, a, ist nicht weiter nöthig zu zeigen, daß diese Winkel der Figur einander gleich sind; in dem zweyten Falle aber entstehen die Winkel ABC, abc durch die Zusammensetzung gleicher Winkel ABE= und abe, und EBC=ebc, und sind also ebenfals einander gleich. Zuweilen werden auch die Unterschiede zweyer Winkel der Dreyecke in die Figuren gebracht; in welchem Fall die Gleichheit dieser Winkel der Figuren eben so leicht einzusehen ist.

§. 46. Man kan nach diesen Sätzen eine geradelinichte Figur beschreiben, welche einer gegebenen geradelinichten Figur ähnlich ist. Es sey die Figur ABCDE gegeben, und man soll eine Figur machen, welche ihr ähnlich sey. Es sey auch eine Seite ab gegeben, welche in der zu beschreibenden Figur, in Ansehung der Winkel und übrigen Seiten, eben so liegen soll, wie AB in der gegebenen Figur lieget. Denn man muß eine dergleichen

Sei-

Seite haben, und wenn sie nicht gegeben ist, muß man sie nach Belieben nehmen. So theile man die Figur ABCDE nach Belieben in Dreyecke, und setze auf die Seite ab das Dreyeck abe, so dem Dreyecke ABE ähnlich ist, und da ferner in der ersten Figur auf BE das Dreyeck EBC stehet, so setze man auch auf be das Dreyeck ebc, welches dem Dreyecke EBC ähnlich ist, und so fahre man in Zusammensetzung der Dreyecke fort, bis man in die Figur abcde so viele Dreyecke gebracht hat, als viele derer in ABCDE anzutreffen sind.

§. 47. Diese Anweisung begreifet verschiedene besondere Arten, eine geradelinichte Figur einer andern ähnlich zu machen, unter sich, welche man in der Ausübung gebrauchen kan. Denn man kan auf die Seite ab nach gar verschiedenen Gründen ein Dreyeck abe setzen, welches dem Dreyecke ABE ähnlich ist, und eben dieses ist von einem jeden andern der übrigen Dreyecke zu sagen. Man kan den Winkel a dem Winkel A gleich und die Seiten ab, ae den Seiten AB, AE proportional machen. Man kan den Winkel a dem Winkel A, und abe dem Winkel ABE gleich machen. Man kan aber auch die drey Seiten des Dreyecks abe den drey Seiten des Dreyecks ABE proportional machen, so wird immer das Dreyeck abe dem Dreyecke ABE ähnlich, und eben dieses ist auch von den übrigen Dreyecken allein zu sagen. Man bedienet sich in der Ausübung bey einem jeden Dreyecke derjenigen Zusammensetzung, welche nach den besondern Umständen die leichteste zu seyn scheinet. Ist zum Exempel die Linie ab halb so groß als die Linie AB, so müssen auch die übrigen Seiten und Querlinien der Figur abcdc die Helften seyn, der Seiten und Querlinien der Figur ABCDE welche mit jenen auf einerley Art liegen. Es sind demnach die Seiten und Querlinien der Figur abcde in diesem Falle aus den Seiten und Querlinien der Figur ABCDE leicht zu finden; und aus diesen lässet sich hernach die Figur abcde selbst zusammen setzen. Eben dieses ist auch zu sagen, wenn ab ein Drittel, ein Viertel, u. s. f. der AB ist, oder wenn ab zwey, drey, vier mal so groß ist als AB. Dergleichen Vortheile fallen in der Uebung gar leichte bey.

[*Fig.* 189.] §. 48. Auf eben die Art kan man auch verfahren, wenn man eine gebrochene Linie abcde einer andern gebrochenen Linie ABCDE ähnlich machen soll. Denn man kan auch dergleichen Linien ähnlich nennen, wenn ihre Theile aus welchen sie bestehen, wie sie auf einander folgen, gleiche Verhältnisse gegen einander haben und gleiche Winkel einschließen. Das ist, wenn die Verhältnisse AB:ab, BC:bc, CD:cd, DE:de sowol als die Winkel ABC, abc, wie auch BCD, bcd, und CDE, cde,

einander gleich sind, so kan man sagen, daß die gebrochene Linien ABCDE, und abcde einander ähnlich sind, und es ist leicht einzusehen, daß, was von solchen Linien richtig ist, auch in dem Falle statt haben müsse, wenn sie sich schließen und Umkreise der Figuren abgeben, welche Figuren sodann ähnlich werden, weil in diesem Fall der gegenwärtige Begrif mit dem ersten, welchen wir von der Aehnlichkeit der Figuren gegeben haben, überein komt. Weil aber die Betrachtung dergestalt gebrochener Linien angewendet werden wird, verschiedene andere nützliche Sätze darzuthun; so wollen wir uns die Weise, eine solche Linie einer andern ähnlich zu machen, noch von einer andern Seite vorstellen.

§. 49. Es sey die gebrochene Linie ABCDE, diejenige, welche einer andern ähnlich zu machen ist. Man nehme ein Punct F, wo man will, entweder in der Linie selbst, oder außer derselben auf dieser oder jener Seite, und ziehe von diesem Puncte F gerade Linien an alle Ecken, und an die äussersten Puncte der gebrochenen Linie FA, FB, FC, FD, FE. Nachdem dieses geschehen ist, setze man die Dreyecke afb, bfc und so weiter, welche den Dreyecken, deren Spitzen an F fallen, AFB, BFC und so ferner, ähnlich sind, eben so zusammen, wie die Dreyecke AFB, BFC &c. an einander liegen. Man kan anfangen wo man will, in der Mitte oder von einem oder dem andern der äußersten Dreyecke: aber es muß eine Seite des ersten Dreyeckes entweder gegeben seyn, oder man muß sie selbst nach Willkühr bestimmen. Aus derselben wird sodann die Größe aller übrigen gefunden, eben so, als wie dieses in der vorigen Anweisung, VII, 47. geschehen ist. Und es schicket sich der Beweis, welcher von der Richtigkeit jener Anweisung gegeben worden ist, auch vor die gegenwärtige, als die von jener im Grunde nicht verschieden ist. Man betrachte nur BCDEF und bcdef als Figuren, welche aus ähnlichen Dreyecken zusammen gesetzet sind; so siehet man sogleich, daß man schließen müsse, der Winkel EDC sey dem Winkel edc, und DCB dem dcb, wie auch CBF dem cbf, gleich: und die Verhältniß der Seiten DE:de den Verhältnissen CD:cd und BC:bc, wie auch BF:bf. Und solte man bey den letzten Seiten AB, ab und dem Winkel ABC Schwierigkeit finden, so wird diese leicht gehoben werden, wenn man betrachtet, daß, weil auch die Dreyecke ABF, abf einander ähnlich sind, die Verhältniß AB:ab der Verhältniß BF:bf, und folgends allen übrigen BC:bc, CD:cd und so fort, ebenfals gleich seyn müsse: wie auch, daß, weil in eben diesen Dreyecken ABF und abf die Winkel ABF und abf einander gleich seyn, aber auch die Winkel CBF, cbf einerley Größe haben: auch die Winkel

ABC, abc gleich seyn müssen, weil sie beyderseits nach Abzug der kleinern gleichen Winkel CBF, cbf von den größern ABF, abf übrig bleiben.

[*Fig.* 190. 191.] §. 50. Man kan sich hieraus einen gar bequemen Handgrif vorstellen, eine Figur zu verfertigen, welche einer andern Figur ähnlich ist, oder auch nur einen Theil des Umkreises einer Figur, einem Theile des Umkreises einer andern, ähnlich zu machen, wenn sonst weiter nichts gefordert wird, und die verfertigte Figur oder Linie liegen darf, wie man will. Es sey die gebrochene Linie ABCDE gegeben, und man soll eine andere Linie machen, welche ihr ähnlich ist: so ziehe man durch alle äußerste Puncte der Theile aus welchen jene bestehet, die geraden Linien AF, BF, CF und so ferner, nach einem beliebig angenommenen Puncte F, und verlängere diese Linien, wenn man will, über dieses Punct: nehme aber hernach in denselben die Puncte a, b, c, und so weiter, dergestalt, daß die Verhältnisse AF:Fa, BF, Fb, CF:Fc, DF:Fd, EF:Fe alle von einerley Größe werden, welches man sich vorstellen kan daß es geschehe, indem Fa halb so groß genommen wird, als FA, Fb halb so groß als FB, und so rings herum, oder was man sonst vor eine Weise erwehlen will, die Linien Fa, Fb, Fc, den Linien FA, FB, FC proportional zu machen. Sobald dieses geschehen ist, und man dergestalt die Puncte a, b, c, d, e gefunden hat; so kan man durch dieselbe die gebrochene Linie abcde ziehen, welche der gegebenen ABCDE ähnlich seyn wird. Denn es ist klar, daß die Dreyecke AFB und aFb einander ähnlich sind, weil ihre Winkel bey F einander gleich sind, und man den Seiten an diesen Winkeln einerley Verhältniß gegen einander gegeben hat. VII, 28. Eben dieses ist auch von allen übrigen Dreyecken BFC, bFc, CFD, cFd zu sagen, und hieraus folget die Aehnlichkeit der gebrochenen Linien ABCDE und abcde nach dem so erwiesen worden ist.

§. 51. Es verhält sich aber die gebrochene Linie ABCDE zu der andern abcde, welche ihr ähnlich ist, wie AF:Fa, oder wie BF:Fb. Denn wir haben VII, 4. gesehen, daß sich ABCDE zu abcde verhalte wie AB:ab oder BC:bc &c. weil man diese gebrochene Linien als Theile der Umkreise zweyer ähnlichen Figuren betrachten kan, deren Seiten sind AB, BC, CD, DE und ab, bc, cd, de. Die Verhältniß aber AB:ab ist der Verhältniß AF:Fa gleich, und so ist es rings herum.

Von der Aehnlichkeit der Theile der Cirkel.

[*Fig.* 192. 193.] §. 52. Wir können dieses auf die Cirkelbogen anwenden, und daraus zeigen, in welchen Umständen dergleichen Bogen ähn-

ähnlich sind. Es seyn um den Mittelpunct F zween Bogen AE, ae beschrieben, welche beyde zwischen einerley Halbmessern AFa und EFe oder AaF und EeF liegen, und mit denselben Ausschnitte ausmachen, deren Winkel an den Mittelpuncten F gleich sind. Diese Bogen AE und ae sind einander ähnlich. Denn man ziehe von dem in dem einen Bogen beliebig angenommenen Puncte B, den Halbmesser BF, und verlängere ihn, wenn es nöthig ist, bis an den andern Bogen. Gleichwie nun bey der gebrochenen Linie ABCDE in den unmittelbar vorhergehenden Zeichnungen, die Aehnlichkeit derselben mit der abcde daraus geschlossen worden ist, daß die Verhältniß AF: aF der Verhältniß BF: bF, und diese wieder der Verhältniß CF: cF gleich war, und so fort: so folget ebenfals die Aehnlichkeit der Bogen AE und ae daraus, wenn man das Punct B in dem Bogen ABE nach Belieben nehmen kan, ohne daß jemals die Verhältniß AF: aF der Verhältniß BF: bF ungleich werde. Man siehet aber leicht, daß diese Verhältnisse niemals ungleich seyn können; weil BF: bF sowol als AF: aF immer halbe Durchmesser der Bogen sind; und also nicht einmal die Glieder der Verhältnisse verschiedene Größen haben können.

§. 53. Es haben demnach auch solche Bogen gegen ihre Halbmesser einerley Verhältniß: das ist, wie sich der Bogen AE gegen seinen Halbmesser AF verhält, so verhält sich auch der Bogen ae gegen seinen Halbmesser aF, VII, 51. oder wenn wir uns der gewöhnlichen Zeichen bedienen, AE: AF = ae: aF. Hieraus aber folget durch die Verwechselung AE: ae = AF: aF. Das ist, zween Cirkelbogen, die zu Ausschnitten gehören, deren Winkel bey dem Mittelpunct einander gleich sind, verhalten sich gegen einander, wie die Halbmesser dieser Ausschnitte, oder ihre Cirkel.

[*Fig.* 194.] §. 54. Die Halbmesser sind die Helften der Durchmesser, und die Helften jeder Größen verhalten sich allezeit wie die ganzen Größen. Oder 2AF ist der Durchmesser des Cirkels, welcher entstehet, wenn man den Bogen AE ergänzet, und 2aF ist der Durchmesser des Cirkels, von welchem der Bogen ae ein Theil ist. Da nun die Proportion AE: ae = AF: aF richtig ist, so wird auch die nachfolgende AE: ae = 2AF: 2aF ihre Richtigkeit haben, VI, 103. und zween dergleichen Bogen, deren Winkel an dem Mittelpuncte einander gleich sind, werden sich auch gegen einander wie die Durchmesser ihrer Cirkel verhalten. Ich habe dieses und das folgende desto deutlicher vorzustellen, eine andere Figur gezeichnet, in welcher zween Cirkelkreise AEG, aeg um einerley Mittelpunct F beschrieben sind. Nach dieser Zeichnung muß die letzte Proportion also ausgedrücket wer-

werden AE:ae = EG:eg, oder mit verwechselten Gliedern dergestalt AE: EG = ae:eg.

§. 55. Man siehet auf eben die Art, daß auch die Verhältniß des halben Umkreises EAG zu dem halben Umkreise eag der Verhältniß der Durchmesser EG:eg, oder der Verhältniß der Halbmesser EF:eF, gleich seyn müsse; und mit der Verhältniß des ganzen Umkreises EAGE zu dem Umkreise eage ist es eben so beschaffen. Man kan dieses auch dergestalt schliessen. Nicht nur die Ausschnitte EFA, eFa, sondern auch die Ausschnitte AFG, aFg haben an ihrem Mittelpuncte gleiche Winkel. Gleichwie also die Verhältniß EA:ea der Verhältniß EF:eF gleich ist, so ist auch die Verhältniß AG:ag eben dieser Verhäteniß EF:eF gleich, und demnach EA: ea = AG:ag. Man setze die Glieder dieser gleichen Verhältnisse zusammen, und mache EA + AG, ea + ag, das ist EAG und eag. Die Verhältniß wird dadurch nicht geändert, VI, 112. und es bleibet also auch EAG: eag = EF:eF = EG:eg. Wie sich aber der halbe Umkreis EAG zu dem halben Umkreise eag verhält, so verhält sich auch der ganze Umkreis EAGE zu dem ganzen Umkreise eage.

§. 56. Wenn man die Glieder dieser Proportion versetzet, so siehet man wieder, daß sich der Umkreis EAGE zu seinem Durchmesser EG verhalte, wie sich der Umkreis eage zu seinem Durchmesser eg verhält. Und wenn man demnach die Verhältniß des Umkreises eines Cirkels zu seinem Durchmesser durch Zahlen oder gerade Linien angeben könte, so wäre dadurch die Verhältniß eines jeden andern Cirkelkreises zu seinem Durchmesser bekant. Wir verstehen aber unter der Größe des Umkreises eine gerade Linie, welche, wenn sie in die gehörige Ründung gebogen wird, mit dem Umkreise des Cirkels zusammen fällt.

§. 57. Und da also so wohl die Verhältniß der ganzen Umkreise jeder zween Cirkel, als auch die Verhältniß zweer Bogen dieser Cirkel, deren Halbmesser gleiche Winkel einschließen EA:ea, der Verhältniß ihrer Durchmesser gleich ist, oder da EAGE:eage = EG:eg, und EA:ea = EG:eg, so folget, daß auch die Verhältniß der Umkreise EAGE:eage, der Verhältniß der gedachten Bogen EA:ea gleich sey, oder daß EAGE: eage = EA:ea, woraus ferner folget EAGE:EA = eage:ea, wenn man nur die mittleren Glieder verwechselt, wie allezeit geschehen kan. Nemlich, jede zween Bogen zweyer Cirkelkreise, deren äußerste Halbmesser AF und EF, wie auch aF und eF bey dem Mittelpuncte F gleiche Winkel einschließen, verhalten sich gegen einander, wie die ganzen Umkreise, zu welchen sie gehören.

§. 58.

§. 58. Will man bey der Proportion, EA:EAGE=ea:eage die Begriffe von den Verhältnissen getheileter Größen anwenden, so kan man denselben auch also ausdrücken: VI, 66. Wenn man die Umkreise EAGE und eage in eine gewisse Zahl gleicher Theile theilet, und zum Exempel einen jeden derselben 360 gleiche Theile giebet, so lässet sich der Bogen EA aus den gleichen Theilen des Umkreises EAGE eben so zusammen setzen, wie der Bogen ea aus den Theilen des Bogens eage zusammen gesetzet wird, und wenn zum Exempel ea 72 Theile hält, deren 360 den Umkreis eage ausmachen, so bestehet auch EA aus 72 solchen Theilen, deren 360 in dem ganzen Umkreise EAGE enthalten sind.

§. 59. Und dieses ist auch von der Helfte, oder dem vierten Theile des Umkreises richtig. Die Verhältniß des ganzen Umkreises EAGE zu dem ganzen Umkreise eage, ist der Verhältniß des halben Umkreises EAG zu dem halben Umkreise eag gleich, wie auch der Verhältniß des vierten Theiles des Umkreises EAGE zu dem vierten Theile des Umkreises eage. Da nun die Verhältniß des Bogens EA zu dem Bogen ea, der Verhältniß der Umkreise EAGE:eage gleich ist; so wird eben diese Verhältniß EA:ea auch der Verhältniß der halben Kreise EAG:eag, und der Verhältniß der vierten Theile der Umkreise gleich seyn: oder die Proportion EA:ea=EAG:eag wird ihre Richtigkeit haben, wie auch die folgende, welche aus dieser entstehet, wenn man die mittleren zwey Glieder verwechselt EA:EAG=ea:eag. Aus dieser letzteren Proportion wird geschlossen, daß, wenn man die halben Cirkelkreise EAG und eag nach einerley Zahl in gleiche Theile theilet, auch die Bogen EA und ea gleiche Zahlen von solchen Theilen enthalten werden. Nur muß man die Theilchen so kleine nehmen, daß noch kleinere Theilchen, in Ansehung des Ganzen, in keine Betrachtung kommen können.

[*Fig.* 195.] §. 60. Es ist leicht einzusehen, daß alles was von der Aehnlichkeit der Bogen gesaget worden, von solchen Bogen alleine gelte, welche zu zween Ausschnitten gehören, deren Winkel an dem Mittelpuncte gleich sind, und daß die Bogen solcher Ausschnitte, deren Winkel an dem Mittelpuncte verschiedene Größen haben, ohnmöglich ähnlich seyn können. Wenn man demnach auf zwo gerade Linien AB, ab aus C und c die halben Cirkelkreise ABD, abd beschreibet, und theilet dieselbe in D und d, dergestalt, daß sich AD zum ADB verhalte, wie sich ad zum adb verhält; so müssen die Winkel ACD und acd einander gleich werden. Denn weil dasjenige, so von der Aehnlichkeit zweyer Bogen und von ihren gleichen Verhältnissen zu den ganzen oder halben Umkreisen gesaget worden, nur in dem

dem Falle statt finden kan, wenn die Winkel an den Mittelpuncten gleich sind, und weil sich demnach in unserer Figur AD zum ADB ohnmöglich so verhalten kan, wie sich ad zum adb verhält, wenn nicht der Winkel ACD, dem Winkel acd gleich ist; so folget, daß, weil man die Verhältnisse AD : ADB, und ad : adb von einerley Größe gemacht hat, diese Winkel ACD, acd einander nothwendig gleich seyn müssen.

§. 61. Wenn man also den Umkreis des halben Cirkels ADB in eine gewisse Zahl gleicher Theile theilet, was man vor eine annehmen wil, zum Exempel 180, und theilet adb in eben so viele gleiche Theile, giebet hernach dem Bogen AD eine gewisse Zahl der Theile des halben Umkreises ADB und dem Bogen ad eben so viele Theile seines halben Umkreises adb, und ziehet die Halbmesser DC, dc; so werden die Winkel ACD, acd von einerley Größe. Denn eben dieses ist richtig, man mag sonst wie man wil die Verhältnisse AD : ADB und ad : adb einander gleich machen. Wir werden dieses sogleich noch auf eine andere Art erweisen.

[*Fig.* 196. 197.] §. 62. Der Satz, welchen wir hierzu gebrauchen, und welcher auch an sich von großem Nutzen ist, ist nachfolgender: Jede zween Winkel ABC und ABD verhalten sich gegen einander, wie sich die Bogen AC und AD gegen einander verhalten, welche aus ihren Spitzen B mit einerley Oefnung des Cirkels beschrieben sind, und es ist allezeit ABC : ABD = AC : AD. Wir haben in der Figur die zween Winkel an eine Seite AB dergestalt geleget, daß auch ihre Spitzen in B zusammen fallen: man siehet aber leicht, daß, was von dergestalt gelegeten zween Winkeln richtig ist, auch alsdann gelten müsse, wenn sie von einander abgesondert sind. Die Richtigkeit aber der angegebenen Proportion einzusehen, darf man nur den Bogen AD in eine beliebige Zahl gleicher Theile theilen, und so oft es nöthig ist, diese Theilchen bis über C fortsetzen, welches vermittelst der Puncte E, F, G, H &c. geschehen kan, sodann aber die gerade Linien EB, FB, GB, HB und die übrigen nach dem Mittelpunct ziehen. Es werden dadurch die einzelnen Winkel um B, ich meyne ABE, EBF .... GBH ... alle gleich, V, 3. und demnach wird der Winkel ABD in so viele gleiche Winkel getheilet, als viele der Theile des Bogens AD sind. Hieraus aber ist unser Satz klar, ohne daß es nöthig ist, dabey viele Worte zu machen. Denn man sihet leicht, daß das Punct C in das Theilchen des Bogens GH falle, welches von dem ersten Theilchen EA um so viele Theile abstehet, als viele Winkel zwischen dem ersten ABE und dem Winkel GBH stehen, in welchen die Linie CB fällt. Nemlich gleich wie GH in der 196 Figur das vierte der gleichen Theile des Bogens AD ist, so ist auch

GBH das vierte der gleichen Theile des Winkels ABD, und gleich wie in der 197 Zeichnung das Punct C in das siebente Theilchen des Bogens ADH fället, so fället auch CD in das siebente Theilchen des Winkels ABH: und so ist es allezeit, man mag den Bogen, und mit demselben den Winkel in so viele gleiche Theile theilen, als man wil. Wenn aber dergleichen bey allen Theilungen zutrift; so haben wir gesehen, VI, 71. daß sich AC zum AD verhalte, wie sich ABC zum ABD verhält.

§. 63. Oder man erwege, daß, indem der Radius AB, sich um das Punct B drehet, und mit seinem äußersten Puncte A die Bogen AC und AD beschreibet; immer ein Winkel von der Größe des ABE erzeuget werde, indem ein Bogen, der so groß ist, als AE, erzeuget, und zu dem vorigen zugesetzt wird. Also ist das Wachsthum, mit welchen nach und nach die Bogen AF, AC und AH entstehen, demjenigen gleichförmig, mit welchem die zu diesen Bogen gehörige Winkel ABF, ABC, ABH hervorgebracht werden. Und durch dieses gleichförmige Wachsthum entstehen die Bogen AC und AD mit denen dazu gehörigen Winkeln ABC, ABD zugleich. Hieraus aber ist wieder klar, daß AC:AD=ABC:ABD, VI, 78.

§. 64. Ist nun der Winkel ABD gerade, so ist AD ein Quadrant, V, 10. Es verhält sich demnach ein jeder Winkel ABC zu einem geraden Winkel ABD, wie sich der Bogen, der innerhalb des Winkels AC aus seiner Spitze beschrieben worden, zu dem Quadranten AD verhält; und man kan durch diese Verhältniß der Bogen einen jeden Winkel anzeigen. Wenn man weiß, wie sich AD zum AC verhält, so kan man allezeit schließen. AD:AC=ABD:ABC, und da das dritte Glied bekant ist, nemlich der rechte Winkel, so kan das vierte Glied oder der Winkel ABC nicht unbekant seyn. Es ist leicht einzusehen, daß dieses richtig sey, es mag der Winkel ABC kleiner oder größer seyn als ein rechter Winkel, und folgends AC kleiner oder größer als ein Quadrant.

§. 65. Also können durch dergleichen Verhältnisse der Bogen alle Winkel angegeben werden; aber man muß zum voraus setzen, daß man einen Bogen in so viele gleiche Theile theilen könne, als man wil, wenn die Verhältniß des Quadranten zu dem Bogen des Winkels, dessen Größe man anzeigen wil, durch Zahlen gegeben ist; denn sonst wäre man nicht im Stande, den Quadranten in so viele gleiche Theile zu theilen, als dazu erfordert werden, daß man aus einer gehörigen Anzahl solcher Theile hernach den andern Bogen zusammen setzen könne. Oder, wenn die Verhältniß des Bogens AC zu dem Quadranten AD durch gerade Linien ausgedrückt wird, so muß man wissen zu diesen zwo geraden Linien und zu dem

dem Quadranten AD die vierte Proportionalgröße zu finden. Allein dieses letztere zu weisen, ist nicht in der Macht der Geometrie, das erstere kan man zwar ohne einigen merklichen Fehler thun, weil man einen jeden Bogen in so viele gleiche Theile theilen kan als wan wil, wie wir gelehret haben V, 79. Es ist aber dieses eine mechanische und keinesweges eine geometrische Arbeit.

§. 66. Indessen pfleget man deswegen, weil, so bald die Verhältniß des Bogens eines Winkels zu einem Quadranten bekant ist, auch der Winkel bekant wird, den Bogen, welcher aus der Spitze eines Winkels zwischen seinen Schenkeln beschrieben wird, das **Maaß des Winkels** zu nennen. Zwar kan man nicht sagen, daß ein Bogen jemals einen Winkel messe, wenn man recht eigentlich reden wil. Denn das Maaß, wenn man das Wort im eigentlichen Verstande nimmet, muß allezeit, wenn es wiederhohlet wird, oder wenn seiner Theile eines oder etliche genommen werden, dasjenige ausmachen, so gemessen werden sol. Man misset eine Länge durch Ellen, oder durch Ruthen und Schuhe, das ist, durch andere Längen, und nicht durch Pfunde, und die Gewichte der Dinge misset man durch andere Gewichte, und nicht durch Ellen. Ein Bogen aber mag getheilet und wiederhohlet werden wie man wil, so wird dadurch kein Winkel; es kan demnach der Bogen ohnmöglich das eigentliche Maaß des Winkels seyn. Es ist demnach bloß dieses die Ursache, warum man den Bogen das Maaß des Winkels nennet, mit welchem er den Ausschnitt eines Cirkels ausmachet, weil der Bogen mit dem Winkel zugleich anwächset, so daß immer gleiche Theile des Bogens mit gleichen Theilen des Winkels zugleich entstehen. Woraus folget, daß, so bald als die Verhältniß eines Bogens zu einem Quadranten gegeben wird; eben dadurch die Verhältniß des Winkels zu einem rechten Winkel bekant werde. Dadurch aber wird der Winkel selbst gegeben, weil die Größe des rechten Winkels allezeit bekant ist. Es giebet nemlich die Verhältniß eines Bogens zu dem Quadranten an, wie sich der Winkel desselben Bogens aus dem rechten Winkel, aus welchem die Größe der Winkel bestimmet zu werden pfleget, und welcher so zu reden, als der Maaßstab der Winkel angesehen wird, ausmessen lasse, eben so wie eine Zahl anzeigen kan, wie oft eine Elle in einer andern Länge enthalten ist. Und in dem Verstande wird der Bogen das Maaß des Winkels genennet.

[*Fig.* 198. 199.] §. 67. Es können bey ähnlichen Bogen noch einige Kleinigkeiten angemerket werden, welche aus dem, so gesagt ist, gar leicht fließen. Aehnliche Bogen verhalten sich wie ihre Sehnen; das ist, wenn die Cir-

kelbogen ABC und abc einander ähnlich sind, so ist die nachstehende Proportion richtig, ABC:abc=AC:ac. Und dieses ist fast ohne weiterem Beweiß klar, wenn man nur betrachtet, daß diese Sehnen AC und ac in den ähnlichen Bogen auf einerley Art gezogen sind, VII, 38. Oder, wenn man die Sache deutlicher einsehen will, so ziehe man nach den Mittelpuncten der Bogen D, d die Halbmesser AD, CD, wie auch ad, cd. Weil nun die Bogen ABC und abc ähnlich sind, so sind die Winkel bey D, d einander gleich, VII, 60. Und da ferner die Verhältniß AD:DC der Verhältniß ad:dc gleich ist, weil in beyden die vorhergehenden Glieder den nachfolgenden gleich sind: so sind VII, 28. die Dreyecke ADC, adc ähnlich, und die Verhältniß AD:ad ist der Verhältniß AC:ac gleich. Da nun aber die erstere dieser Verhältnisse AD:ad der Verhältniß der ähnlichen Bogen ABC:abc gleich ist, VII, 53. so muß auch die letztere AC:ac eben dieser Verhältniß der ähnlichen Bogen gleich seyn, und man hat demnach ABC:abc=AC:ac.

§. 68. Dergleichen Abschnitte ABC, abc, deren Bogen einander ähnlich sind, sind auch selbst einander ähnlich. Nichts ist leichter einzusehen als dieses; wenn wir nur dasjenige im Gedächtniß haben, so oben von den ähnlichen Figuren überhaupt gesaget worden ist, VII, 44. aus welchen es auf mehr als eine Art fließet. Doch es ist genug daß wir betrachten, daß diese Abschnitte aus den ähnlichen Ausschnitten ABCD, abcd entstehen, indem man von diesen beyderseits die ähnlichen Dreyecke ACD, acd wegnimmet, oder zu denselben hinzu setzet. Wir haben aber gesehen, daß überhaupt alle Figuren ähnlich sind, welche übrig bleiben, wenn man von ähnlichen Figuren ähnliche Dreyecke wegnimmet, oder zu denselben hinzu setzet. Wenigstens fließet dieses aus dem VII, 45. gegebenen Beweiß ohne Umschweif.

Die Verhältniß verschiedener geraden Linien, so einen Cirkel schneiden oder berühren.

§. 69. Wir haben nunmehro bey dieser Materie nichts mehr übrig, als daß wir noch einige Proportiones bey solchen geraden Linien betrachten, welche den Umkreis eines Cirkels schneiden oder berühren. Es wird sich aber alles, was hievon zu sagen ist, auf einen einzigen Hauptsatz bringen lassen. Dieser betrift zwo gerade Linien, welche von einem nach Belieben angenommenen Puncte beyderseits so lange fortgezogen werden, bis sie den Umkreis

kreis des Cirkels erreichen. Die Theile dieser Linien zwischen dem Umkreise und dem beliebig angenommenen Puncte sind einander proportional.

[*Fig.* 200. 201.] §. 70. Man nehme innerhalb oder außerhalb des Umkreises eines Cirkels ein Punct A wo man wil, und ziehe durch dasselbe zwo gerade Linien, welche den Umkreis des Cirkels in B und C; D und E schneiden, oder schneiden würden, wenn man sie verlängerte, so sind die vier Theile dieser Linien dergestalt proportional, daß man sagen kan BA:AE=AD:AC, und welches aus diesem fließet BA:AD=AE:AC; und diese Proportion ist zu erweisen. Man ziehe zu dem Ende BE und DC; so siehet man leicht, daß die Winkel an dem Umkreise bey E und C beide auf dem Bogen BD stehen. Da nun alle Winkel an dem Umkreise eines Cirkels, die auf einem Bogen stehen, einander gleich sind, V, 58. so sind auch diese Winkel BED und BCD einander gleich. Es sind aber auch die einander bey A entgegen stehende, oder in einen zusammenfallende Winkel gleich, und haben demnach die Dreyecke CAD und EAB zween gleiche Winkel, nemlich die bey A, und sodann ACD=AEB. Also sind diese Dreyecke ACD, AEB einander ähnlich, VII, 23. und ihre Seiten, die zwischen gleichen Winkeln liegen, sind proportional. Es ist also BA:AD=AE:AC, oder BA:AE=AD:AC, denn diese Seiten liegen zwischen den gleichen Winkeln, wie man leicht siehet.

[*Fig.* 200. 202.] §. 71. Wir wollen die Folge des ersten Falles dieses Satzes betrachten, da A innerhalb den Cirkel fället, ehe wir weiter gehen. Wenn eine der beyden Linien in A in zwey gleiche Theile getheilet ist, zum Exempel, wenn AD=AE, so gehet die Proportion BA:AD=AE:AC in einem fort, und ist zusammenhangend. Denn man kan hier vor das dritte Glied AE, die ihm gleiche Linie AD setzen, wodurch die Proportion wird BA:AD=AD:AC, und dadurch siehet man, was gesagt worden ist, deutlich. Dieses kan uns eine Anweisung geben, wie zwischen zwo gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden ist. Gesetzt, die zwo gegebene geraden Linien wären BA und AC, und man wolte die mittlere Proportionallinie zwischen denselben haben, so müste man nur, nachdem man einen Cirkelkreis durch B und C nach Belieben gezogen hat, hernach die Linie DAE in denselben durch das Punct A so legen, daß die Theile derselben DA und AE gleich würden, so wäre ein solcher Theil AD oder AE die mittlere Proportionallinie.

[*Fig.* 202.] §. 72. Diese Lage aber der Linie DE, in welcher sie von dem Puncte A in zwey gleiche Theile geschnitten wird, bekommet man am leichtesten, wenn man BAC vor dem Durchmesser annimmet, und sodann

dann DAE durch das Punct A auf denselben perpendicular ziehet, V, 19. wodurch die Auflösung der Aufgabe zwischen zwo gegebenen geraden Linien eine mittlere Proportionallinie zu finden, gar leichte wird. Es seyn die zwo gegebenen geraden Linien BA, AC: denn man muß vor allen Dingen diese Linien dergestalt an einander setzen, daß sie mit einander eine gerade Linie BC ausmachen. Diese Linie BC nehme man vor den Durchmesser eines Cirkelkreises an, welchen man beschreibet, indem man nemlich, wie bekant genug ist, BC in zwey gleiche Theile theilet, und dadurch den Mittelpunct und den Radius findet. Ist der Cirkel beschrieben, so ziehe man nunmehro auf BC durch A die Sehne DE perpendicular, so ist DA oder EA die gesuchte mittlere Proportionallinie, und man kan sagen BA : AD = AD : AC; oder BA : AE = AE : AC. Es ist aus dem so gesagt worden ist, die Richtigkeit dieser Auflösung gar leicht einzusehen, und fast kein weiterer Beweis nöthig. Nach dem allgemeinen Satze ist BA : AD = AE : AC. Weil aber auf die Sehne EAD der Durchmesser BAC perpendicular gezogen ist, so wird ED in A in zwey gleiche Theile getheilet, V, 19. und es ist AD = AE. Wenn man demnach in dieser Proportion vor AD die AE setzet, so wird allerdings BA : AE = AE : AC, oder auch BA : AD = AD : AC.

§. 73. Es werden also in der That zwischen den zwo gegebenen Linien AB und AC zwo mittlere Proportionallinie AD und AE gefunden. Weil aber diese Linien in nichts, als in ihrer Lage, von einander verschieden sind, da nemlich die eine über und die andere unter die BC fällt; so braucht man in der Ausübung die eine Helfte des Cirkelkreises gemeiniglich nicht, sondern findet die mittleren Proportionallinien zwischen zwo geraden Linien BA, AC, indem man auf BC den halben Cirkel BEC beschreibet, und sodann auf den Durchmesser BC an das Punct A die Perpendicularlinie AD aufrichtet, und sie bis an den Cirkelkreis in D verlängert. Man kan dieses in Form eines Satzes dergestalt verfassen: wenn man auf den Durchmesser eines Cirkels BC eine Perpendicularlinie AD setzet, welche bis an den Umkreis reichet, so ist diese AD die mittlere Proportionallinie zwischen den Theilen des Durchmessers BA und AC, und man kan sagen BA : AB = AD : AC.

[*Fig.* 201. 203.] §. 74. Es gehet auch in dem andern Falle, wenn A außer dem Cirkel genommen ist, die Proportion AB : AD = AE : AC in einem fort, wenn AD der AE gleich wird. Dieses kan nicht geschehen, so lange ADE den Cirkel würklich schneidet, denn da ist allezeit AE größer als AD. Da aber die Proportion AB : AD = AE : AC überhaupt gilt, es mögen die Linien AC, AD gezogen seyn, wie man will, wenn sie nur den Umkreis

kreis antreffen; so wird dieselbe auch dadurch nicht aufgehoben, wenn AE sich von der AC immer weiter und weiter entfernet, und dadurch der Theil derselben ED, welcher in den Cirkel fällt, immer kleiner und kleiner wird, und sich endlich gar verlieret, indem die Puncte D und E in eines zusammen fallen. Dieses geschiehet in dem Falle, wenn AD den Cirkel berühret. In diesem Falle fällt kein Theil desselben in den Cirkel, die Puncte D und E fallen zusammen, und die Länge DE verschwindet. Man wird demnach auch in diesem Falle die erwiesene Proportion formiren können, und sagen, AB: AD = AE: AC, aber weil hier AD = AE, so kan man eines vor das andere nehmen, und auch setzen AB: AD = AD: AC.

§. 75. Hieraus ist klar, daß die Berührungslinie aus dem Puncte A, nemlich AD, die mittlere Proportionallinie sey zwischen den Theilen AB und AC einer andern Linie ABC, welche aus einem Puncte A der Berührungslinie dergestalt gezogen ist, daß sie den Umkreis des Cirkels in einem Puncte B schneidet, und sich ferner in C in dem Umkreise endiget. Und dieses kan eine neue Anweisung geben zwischen zwo geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden. Es seyn die gegebene Linien AB und AC, deren kleinere man auf die größere, aus dem Puncte A geleget hat. Man beschreibe einen Cirkelkreis durch die beyden Puncte B und C, und ziehe durch A eine gerade Linie AD, welche diesen Cirkel berühre: diese ist die gesuchte mittlere Proportionallinie. Die Anweisung ist leicht zu begreifen, aber die Ausübung ist etwas schwerer als die vorige, und erfordert außer dem bereits beschriebenen Cirkel, noch die Beschreibung eines andern Cirkels, vermittelst welchen man das Punct DE findet, an welches die Berührungslinie AD zu ziehen ist, V,73.

[*Fig.* 203.] §. 76. Solte man aber bey dem gegebenen Beweise, daß AB: AD = AD: AC Schwierigkeit finden, so ziehe man, wie in der 201 Figur, aus welcher die gegenwärtige 203 fließet, die Linien DC und BD: so ist der Winkel BDA, welchen die Berührungslinie DA mit der Sehne DB machet, gleich dem Winkel DCB, der bey C an den Umkreis stößet, und auf eben dem Bogen BD stehet, welchen die Sehne BD abschneidet, V,61. Da nun auch der Winkel A den beyden Dreyecken ADB, ACD gemeinschaftlich ist, so sind zween Winkel des erstern dieser Dreyecke ABD, nemlich A und ADB gleich zween Winkeln des andern ACD, nemlich dem A und dem DCA. Demnach sind VII,23. diese Dreyecke ähnlich, und es verhält sich in dem kleinern BA zur AD, wie sich in dem größern AD zur AC verhält, und also ist die Proportion AB: AD = AD: AC richtig.

§. 77. Wenn bey dieser Figur DC durch den Mittelpunct gehet, und

also ein Durchmesser des Cirkels ist, so wird die Erfindung der mittleren Proportionallinie nach dieser Art viel leichter. In diesem Falle ist der Winkel ADC, welchen die Berührungslinie AD mit dem Durchmesser DC machet, gerade, V, 48. und EBC ist ebenfals ein gerader Winkel, denn er stehet in dem halben Cirkel DBC, V, 68. Demnach ist ADC ein rechtwinklichtes Dreyeck, und aus der Spitze des rechten Winkels D ist auf die entgegen gesetzte Seite AC die Perpendicularlinie DB gefallen, die Seite aber AD ist die mittlere Proportionallinie zwischen AB und AC.

[*Fig.* 204.] §. 78. Man pfleget dieses insgemein auf eine andere Art zu beweisen, und wir wollen diesen Beweis mit beybringen, weil er uns die Sache deutlicher machen kan. Wir haben in dem halben Cirkel ADC das rechtwinklichte Dreyeck ADC beschrieben, und aus der Spitze des rechten Winkels D die gerade Linie DB auf die entgegen gesetzte Seite, das ist, auf den Durchmesser AC perpendicular gezogen: es ist zu beweisen, daß die Proportion richtig sey: AB: AD = AD: AC. Es giebet sich aber dieser Beweis gar leicht, wenn man betrachtet, daß in den beyden rechtwinklichten Dreyecken ADC, ABD die Winkel bey A gemeinschaftlich sind. Denn daraus folget, daß diese Dreyecke ADC, ABD einander ähnlich sind, weil zween Winkel des einen ADC und A zween Winkeln des andern, ABD und A, gleich sind. Es sind also die Seiten dieser Dreyecke proportional, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, und demnach verhält sich in dem Dreyecke ABD die Seite AB zu der Seite AD, wie sich in dem Dreyecke ADC die Seite AD zur Seite AC verhält. Kurz, es ist AB: AD = AD: AC.

§. 79. Man siehet leicht, daß man auf eben die Art erweisen könne, daß auch das Dreyeck BDC dem Dreyecke ADC ähnlich sey. Denn auch das Dreyeck DBC hat bey B einen rechten Winkel, und der Winkel C ist demselben und dem Dreyeck ADC gemeinschaftlich. Also kan man auch sagen BC: CD = CD: AC. Es ist aber dieser Satz von dem vorigen gar nicht unterschieden.

§. 80. Man kan noch einige andere Proportionen aus der Aehnlichkeit dieser Dreyecke ziehen, welche anzuführen nicht eben nöthig ist. Wir bemerken nur, daß aus dem gegenwärtigen Satze die mittlere Proportionallinie zwischen AB und AC folgendergestalt zu finden sey. Nachdem man die kleinere dieser Linien aus A auf die größere AC geleget: so beschreibe man auf die größere dieser Linien AC einen halben Cirkel ADC. An das Punct B, wo sich die kleinere Linie endiget, setze man BD auf AC perpendieular, welche den Umkreis in D

schnei-

schneiden wird. Die Linie AD, welche nunmehro leicht kan gezogen werden, ist die mittlere Proportionallinie, welche man suchte.

§. 81. Weil das Dreyeck ABD sowol als das Dreyeck DBC, dem Dreyecke ADC ähnlich ist; so sind auch diese Dreyecke ABD, DBC einander ähnlich. Nemlich weil in den Dreyecken ABD, ADC die rechten Winkel ABD und ADC gleich sind, und A=A, so ist auch ADB=C, und folgends sind in den zwey rechtwinklichten Dreyecken ABD, DBC, außer den geraden Winkeln bey B, auch die Winkel ADB und C gleich, und demnach diese Dreyecke einander ähnlich. Vergleichet man nun wieder in diesen Dreyecken die Seiten, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, so verhält sich in dem Dreyecke ABD die Seite AB zu der Seite BD, wie in dem Dreyecke DBC sich die Seite DB zur Seite BC verhält, das ist, es ist AB:BD=BD:BC. Denn diese Seiten liegen in beyden Dreyecken zwischen gleichen Winkeln. Dieses ist der Satz, welchen wir oben VII,73. auf eine andere Art herausgebracht haben.

§. 82. Dieser Nutze der Proportion, welche der Umkreis eines Cirkels giebt, indem er zwo gerade Linien schneidet, oder eine derselben schneidet und die andere berühret, ist groß; denn es ist gar öfters zwischen zween gegebenen die mittlere Proportionallinie zu finden, wenn man die Geometrie anwendet. Es lässet sich aber vermittelst eben der Figuren, die wir bisher betrachtet haben, eine andere allgemeine Aufgabe auflösen, auf welche ebenfals eine Menge anderer besonderer Aufgaben gebracht werden kan; und welche deswegen bey der Anwendung der Geometrie eben so unentbehrlich ist. In der 200 Zeichnung ist AB:AE=AD:AC, die Linien AE, AD, stehen in der Proportion in der Mitte, oder zwischen den äußern Gliedern AB, AC, und die Summe derselben ist DE. Man kan zwar zwischen diese äußere Glieder der Proportion AB, AC auf unendlich viele Arten zwey andere Glieder setzen, welche die Proportion voll machen: denn man kan eines dieser Glieder, als AE, nach Gefallen annehmen, und vermittelst der bekanten Reael VII, 13, zu diesen drey Gliedern das vierte finden. Oder wenn man sich an die Zeichnung halten will, so kan man sich vorstellen, daß durch A außer der DE eine andere gerade Linie gezogen sey, die sich beyderseits in dem Umkreis des Cirkels endiget. Die Theile dieser neuen Linie werden ebenfals in der Proportion zwischen AB und AC zu stehen kommen. Aber die Summe dieser Theile wird meistentheils größer oder kleiner seyn als ED, welches die Summe ist der Theile AE und AD, die in der zuerst gefundenen Proportion AB:AE=AD:AC zwischen AB und AC stehen. Die Frage ist, wie man zwischen AB und AC zwo Linien setzen soll, wel-

welche nicht nur die Proportion voll machen, sondern auch, wenn man sie zusammensetzt, eine verlangete Summe geben?

§. 83. In dem Fall aber, welchen die 201 Zeichnung vorstellet, da ebenfals die Proportion AB:AE=AD:AC, oder AB:AD=AE:AC statt hat, ist DE der Unterschied der zwey mittlern Glieder AE und AD. Wenn der Cirkel und die Linie ABC unverändert bleiben, man öfnet aber den Winkel A nach und nach, so wird dieser Unterschied DE immer kleiner und kleiner, bis er endlich gar verschwindet, wenn, wie in der 203 Zeichnung ADE den Cirkel nicht mehr schneidet sondern nur berühret. Die Frage ist hier, wie man die Linie ADE ziehen müsse, damit DE eine gewisse gegebene Größe bekomme, indem noch immer die Proportion AB:AD=AE:AC richtig bleibt. Diese zwo Aufgaben sind noch aufzulösen. Gleichwie wir aber bey der Erfindung der mittlern Proportionallinien etwas von denen eben wieder betrachteten Figuren abgegangen sind; also werden wir uns auch gegenwärtig nicht so genau an dieselbe binden.

[*Fig.* 410.] §. 84. Es seyn erstlich zwo gerade Linien Q und R gegeben; man soll zwischen dieselbe zwo andere setzen, zu deren erstern sich Q verhält, wie die zweyte zur R; diese mitlern Linien aber sollen von einander um die Länge P verschieden seyn, das ist, die P soll übrig bleiben, wenn man die kleinere der zu findenden Linien von der größern abziehet. Dieses zu verrichten ziehe man zwo gerade Linien, welche einander bey A unter einen beliebigen Winkel schneiden: denn dieser Winkel muß nicht nothwendig gerade seyn, ob man ihn wol immer gerade machen kan. Auf einer dieser Linien trage man aus A den gegebenen Unterschied P, und mache AB =P. Auf die andere trage man aus eben dem Punct A nach der einen Seite die Q, und nach der andern die R, indem man nemlich machet AC =Q und AD=R. Alsdann theile man sowol die AB bey E in zwey gleiche Theile, als auch die CD bey F. Auf beyde Linien setze man an E und F die Perpendicularlinien EG und FG, und verlängere sie bis sie einander schneiden. Sie thun dieses in unserer Zeichnung bey G; und dieses ist der Mittelpunct des Cirkels, dessen Umkreis die gesuchte Linien abschneiden wird: sein Radius aber ist DG. Man siehet leicht, daß, wenn man um den Mittelpunct G einen Cirkel beschreibet, dessen Umkreis durch D gehet, eben dieser Umkreis auch durch C gehen müsse, weil C von dem G so weit entfernet ist als D. Eben dieser Umkreis aber wird auch die zu beyden Seiten verlängerte AB schneiden. Geschiehet nun dieses in H und K, so sind AH und AK die zwo gesuchte Linien. Man kan nemlich sagen Q:AH = AK:R, und der Unterschied der Linien AH und AK ist P.

§. 85.

§. 85. Die Richtigkeit dieser Auflösung wird gar leicht eingesehen. Es ist erstlich zu beweisen, daß die Proportion Q : AH = AK : R statt habe; und zum zweyten, daß AK — AH = P. Das erste siehet man alsbald, wenn man sich erinnert daß AC der Q und AD der R gleich gemacht worden sey. Denn es ist AC : AH = AK : AD, VII. 70. Also auch Q : AH = AK : R. Was aber das zweyte anlanat, so ist AB bey E in zwey gleiche Theile getheilet worden, AE = EB. Weil aber GE aus dem Mittelpunct des Cirkels G auf die Sehne desselben HK perpendicular fällt; so theilet diese Linie GE auch die Sehne HK in zwey gleiche Theile HE = EK. Vergleicht man dieses mit dem vorigen AE = EB, so siehet man, daß auch AH der BK gleich seyn müsse, und also AK — BK = AK — AH. Nun ist AK — BK = AB und diese AB haben wir der P gleich gemacht. Also ist auch AK — AH = P.

§. 86. Man kan die Proportion, welche dergestalt ergänzet wird, bloß durch Buchstaben ausdrucken, wenn man eine der zwo Linien AK, AH ebenfals mit einem einzelnen Buchstaben benennet, wie gleich Anfangs AB durch P, AC durch Q und AD durch R angedeutet worden ist. Denn wenn man AK mit X benennet, so wird AH durch X — P ausgedrückt, und die Proportion stehet also Q : X — P = X : R. Wird aber AH durch X ausgedrückt, so ist AK = X + P, und die Proportion stehet also: Q : X = X + P : R. In allen dergleichen Proportionen werden die mittlern Glieder durch die gegenwärtige Auflösung gefunden.

§. 87. Wenn P nichts ist, das ist, wenn das eine der mittlern Glieder so groß seyn soll als das andere, so fallen in der Zeichnung die drey Puncte A, E, B, in E zusammen. Alles übrige aber bleibt, und HE sowol als EK wird die mittlere Proportionallinie zwischen den zwo gegebenen CA und AD, welche wir bereits auf andere Arten zu finden wissen. Uebrigens siehet man leicht, daß die Auflösung dieser Aufgabe immer möglich sey, von was Größe auch die drey Linien AC, AD und AB gegeben werden. Nur müssen AC und AD einige Größe haben. Daß aber AB auch nichts seyn könne, haben wir eben gesehen.

§. 88. Es seyn zweytens zwo gerade Linien Q und R gegeben, und man soll zwischen dieselbe zwo andere setzen, zu deren ersterer sich die Q verhält, wie die zweyte zur R; diese mittlern Linien aber sollen, wenn man sie zusammen setzet, die Summe P geben. Man ziehe von einem Puncte A zwo gerade Linien AB, AD die einen beliebigen Winkel mit einander machen: denn auch hier ist es gar nicht nöthig sich auf dem rechten Winkel einzuschreuken, ob man wohl denselben immer brauchen kan, wenn man will,

will. Auf eine dieser Linien trage man AB, welche der gegebenen Summe P gleich ist; auf die andere aber trage man AC=Q. und AD=R, beide nach einer Seite. Man theile sowohl die AB bey E in zwey gleiche Theile als die CD bey F, und setze auf jede dieser Linien eine andre perpendicular, die eine an E, und die andere an F. Diese Linien werden, wenn man sie verlängert, einander schneiden. Das Punct G, in welchem sie sich schneiden ist nun wieder der Mittelpunct eines Cirkels, welchen man beschreiben muß, und CD sein Radius. Wird dieser Cirkel beschrieben, so gehet sein Umkreis auch durch C, welches Punct von G eben so weit entfernet ist, als D. Es schneidet aber auch dieser Umkreis die Linie AB meistentheils; und wenn er sie in H und K schneidet, so sind AH, AK die zwo gesuchte Mittellinien. Es ist nemlich die Proportion Q:AH=AK:R richtig, und es ist über dieses AH+AK=P.

§. 89. Beydes ist nunmehro fast ohne Beweis einzusehen. Es ist AC=Q, und AD=R. Nun aber ist AC:AH=AK:AD, VII, 70. also auch Q:AH=AK:R. Ferner ist AB bey E in zwey gleiche Theile getheilet; und weil GE aus dem Mittelpunct des Cirkels auf seine Sehne HK perpendicular fällt, so ist auch HE=EK. Ziehet man nun diese Theile von den vorigen ab, so bleibt an der einen Seite so viel übrig als an der andern. Also ist AH=KB, und folgends AH+AK=AK+KB=AB. Nun ist AB=P, also auch AH+AK=P.

§. 90. Will man die Proportion, die durch diese Aufgabe ergänzt wird, wieder durch bloße Buchstaben ausdrücken, so kan man, mit Beybehaltung der vorigen Benennungen, die AH oder AK mit X bezeichnen. Ist erstlich AH=X, so wird AK=P—X. Denn es ist AK=HB, und wie man sogleich siehet HB=AB—AH=P—X. Also wird die Proportion Q:AH=AK:R ausgedrückt, wenn man schreibt: Q:X=P—X:R. Wird aber zweytens AK durch X vorgestellt, so wird KB=AH=P—X, und eben die Proportion wird also ausgedrückt: Q:P—X=X:R, welcher Ausdruck, durch die Verwechselung der mittlern Glieder mit dem vorigen völlig einerley wird.

§. 91. Der um G mit der Oefnung GD beschriebene Cirkel wird von der geraden Linie AB nicht nothwendig geschnitten. Es hindert nichts, daß nicht GE so groß seyn könte, als der Abstand des Puncts D von dem Mittelpunct G, und würklich wird GE endlich so groß, als dieser Radius,

wenn

wenn das Punct A sich in der AC von dem Puncte C entfernet, indem der Winkel A keine Veränderung leidet. Dadurch wird GE immer größer und größer, und endlich so groß als die Entfernung des Puncts D von G, welches der halbe Durchmesser des Cirkels ist. Dieser Fall wird in der 412 Zeichnung vorgestellet, in welcher zugleich der Winkel A gerade gemacht ist, weil dadurch alles deutlicher wird. Ist nun GE so groß als GD, so berühret zwar die AB den Cirkel, sie schneidet ihn aber nicht, V. 44. und die zwo Linien AH und AK endigen sich beide in E. Also ist AE hier wieder die mittlere Proportionallinie zwischen AC und AD.

§. 92. Wird aber GE noch größer, indem der Winkel A noch immer seine Größe behält, und nur das Punct der Linie AB sich in der AC von C entfernet: so schneidet nicht einmal AB den Umkreis, sondern gehet bey demselben vorbey. Also ist es in dem Fall nicht möglich zwischen AC und AD zwo mittlere Linien zu finden, deren Summe die gegebene AB wäre. Es höret also die Auflösung mit dem Fall auf möglich zu seyn, wenn GE so groß wird als CD.

Achter Abschnitt.

Von der Zusammensetzung der Verhältnisse.

§. 1.

So weit konten wir in der Geometrie kommen, indem wir bloß die einfachen Verhältnisse zum Grunde legeten. Das übrige kommet großen Theils auf zusammengesetzete Verhältnisse an, welche wir uns demnach ebenfalls bekant machen müssen, ehe wir weiter gehen, damit sodann alles in einem unzerrissenen Zusammenhang abgehandelt werden könne. Es stehet uns nemlich noch die Betrachtung der Oberflächen und Cörper vor, nachdem wir bey den geraden Linien und dem Cirkelkreise alle Eigenschaften betrachtet haben, welche einem angehenden Geometra zu wissen nöthig sind. Bey der Vergleichung aber der Oberflächen und Cörper kömt das meiste auf zusammengesetzte Verhältnisse an.

Begriffe von der Zusammensetzung der Verhältnisse.

§. 2. Wir müssen uns vor allen Dingen einen Begrif davon machen, was diese **Zusammensetzung der Verhältniß** eigentlich heiße, und dieses wird am allerleichtesten geschehen können, wenn wir die Sache zuerst durch Zahlen erläutern, und sodann auch auf die ungetheilte Größen übergehen. Die Verhältniß der Zahl 5 zu 3 ist die Art und Weise wie die Zahl 5 aus der 3 entstehet, VI, 41. Man kan aber 5 unmittelbar aus der 3 machen, indem man die Zahl 3 in ihre Einheiten theilet, und deren fünfe zusammen setzet. Stellet man sich dieses vor, so übersiehet man die Verhältniß 5:3 allerdings. Man stellet sich aber in diesem Fall die Verhältniß als einfach vor, weil man 5 unmittelbar aus der 3 gemacht hat. Es kan aber auch die 5 aus der 3 durch einen oder etliche Absätze erhalten werden, folgendergestalt: Man mache aus der Zahl 3 erstlich die 30, indem man nemlich diese Zahl durch 10 multipliciret; und diese Zahl 30 theile man durch 6, so kommet wieder die Zahl 5. Indem man die Zahl 5

auf

auf diese Art aus der Zahl 3 machet, stellet man sich zwar ebenfals die Verhältniß der 5 zu 3 vor: aber man betrachtet diese Verhältniß nicht mehr als einfach. Man machet die 5 nicht unmittelbar aus der 3, sondern man machet aus der 3 erstlich eine andere Zahl 30, und indem man betrachtet, wie diese Zahl 30 aus der 3 entstehe, so stellet man sich die Verhältniß 30:3 vor. Aus der ersteren dieser Zahlen 30 machet man sodann die 5, welches wieder nicht geschehen kan, wenn man sich nicht die Art und Weise, wie 5 aus der 30 wird, daß ist, die Verhältniß 5:30, vorstellet. Und also machet man sich einen Begrif von der Verhältniß 5:3, indem man auf die zwo Verhältnisse 30:3 und 5:30 Acht hat. Dieses will man andeuten, wenn man saget, man setze die Verhältniß 5:3 aus den zwo Verhältnissen 5:30 und 30:3 zusammen: und in diesem Verstand nennet man die Verhältniß 5:3 zusammengesetzt.

§. 3. Eben so ist es, wenn man mehrere Zahlen annimmet. Man schreibe, nach Belieben, einige Zahlen vor sich, als diese nachstehende:

5 10 12 9 3

und stelle sich vor, daß die erste Zahl vor der letzten, 9, aus der letzten 3 werde, wenn man diese Zahl dreymal nimt. Weil nun also die Zahl 9 unmittelbar aus der 3 gemacht wird, so stellet man sich die Verhältniß 9:3 als einfach vor. Aus dieser Zahl 9 kan man weiter die Zahl 12 machen, welche die zweyte von der letzten ist, wenn man $\frac{4}{3}$ der 9 annimt. Eben damit wird auch diese Zahl 12 aus der letzten 3 gemacht. Denn weil man die erste Zahl von der letzten, 9, aus der 3, und aus der 9 wieder die vorhergehende 12 gemacht hat, so ist allerdings diese 12 endlich aus der 3 gemacht worden. Stellet man sich also die Art vor, wie 9 aus der 3, und aus der 9 wieder 12 wird, so erlangt man allerdings eben dadurch einen Begrif von der Art und Weise, wie 12 aus der 3 wird: und folgends stellet man sich die Verhältniß 12:3 dadurch vor, wenn man sich die Verhältnisse 9:3 und 12:9 vorstellet. Eben dadurch aber, weil man sich die Verhältniß 12:3 nicht auf einmal, sondern durch zwo Verhältnisse 9:3 und 12:9 vorstellet, setzet man die Verhältniß 12:3 aus den ebenerwehnten 9:3 und 12:9 zusammen. Gehet man weiter, und betrachtet, daß man aus der Zahl 12 wieder die Zahl 10 machen könne, wenn man $\frac{5}{6}$ der erstern Zahl 12 annimt, so stellet man sich wieder die Verhältniß 12:10 auf einmal vor, und als einfach. Setzen wir aber zum Voraus, daß man auch die Verhältnisse 12:9 und 9:3 wisse, so bekomt man eben dadurch, einen Begrif von der Verhältniß 10:3. Aber diese Verhältniß 10:3 wird nunmehro aus den drey Verhältnissen 9:3, 12:9 und 10:12 zusammen

 gesetzt,

gesetzt, welche sämtlich bekant seyn müssen, wenn man sich die Verhältniß 10:3, auf die Art, die wir hier angeben, vorstellen soll. Setzet man nun zu den vorigen noch die Verhältniß 5:10, so erlanget man endlich einen Begrif von der Verhältniß 5:3, denn man siehet, wie 5 aus der 3 entstehen könne. Allein weil man 5 aus der 3 nicht unmittelbar gemacht, sondern durch vier Absätze, indem man nemlich aus der 3 erstlich 9, sodann aus der 9 die Zahl 12, aus dieser wieder 10, und sodann erst aus 10 die 5 heraus gebracht hat; und weil man sich die vier Verhältnisse 9:3, 12:9, 10:12 und 5:10 alle vorstellet, indem man sich einen Begrif von der Verhältniß 5:3 machet, so setzet man die Verhältniß 5:3 aus den angezeigten vier Verhältnissen zusammen.

§. 4. Man siehet aus dieser Erklärung, daß nicht die Beschaffenheit der Verhältnisse die Ursach sey, warum man sie einfach oder zusammen gesetzt nennet, oder warum man saget, eine Verhältniß sey aus zwo, drey oder vier andern zusammen gesetzt; sondern daß alles bloß darauf ankomme, wie wir uns eine Verhältniß vorstellen. Eine jede Verhältniß 5:3 ist an sich einfach. Ich stelle sie mir aber alsdenn als aus zwoen zusammen gesetzt vor, wenn ich ein Glied 9, zwischen 5 und 3 setze, und mir die Verhältniß 5:3 dadurch vorstelle, daß ich betrachte, wie 9 aus 3, und aus der 9 wieder 5 wird. Eben diese Verhältniß 5:3 hätte ich auch aus dreyen, oder vieren, oder mehrern zusammen setzen können. Es kommet alles bloß auf die Art an, wie man sich die Verhältnisse vorstellen will. Nicht die Sache selbst bewegt uns eine Verhältniß einfach oder zusammen gesetzt zu nennen, sondern bloß die Art, wie wir uns dieselbe vorstellen.

§. 5. Und zwar ist es gänzlich willkührlich, was man vor eine Zahl zwischen die Glieder einer Verhältniß setzet, wenn man dieselbe aus zwo Verhältnissen zusammen setzen will; und was man vor zwo Zahlen zwischen die Glieder einer Verhältniß bringt, wenn man die Verhältniß aus dreyen zusammen setzen will; wie auch, was vor drey Zahlen man wehlet, um sie zwischen die Glieder einer Verhältniß zu setzen, wenn man sich dieselbe, als aus vier Verhältnissen zusammen gesetzt, vorstellen will. Die Verhältniß 3:2 wird aus den zwoen 3:*n* und *n*:2 zusammen gesetzt; was auch *n* vor eine Zahl bedeuten mag, wenn nur ihre Größe bekant ist. Und eben die Verhältniß 3:2 wird auch aus den drey Verhältnissen 3:*n*, *n*:*m* und *m*:2 zusammen gesetzt, wie auch aus diesen vieren 3:*n*, *n*:*m*, *m*:*p*, *p*:2, und auch hier kan man sich unter den Buchstaben *n*, *m*, *p*, jede beliebige Zahlen vorstellen, sie mögen gleich oder ungleich seyn, wie man will.

§. 6.

§. 6. Man darf aber die Verhältnisse, aus welchen man eine andere zusammen setzet, durch jede Zahlen ausdrücken, welche sie ausdrücken können. Der Begrif der Verhältniß wird dadurch nicht geändert, ja er wird zuweilen dadurch erleichtert, wenn man nemlich kleinere Zahlen annimt, eine Verhältniß auszudrücken, welche vorher durch größere ausgedrücket worden ist. Man kan sagen, die Verhältniß 12:2 sey aus der Verhältniß 12:6 und 6:2 zusammen gesetzet. Man kan aber auch diese zwo Verhältnisse durch kleinere Zahlen ausdrücken, die erstere 12:6 durch 2:1, und die zwote 6:2 durch 3:1, und sodann sagen: die Verhältniß 12:2 werde aus diesen zwo Verhältnissen 2:1 und 3:1 zusammen gesetzet, und so bey allen übrigen Zusammensetzungen. Man siehet leicht ein, daß dieses in dem Begriffe nichts ändere. Denn wenn man von 2 anfänget, und vor dieselbe eine Zahl setzen will, die sich zur 2 verhält, wie 3 zur 1: so kan man keine andere Zahl finden, als die vorige 6, weil die Verhältniß 6:2 der Verhältniß 3:1 gleich ist. Und wenn man weiter vor 6 wieder eine andere Zahl setzen will, welche sich zu der 6 verhält, wie 2 zu 1, so kan dieses wieder keine andere Zahl seyn als die 12, weil 12:6=2:1. Man komt also auf eben die Zahl 12, wenn man aus der Zahl 2 eine andere, nach den Verhältnissen 3:1 und 2:1, machet, auf welche man komt, wenn man aus 2 eine Zahl nach den zwo Verhältnissen 6:2 und 12:6 heraus bringet. Ein mehreres soll dasjenige, so hier gesaget wird, nicht anzeigen.

§. 7. Sind aber die zwo Verhältnisse, aus welchen eine andere zusammen gesetzet ist, einander gleich, so nennet man die zusammen gesetzete Verhältniß im Lateinischen eine **verdoppelte Verhältniß**, und ist eine Verhältniß aus drey gleichen Verhältnissen zusammen gesetzet, so sagt man diese gleiche Verhältniß sey **verdreyfältiger**, und dadurch die zusammengesetzete Verhältniß heraus gebracht worden. Einem teutschen Leser können diese Worte in seiner Sprache schwerlich gefallen. Wir werden demnach also diese Benennungen unserer Mundart etwas gemäßer folgendergestalt einrichten. Bey den Zahlen 27, 9, 3 ist die Verhältniß 27 zu 3 aus den zwo Verhältnissen 27:9 und 9:3 zusammen gesetzet, und diese Verhältnisse sind einander, und der Verhältniß 3:1 gleich. Dieses und dergleichen wollen wir ausdrücken, indem wir sagen, die Verhältniß 27:3 bestehe aus der Verhältniß 27:9, oder 9:3, oder 3:1 zweymal genommen, oder die Verhältniß 27:3 sey aus der Verhältniß 3:1 zweymal genommen, zusammen gesetzet. Und da bey den Zahlen 81, 27, 9, 3 die Verhältniß 81 zu 3 aus den drey Verhältnissen 81:27, 27:9, 9:3 zusammen gesetzet ist, und diese

Verhältnisse einander, und der Verhältniß 3:1 wieder gleich sind, so wollen wir dieses dadurch ausdrücken, wenn wir sagen, die Verhältniß 81:3 bestehe aus der Verhältniß 81:27, oder 27:9, oder 9:3, oder 3:1, dreymal genommen, oder sie sey aus der Verhältniß 3:1 dreymal genommen, zusammen gesetzt. Eben so ist bey den Zahlen 81, 27, 9, 3, 1 die Verhältniß 81:1 aus der Verhältniß 3:1 viermal genommen, zusammen gesetzt worden, oder sie bestehet aus der Verhältniß 3:1, viermal genommen. Noch viel bequemer aber ist es, wenn man saget, die aus den zwo gleichen Verhältnissen 27:9 und 9:3 zusammen gesetzte Verhältniß 27:3 sey zweymal so hoch, als eine dieser Verhältnisse 27:9 oder 9:3 oder auch 3:1, und eine aus dreyen gleichen Verhältnissen zusammen gesetzte Verhältniß sey dreymal so hoch, als jede dieser letztern, und so in allen übrigen Fällen. Die Höhe welche der Verhältniß dadurch zugeschrieben wird, ist von ihrer Größe VI, 30. wohl zu unterscheiden. Eine höhere Verhältniß ist nicht allzeit größer als eine niedrigere, sondern öfters kleiner. So ist die Verhältniß 2:32 viermal so hoch als die Verhältniß 16:32, weil sie aus den vier gleichen Verhältnissen 16:32, 8:16, 4:8 und 2:4 zusammen gesetzt wird; aber diese viermal höhere Verhältniß 2:32 ist viel kleiner als die niedrigere 16:32.

§. 8. Man kan dieses beydes sich durch Zeichen folgendergestalt kurz und deutlich vorstellen. Wenn A, B, C, D &c. und M, N, O, P &c. beliebige Zahlen bedeuten, und es ist

$$\begin{aligned} A:B &= M:N \\ B:C &= O:P \\ C:D &= Q:R \\ D:E &= S:T \end{aligned}$$

so sagt man, die Verhältniß A:C sey aus den zwo Verhältnissen M:N und O:P zusammen gesetzt, welche den zwo Verhältnissen A:B und B:C gleich sind; und die Verhältniß A:D sey aus den drey Verhältnissen M:N, O:P, Q:R zusammen gesetzt, welche den drey Verhältnissen A:B, B:C, C:D gleich sind, und die Verhältniß A:E sey aus den vier Verhältnissen M:N, O:P, Q:R, S:T zusammen gesetzt, welche den vier Verhältnissen A:B, B:C, C:D, D:E gleich sind, und so fort. In den ersteren Verhältnissen A:B, B:C, und so weiter, komt jedes Glied, außer A und E, zweymal vor, und stehet einmal forne in der Verhältniß, das andere mal hinten.

§. 9. Sind aber die Verhältnisse M:N, O:P und so fort, einander

gleich, und kan man also eine derselben vor die übrigen alle setzen, und folgends schreiben:

$$A:B = M:N$$
$$B:C = M:N$$
$$C:D = M:N$$
$$D:E = M:N$$

so bestehet die Verhältniß A:C aus der Verhältniß M:N, zweymal genommen; oder die Verhältniß A:C ist zweymal so hoch, als die Verhältniß M:N, die Verhältniß A:D besteht aus eben der Verhältniß M:N, dreymal genommen, sie ist dreymal so hoch, als die Verhältniß M:N; und die Verhältniß A:E ist aus der Verhältniß M:N, viermal genommen, zusammen gesetzet; oder sie ist viermal so hoch, als die Verhältniß M:N.

§. 10. Dieses alles ist nunmehro gar leicht auch auf ungetheilte Größen anzuwenden. Man darf nur setzen, daß in den unmittelbar vorhergehenden Absätzen, die Buchstaben A, B, C, wie auch M, N, P und so fort, Größen bedeuten, welche eben nicht aus gleichen Theilen zusammen gesetzet sind, und auf dieselben die erklärte Redensarten anwenden. Man siehet aus dem, so gesaget worden ist, leicht, daß man auch in dem Falle, wenn die Größen A, B, C, und M, N, P, nicht getheilet sind, sagen könne, es sey in dem 8 Absatz die Verhältniß A:C aus den zwoen A:B und B:C zusammen gesetzt, wie auch, daß die Verhältniß A:D durch die Zusammensetzung der drey Verhältnisse A:B, B:C, C:D, und die Verhältniß A:E durch die Zusammensetzung der vier Verhältnisse A:B, B:C, C:D und D:E heraus komme. Eben so leicht begreift man auch, daß man die Verhältniß A:B durch die Verhältniß zwoer andern Größen M:N ausdrücken könne, und die Verhältniß B:C durch die Verhältniß O:P, und so weiter; und daß, wenn dieses geschehen ist, auch hier die Verhältniß A:C aus den zwoen M:N und O:P, und die Verhältniß A:D aus den dreyen M:N, O:P, Q:R zusammen gesetzt werde, und so die übrigen.

§. 11. Eben so leicht kan man auch unter den Buchstaben A, B, C, D, E des 9 Absatzes, sich Linien, oder nach Belieben andere Größen, vorstellen, deren jede gegen die nachfolgende eine Verhältniß hat, welche der Verhältniß M:N gleich ist, wodurch alle diese Verhältnisse A:B, B:C, C:D und D:E gleich werden. Ist dieses, so ist, wie bey Zahlen, die Verhältniß A:C aus der Verhältniß M:N zweymal genommen, zusammen gesetzt, jene ist zweymal so hoch als diese, und die Verhältniß A:D bestehet aus der Verhältniß M:N, dreymal genommen, oder sie ist drey-

mal so hoch als diese; die Verhältniß A:D aber ist aus eben der Verhältniß M:N, viermal genommen, zusammen gesetzt, und folgends viermal so hoch als diese Verhältniß M:N.

§. 12. Von diesen zusammengesetzten Verhältnissen sind wieder verschiedene Regeln zu merken, welche wir dergestalt erweisen werden, daß sie sich vor alle Arten der Größen schicken. Weil aber die Größen, welche aus gleichen Theilen zusammengesetzt sind, und deren Verhältniß sich durch Zahlen ausdrücken lässet, einige Eigenschaften vor den übrigen voraus haben, und sonst leichter zu übersehen sind, so wollen wir, wie auch vor dem geschehen, uns noch ferner derselben bedienen, das übrige zu erläutern und desto deutlicher zu machen.

Wie die zusammengesetzten Verhältnisse aus den einfachen zu finden sind.

§. 13. Wir bemerken vor allen Dingen, daß, wenn ein Verhältniß, deren erstes Glied A gegeben ist, aus zwo gegebenen Verhältnissen M : N und O:P zusammengesetzt ist, man nachfolgendergestalt verfahren müsse, wenn man diese Verhältniß herausbringen will. Man findet erstlich zu M, N und A die vierte Proportionalzahl, oder die vierte Proportionallinie. Beydes zu verrichten, haben wir gewiesen, VI, 125. VII, 13. es kan also die Zahl oder Größe, die mit M, N und A die Proportion voll machet, hier als bekant angenommen und durch B vorgestellet werden. Hat man diese B, so sage man weiter, wie O:P, so B zur vierten Zahl oder Linie, welche ebenfals gefunden werden kan. Stellen wir uns nun diese unter C vor, so ist die Verhältniß A:C aus den zwo Verhältnissen M:N und O:P zusammengesetzt. Man siehet dieses leicht ein, da es aus den gegebenen Begriffen unmittelbar folget. Wir haben gemacht

A:B = M:N, und

B:C = O:P, also ist allerdings VIII,8. die Verhältniß A:C aus den zwoen M:N und O:P zusammengesetzt.

§. 14. Zum Exempel: Es ist eine Verhältniß aus den zwoen 2:3 und 4:7 zusammen zu setzen, und das erste Glied dieser Verhältniß soll 5 seyn: so ist die Bedeutung des Buchstabens A nunmehro 5, M bedeutet 2, N ist = 3, O = 4 und P = 7. Man sage also $2:3 = 5:\frac{3\times 5}{2}$. Diese

Zahl

Zahl ist diejenige, welche B bedeutet. Nun sage man ferner $4:7 = \frac{3\times5}{2} : \frac{3\times5\times7}{2\times4}$; so ist diese die Zahl C, und demnach $C = \frac{105}{8} = 13\frac{1}{8}$, und die Verhältniß $5 : 13\frac{1}{8}$ ist aus den zwo Verhältnissen 2:3 und 4:7 zusammengesetzt.

§. 15. Man siehet, daß man auf eben die Art verfahren müsse, wenn man eine Verhältniß, deren erstes Glied gegeben ist, aus drey, vier oder mehreren andern zusammen setzen soll. Es sey das erste Glied noch A; man soll eine Verhältniß aus den vieren M : N, O : P, Q : R und S : T zusammensetzen: so mache man nach und nach

M : N = A : B
O : P = B : C
Q : R = C : D
S : T = D : E.

Man suche nemlich zu M, N und A die vierte Proportionalzahl, oder Linie B. Diese nehme man sobald sie gefunden ist, an, und suche wieder zu O, P und B die vierte Proportionalgröße C. Mit dieser verfahre man, wie vorhero mit B, und eben so mache man es ferner, bis die gegebenen Verhältnisse alle gebraucht sind: so ist die Verhältniß A : E die gesuchte, und aus den gegebenen Verhältnissen zusammengesetzt. Die Sache ist klar, und brauchet keiner weitern Erläuterung, wenn man nur das vorhergehende wohl verstanden hat.

§. 16. Hieraus siehet man dasjenige nochmals deutlich, so schon in dem vorigen erinnert worden ist, daß nemlich in der Zusammensetzung der Verhältnisse nichts geändert werde, durch was vor Glieder man die Verhältnisse ausdrücken mag, welche zusammen zu setzen sind, VIII, 6. Man drücke die Verhältniß M : N durch diese oder jene Zahlen oder Linien aus, oder man mache $M : N = m : n$, setze hernach an die Stelle M : N die Verhältniß $m : n$, und verfahre übrigens, wie gewiesen worden ist, so wird das Glied B nicht anders gefunden, als vorher; und wenn man hernach anstatt O : P, die ihr gleiche Verhältniß $o : p$ gebraucht, so findet man in der Proportion $o : p = B : C$ das Glied C wieder so groß als vorher, da man gemacht hat O : P = B : C, und so ist das immer. Man kan also vor eine jede der Verhältnisse, aus welchen eine neue zusammen zu setzen ist, eine andere Verhältniß annehmen, welche jener gleich ist, ohne daß dadurch in der zusammengesetzten Verhältniß etwas geändert werde.

§. 17. Ist aber das erste Glied der Verhältniß, welche man durch die Zusammensetzung anderer herausbringen soll, nicht gegeben, so kan man

es nach Belieben annehmen. Denn man bekommet zwar nicht eben die Glieder, aber doch eben die Verhältniß, man mag das erste Glied nehmen wie man will. Es sey aus den zwo Verhältnissen 2:3 und 4:5 eine Verhältniß zusammen zu setzen. Man nehme 1 vor das erste Glied derselben, so muß man sagen, wie 2 zu 3, so das angenommene Glied 1 zu der vierten Zahl, welche ist $\frac{3}{2}$, und noch einmal wie 4 zu 5, so die gefundene $\frac{3}{2}$ zu der vierten $\frac{15}{8}$. Die Verhältniß $1:\frac{15}{8}$ ist nunmehro aus den zwo gegebenen 2:3 und 4:5 zusammen gesetzt. Man nehme zweytens vor die erste Zahl 2, und sage wieder wie 2:3, so 2 zu der vierten, welche hier 3 ist, und ferner wie 4 zu 5, so die gefundene 3 zu $\frac{15}{4}$, so ist die zusammengesetzte Verhältniß nunmehro $2:\frac{15}{4}$. Es ist aber auch diese mit der vorigen $1:\frac{15}{8}$ einerley. Denn man multiplicire die beyden Glieder der Verhältniß $2:\frac{15}{4}$ durch 4, so wird $8:15 = 2:\frac{15}{4}$, die beyden Glieder der Verhältniß $1:\frac{15}{8}$ aber multiplicire man durch 8, so wird $8:15 = 1:\frac{15}{8}$. Weil nun die beyden Verhältnisse $2:\frac{15}{4}$ und $1:\frac{15}{8}$ einer dritten, nemlich der Verhältniß 8:15 gleich sind, so sind sie auch einander gleich. Und so kommen immer einerley Verhältnisse durch eine dergleichen Zusammensetzung zwoer gleichen Verhältnisse heraus, man mag das erste Glied nehmen wie man will.

§. 18. Und daß dieses allezeit richtig sey, und bey den angenommenen Zahlen nicht etwa nur von ohngefehr zutreffe, kan folgendergestalt gezeiget werden. Man mache $M:N = A:B$, aber auch $M:N = a:b$,

und $O:P = B:C$, wie auch $O:P = b:c$;

so sind die Verhältnisse $A:C$ und $a:c$ aus eben den Verhältnissen $M:N$ und $O:P$ zusammen gesetzt, aber die ersten Glieder derselben A und a sind verschieden. Wir behaupten, daß dennoch die Verhältniß $A:C$ der Verhältniß $a:c$ gleich, und die Proportion $A:C = a:c$ richtig seyn werde. Denn wenn man die erstern zwo Proportionen $M:N = A:B$ und $M:N = a:b$ ansiehet, so findet man, daß man aus denselben schließen könne $A:B = a:b$, und eben so folget aus den zwo letztern $B:C = b:c$. Man verwechselt die mittleren Glieder dieser Proportionen, VI,117. so bekommet man $A:a = B:b$ und $B:b = C:c$. Da nun also die Verhältniß $A:a$ der Verhältniß $B:b$ sowol gleich ist, als die Verhältniß $C:c$, so müssen auch diese Verhältnisse einander gleich seyn $A:a = C:c$, woraus, durch abermaliges Wechseln der mittlern Glieder, folget $A:C = a:c$, die Richtigkeit aber dieser Proportion solten wir erweisen.

§. 19. Man kan hieraus ohne große Weitläuftigkeit schließen, daß auch, wenn man aus drey oder vier Verhältnissen eine andere zusammen setzet, diese einerley seyn werde, man mag das erste Glied annehmen wie

man will. Denn wenn man aus den zwo Verhältnissen M : N und O : P die Verhältniß A : C heraus gebracht hat, und man hat noch eine Verhältniß Q : R übrig, welche man zu der vorigen hinzusetzen soll, damit eine Verhältniß aus den dreyen M : N, O : P und Q : R zusammen gesetzt werde, so muß man sagen, wie Q : R = C : D, und die Verhältniß A : D ist nunmehro aus den drey gegebenen Verhältnissen zusammen gesetzt. Eben diese Verhältniß aber mit eben den Gliedern A und D bekommet man auch, wenn man die zwo Verhältnisse A : C und Q : R zusammen setzet. Denn wenn man dieses thun will, so muß man eben so verfahren wie vorher. Man muß sagen wie A zu C so A zu C, und ferner wie Q : R so C zu D. Demnach komt in der That die Zusammensetzung dreyer Verhältnisse mit der Zusammensetzung zwoer Verhältniß auf eines hinaus, weil man nemlich doch zu der Verhältniß, welche durch die Zusammensetzung der zwo erstern entstanden ist, und die man als einfach betrachten kan, die dritte Verhältniß hinzu setzen muß. Da aber, wenn man zwo Verhältnisse zusammen setzet, man das Glied A nach Belieben annehmen kan, ohne die Verhältniß selbst dadurch zu verändern, so muß dieses bey der Zusammensetzung dreyer Verhältniß ebenfals statt haben. Man siehet leicht, daß man in diesen Schlüssen fortfahren, und durch dieselben heraus bringen könne, daß auch bey der Zusammensetzung vierer Verhältnisse das erste Glied nach Belieben angenommen werden könne, ohne dadurch die Verhältniß, welche man durch die Zusammensetzung herausbringet, zu ändern, weil man hier in der That nur die letzte der vier gegebenen Verhältnisse mit derjenigen zusammen setzen muß, welche durch die Zusammensetzung der drey erstern entstanden ist, und so gehet es immer fort.

§. 20. Sind nun die Verhältnisse, welche man zusammensetzen will, M : N, O : P, Q : R, S : T, und so weiter in Zahlen gegeben, und man nimmet das erste Glied A nach Belieben an, und verfähret noch wie gewiesen worden ist, indem man macht:

$$\begin{aligned} M : N &= A : B \\ O : P &= B : C \\ Q : R &= C : D \\ S : T &= D : E \end{aligned}$$

so ist $B = \frac{N}{M} \times A$. Denn $\frac{N}{M} \times A$, bedeutet allezeit die vierte Proportionalzahl zu den dreyen M, N und A, VI, 124. und diese vierte Zahl ist B. Eben so ist $C = \frac{P}{O} \times B$, und $D = \frac{R}{Q} \times C$, und $E = \frac{T}{S} \times D$. Wenn man aber

in

in der Ausdrückung $C = \frac{P}{O} \times B$, an statt der B, die ihr gleiche Zahl $\frac{N}{M} \times A$ setzet, so bekommet man $C = \frac{P}{O} \times \frac{N}{M} \times A$. Setzet man dieses in dem Ausdrucke $D = \frac{R}{Q} \times C$ an die Stelle des C, so wird $D = \frac{R}{Q} \times \frac{P}{O} \times \frac{N}{M} \times A$, und wenn man dieses letzte wieder in der Ausdrückung $E = \frac{T}{S} \times D$ an die Stelle der D setzet, so wird $E = \frac{T}{S} \times \frac{R}{Q} \times \frac{P}{O} \times \frac{N}{M} \times A$. Oder wenn man die Brüche würklich multipliciret, so ist

$$B = \frac{N}{M} \times A$$

$$C = \frac{P \times N}{O \times M} \times A$$

$$D = \frac{R \times P \times N}{Q \times O \times M} \times A$$

$$E = \frac{T \times R \times P \times N}{S \times Q \times O \times M} \times A$$

Wenn demnach überall das erste Glied A ist, so bedeutet $\frac{N}{M} \times A$ das zweyte Glied B der Verhältniß, welche der Verhältniß M:N gleich ist; $\frac{P \times N}{O \times M} \times A$ bedeutet das zweyte Glied C der Verhältniß, welche aus den zwoen M:N und O:P zusammen gesetzet ist; $\frac{R \times P \times N}{Q \times O \times M} \times A$ bedeutet das zweyte Glied der Verhältniß, welche aus den dreyen M:N, O:P und Q:R zusammen gesetzet ist; und $\frac{T \times R \times P \times N}{S \times Q \times O \times M} \times A$ bedeutet das zweyte Glied der Verhältniß, welche aus den vieren M:N, O:P, Q:R und S:T zusammen gesetzet ist, und so immer fort.

§. 21. Dieses kan uns eine Anleitung geben, wie die letztern Glieder der zusammen gesetzten Verhältnisse leichter zu finden sind, wenn von Zahlen

len die Rede ist. Gesetzt, es seyn die zwo Verhältnisse M:N und O:P zusammen zu setzen, und zu dem ersten Gliede A der zusammen gesetzeten Verhältniß das zweyte zu finden. Weil nun dieses zweyte Glied C also ausgedrucket wird: $\frac{P \times N}{O \times M} \times A$, so siehet man, daß man nur zu $O \times M$, $P \times N$ und A die vierte Proportionalzahl suchen dörfe, wenn man dieses Glied auf einmal erlangen wil, denn diese vierte Proportionalzahl ist $\frac{P \times N}{O \times M} \times A$, gleichwie die vierte Proportionalzahl zu M, N und A, diese ist $\frac{N}{M} \times A$, von welchem Ausdrucke der erstere nicht anders verschieden ist, als daß so wohl in dem Zehler als in dem Nenner des Bruchs die Producte $P \times N$, und $O \times M$ stehen, welches die Sache nicht ändert. Es ist aber $O \times M$ das Product der zwey ersten Glieder der Verhältnisse, welche man zusammen setzen sol, und $P \times N$ ist das Product der zwey letzteren Glieder dieser Verhältnisse. Man muß demnach sagen: wie das Product der zwey ersteren Glieder zwoer Verhältnisse $O \times M$, zu dem Producte der zwey letzteren Glieder derselben $P \times N$, so das nach Belieben angenommene erste Glied A, zu dem zweyten Glied C der Verhältniß, welche aus den zwo gegebenen Verhältnissen zusammen gesetzet ist. Zum Exempel, ich sol aus den zwo Verhältnissen 2:3 und 4:5 eine Verhältniß zusammen setzen, deren erstes entweder gegebenes oder nach Belieben angenommenes Glied die 1 ist; so sage ich wie 2×4 zu 3×5, das ist, wie 8 zu 15, so 1 zu $\frac{15}{8}$, so ist die Verhältniß $1 : \frac{15}{8}$ diejenige, welche man suchte.

§. 22. Eben so ist es, wenn man aus drey Verhältnissen, die durch Zahlen ausgedrücket sind, eine Verhältniß zusammen setzen sol. Sind die Verhältnisse, welche man zusammen setzen sol, M:N, O:P, und Q:R, und ist das erste Glied der zusammen gesetzeten Verhältniß wieder A, so ist das zweyte $C = \frac{R \times P \times N}{Q \times O \times M} \times A$, und dasselbe zu finden, darf man nur sagen, wie $Q \times O \times M : R \times P \times N$, so das angenommene erste Glied A zu dem zweyten. Denn die vierte Proportionalzahl zu den eben genannten dreyen ist augenscheinlich $\frac{R \times P \times N}{Q \times O \times M} \times A$, und man weiß zum voraus, VIII, 20. daß eben dieses das zweyte Glied der aus M:N, O:P, und Q:R zusammen gesetzeten Verhältniß bedeute, deren erstes Glied A ist. Man schließet

also hier wieder wie Q×O×M, das Product aus allen ersteren Gliedern der gegebenen Verhältnisse, zu R×P×N, dem Producte aus allen zweyten Gliedern dieser Verhältnisse; so das nach Belieben angenommene oder gegebene erste Glied A, zu dem zweyten Gliede der Verhältniß, welche aus den gegebenen zusammen gesetzet ist. Als, es sey die Verhältniß zu finden, welche aus den dreyen 2:3, 4:5, und 2:1 zusammen gesetzet, und deren erstes Glied die Einheit ist, so sage ich, wie 2×4×2:3×5×1, das ist, wie 16 zu 15, so 1 zu $\frac{15}{16}$. Die Verhältniß $1:\frac{15}{16}$ ist die gesuchte, welche man durch ganze Zahlen ausdrücken kan, wenn man beyderseits durch 16 multipliciret. Es wird dadurch $1:\frac{15}{16}=16:15$.

§. 23. Diese Regel ist allgemein. Wenn man aus den vier Verhältnissen M:N, O:P, Q:R, und S:T eine Verhältniß zusammen setzen sol, deren erstes Glied A ist, so muß man wieder sagen, wie das Product aus allen ersteren Gliedern der Verhältnisse, welche zusammen zu setzen sind S×Q×O×M, zu dem Producte aus den letzteren Gliedern dieser Verhältnisse T×R×P×N, so das beliebig angenommene Glied A, zu dem zweyten Gliede der zusammen gesetzten Verhältniß, welches wir uns unter E vorstellen. Denn es wird, wenn man die vierte Proportionalzahl würklich suchet $E=\frac{T\times R\times P\times N}{S\times Q\times O\times M}\times A$, und wir haben gesehen, daß dieses das zweyte Glied der verlangeten zusammen gesetzeten Verhältniß sey.

§. 24. Ja, wenn nichts daran gelegen ist, in was vor Zahlen man die zusammen gesetzete Verhältniß schaffe, so hat man nichts als die Producte der ersteren und der letzteren Glieder der Verhältnisse zu machen, welche man zusammen setzen sol, die Verhältniß dieser Producte ist selbst die zusammen gesetzte Verhältniß, welche man suchet. Als in dem letzten Falle, da die Verhältnisse M:N, O:P, Q:R, und S:T zusammen zu setzen waren, hatten wir S×Q×O×M : T×R×P×N = A:E, und die Verhältniß A:E war die zusammengesetzete. Da nun also diese Verhältniß A:E der Verhältniß der Producte gleich ist, so ist auch die Verhältniß der Producte diejenige, welche aus den Verhältnissen der einander multiplicirenden Zahlen in der Ordnung zusammen gesetzet ist, die wir zum öftern wiederhohlet haben. Will man die Verhältniß haben, die aus den Verhältnissen 2:3, 5:3, 2:7 zusammen gesetzet ist: so multiplicire man nur die ersten Glieder dieser Verhältnisse in einander, wie auch die letzteren. Die Verhältniß der Producte 2×5×2:3×3×7, das ist, 20:63, ist die gesuchte.

§. 25.

§. 25. Demnach ist die Verhältniß zwoer Quadratzahlen aus der Verhält iß ihrer Wurzeln zweymal genommen, zusammen gesetzet, und die Verhältniß zwoer Cubiczahlen bestehet aus der Verhältniß der Wurzeln dreymal genommen. Die Verhältniß der Quadratzahlen ist zweymal so hoch, als die Verhältniß der Wurzeln, und die Verhältniß der Cubiczahlen dreymal so hoch, als die Verhältniß der Cubicwurzeln. Denn wenn man die Verhältniß 3:5 mit sich selbst, das ist, mit der Verhältniß 3:5 zusammen setzet, so kommt die zusammen gesetzte Verhältniß 3×3:5×5 = 9:25, diese Zahlen aber sind die Quadratzahlen der ersten. Und wenn man die Verhältniß 3:5 dreymal genommen, zusammen setzen sol, so wird die zusammen gesetzete Verhältniß 3×3×3:5×5×5 = 27:125, welches die Cubiczahlen der ersteren sind.

§. 26. Wenn also zwo Zahlen 9, 25 gegeben sind, deren Verhältniß aus zwoen gleichen Verhältnissen zusammen gesetzet ist, (man kan aber eine jede Verhältniß so betrachten, als ob sie durch die Zusammensetzung zwoer gleichen Verhältnisse entstanden wäre) und man wil diese Verhältniß finden, aus welcher die Verhältniß 9:25 dergestalt zusammen gesetzet ist: so darf man nur die Quadratwurzeln dieser Zahlen 3 und 5 nehmen. Die Verhältniß 3:5 ist die gesuchte: und sie ist halb so hoch, als die gegebene Verhältniß 9:25. Eben so findet man die Glieder einer Verhältniß, welche, wenn sie dreymal zusammen gesetzet wird, eine gegebene Verhältniß 27:125 heraus kommet. Man darf nur aus den Gliedern der gegebenen Verhältniß die Cubicwurzeln ziehen, welche in unserem Exempel wieder 3 und 5 sind. Die Verhältniß 3:5, ist diejenige, welche, wenn sie dreymal zusammen gesetzet wird, die gegebene Verhältniß 27:125 bringet, und ihre Höhe ist der dritte Theil der Höhe der gegebenen Verhältniß 27:125. Man kan sich vorstellen, daß zwo Zahlen öfters als dreymal in sich selbst multipliciret worden sind, und auf diese Producte dasjenige anwenden, so hier von solchen Zahlen gesaget wird, die man sich als Quadrat- oder Cubiczahlen vorstellet. Und dadurch wird eine Verhältniß gefunden, deren Höhe der vierten, fünften oder einen noch kleineren Theil der Höhe der gegebenen Verhältniß ausmacht.

§. 27. Wenn aus den durch Zahlen ausgedrückten Verhältnissen:

M : N
O : P
Q : R
S : T, eine Verhältniß zusammen gesetzet werden sol, und man verwechselt die ersteren Glieder dieser Verhältnisse wie man

man wil, oder die letzteren, oder so wohl die ersteren als die letzteren, zum Exempel, folgendergestalt: O : T
M : P
S : R
Q : N, so werden diese Verhältnisse O : T, M : P und so fort meistentheils von dem vorigen M : N, O : P und den übrigen, sehr verschieden, ob es sich zwar zuweilen fügen kan, daß eine oder die andere dieser letztern Verhältnisse einer der vorigen gleich ist. Dennoch aber ist die Verhältniß, welche durch die Zusammensetzung aller ersteren Verhältnisse entstehet, von derjenigen nicht verschieden, welche aus den letzteren Verhältnissen zusammen gesetzet ist. Denn wenn man die Glieder in der Ordnung multipliciret, welcher wir bis anhero gefolget haben, und dadurch die Glieder der zusammen gesetzeten Verhältniß heraus bringet, so ist die Verhältniß, welche aus den ersteren vieren zusammen gesetzet ist, diese $S \times Q \times O \times M : T \times R \times P \times N$, und die Verhältniß, welche durch die Zusammensetzung der vier letzteren entstehet, ist $Q \times S \times M \times O : N \times R \times P \times T$. Nun sind die Glieder dieser Verhältniß von den Gliedern der vorigen zusammen gesetzeten Verhältniß nicht verschieden, sondern es ist $Q \times S \times M \times O = S \times Q \times O \times M$, weil diese zwey Produete durch die Multiplication einerley Zahlen entstanden sind, und an der Ordnung, in welcher man multipliciret, nichts gelegen ist, I, 98. und aus eben der Ursache ist auch $N \times R \times P \times T = T \times R \times P \times N$: also sind auch die dergestalt zusammen gesetzete Verhältnisse $S \times Q \times O \times M : T \times R \times P \times N$, und $Q \times S \times M \times O : N \times R \times P \times T$ einander gleich, und eben dieses ist bey einer jeden anderen Versetzung der ersteren, wie auch der letzteren Glieder der Verhältnisse, welche man zusammen setzen sol, richtig, weil die angegebene Ursache in allen solchen Fällen gilt. Es ist nicht nöthig, das wir ein Exempel in Zahlen hieher setzen, da der Satz, auf welchen wir uns in dem Beweise gründen, so gar bekant ist.

§. 28. Wohl aber ist zu erweisen, daß eben diese Versetzung auch statt habe, wenn die Verhältnisse nicht durch Zahlen, sondern durch Linien, oder andere ungetheilete Größen ausgedrücket werden. Denn man kan zwar schließen, daß dasjenige, was von solchen Verhältnissen richtig ist, die durch Zahlen ausgedrücket werden können, überhaupt von allen Verhältnissen richtig sey, wenn man annimmet, das jede zwo Größen von einerley Art in Theile zerfället werden können, welche einander alle gleich sind, in welchem Falle die Verhältniß der Größen mit der Verhältniß der Zahlen der Theile einerley ist, VI, 53. Allein wir haben die Möglichkeit dieser

ser Zerfällung nicht überall um Grunde legen mögen, und müssen also auf eine unseren vorigen Sätzen gemäßere Art darthun, daß die Versetzung der Glieder der Verhältnisse, welche zusammen gesetzet werden sollen, in der zusammen gesetzeten Verhältniß nichts ändern. Wir werden dieses erstlich von zwo Verhältnissen zeigen, welche zusammen gesetzet werden sollen, und sodann dasselbe auf mehrere anwenden.

§. 29. Es seyn die zwo Verhältnisse M:N und O:P zusammen zusetzen. Man kan ihre Glieder auf diese vier Arten versetzen.

M:N	O:P	O:N	M:P
O:P	M:N	M:P	O:N

wovon die drey letzteren heraus kommen, wenn man in der ersten entweder die vorhergehende Glieder, oder die nachfolgende, oder sowohl die vorhergehende als die nachfolgende, verwechselt. Es ist zu zeigen, das durch die Zusammensetzung jeder zwo dieser Verhältnisse, die unter einander gesetzt sind, einerley Verhältniß kommen werde.

§. 30. Man mache zuerst: VIII, 13.

M : N = A : B und O : P = A : D,
O : P = B : C M : N = D : E,

so ist die Verhältniß A:C aus den zwoen M:N und O:P zusammen gesetzet, und die Verhältniß A:E ist durch die Zusammensetzung der Verhältnisse O:P und M:N entstanden. Ich sage diese zwo Verhältnisse A:C und A:E sind einander gleich. Man siehet, daß dieses mit Worten so auszudrücken sey. Wenn man zwo Verhältnisse M:N und O:P einmal in der Ordnung zusammen setzet, in welcher sie stehen, und das andere mal in verkehrter Ordnung, indem man O:P zuerst brauchet, und M:N zum zweyten, so werden die Verhältnisse A:C und A:E, welche durch diese Zusammensetzung entstehen, einerley. Dieses aber wird erwiesen seyn, wenn wir werden gezeiget haben, daß C=E, welches folgendergestalt geschiehet. Wir hatten M:N=A:B, wie auch M:N=D:E, also ist A:B=D:E. Ferner hatten wir O:P=B:C, und O:P=A:D, woraus folget A:D=B:C. Versetzet man die mittleren Glieder dieser Proportion, so wird aus derselben A:B=D:C, und wenn man diese Proportion mit der vorigen A:B=D:E vergleichet, so siehet man, daß auch D:C=D:E. Da nun also einerley Größe D gegen die Größen C und E einerley Verhältniß hat, so müssen diese Größen einander gleich seyn, folgends ist A:C=A:E, wie wir erweisen solten.

§. 31. Hieraus schließen wir sogleich, daß, wenn man zum Grunde setzen kan, A:B=M:N, und
B:C=O:M, man allezeit die Proportion A:C=O:N daraus werde herleiten können. Es ist die Ordnung der Glieder in den vorderen und hinteren Verhältnissen wohl zu merken. In dem ersteren kommet das Glied B zweymal vor, in den letzteren stehet M zweymal, aber B stehet oben als das zweyte Glied, und unten als das erste, und M stehet oben als das vordere Glied, und unten als das hintere. Die Richtigkeit des Schlusses aber siehet man folgendergestalt. Die Verhältniß A:C ist aus den zwo Verhältnissen M:N und O:M zusammen gesetzet, VIII, 8. Die Verhältniß O:N aber kan aus eben den zwo Verhältnissen zusammen gesetzet werden: nur muß man sie in verkehrter Ordnung nehmen. Denn ohnstreitig bringen die Verhältnisse O:M und M:N, wenn man sie zusammen setzet, die Verhältniß O:N. Setzet man sie aber in der Ordnung zusammen, in welcher sie würklich stehen, M:N und O:M, so wird durch ihre Zusammensetzung keine andere, als die vorige Verhältniß O:N heraus gebracht, wie wir eben gewiesen haben. Kommet aber die Verhältniß O:N durch die Zusammensetzung der zwo Verhältnisse M:N und O:M, so muß sie allerdings der Verhältniß A:C gleich seyn, welche durch die Zusammensetzung eben dieser Verhältnisse entstehet, VIII, 16.

§. 32. Man kan diesen Satz auch anders ausdrücken, und dieser Ausdruck hat viele Bequemlichkeit, weil er uns öfters die Versetzung der Glieder einer Proportion ersparet. Wir haben gesetzet,
A:B=M:N, und
B:C=O:M, und daraus geschlossen
A:C=O:N. Verwechselt man die Glieder der zweyten Proportion, und läßet die Glieder der ersten stehen wie sie sind, so erhält man A:B=M:N und
C:B=M:O, Die mittleren Glieder der zwo Proportionen werden einerley, die äußeren aber sind verschieden, oder können wenigstens verschieden seyn. Der Schluß bleibet A:C=O:N. Man kan also bey dieser Ordnung der Glieder schließen, wie das erste Glied der ersten Proportion A, zu dem ersten Gliede der zweyten C, so das letzte Glied der zweyten Proportion O, zu dem letzten Gliede der ersten N. Als wenn
2:3=4:6 und
12:3=4:1; so ist 2:12=1:6.

§. 33. Man kan die Glieder auch dergestalt versetzen,
B:A=N:M, und

B:C=O:M, daß nemlich die äußersten Glieder einerley werden, und hier ebenfals schließen: A:C=O:N, wie gar leicht eingesehen wird.

§. 34. Aus dieser Regel beweisen wir nun, daß bey der Zusammensetzung zwoer Verhältnisse die Glieder sich auch anders verwechseln lassen, als wir bereits gezeiget haben. Es sey wieder aus den zwo Verhältnissen M:N und O:P eine neue Verhältniß zusammen zu setzen; man verwechsele aber die erstern Glieder dieser Verhältniß, und setze aus den zwo Verhältnissen O:N, M:P eine Verhältniß zusammen, so wird diese letztere Verhältniß der erstern gleich seyn. Denn will man diese Zusammensetzung würklich verrichten, und hat zu dem Ende das erste Glied A angenommen, so muß man sagen:

M:N=A:B wie auch O:N=A:D, und
O:P=B:C, wie auch M:P=D:E, und es sind die Verhältnisse A:C und A:E die zusammen gesetzten. Man kan aber erweisen, daß diese Verhältnisse einander gleich sind, welches geschichet, wenn man, wie wir gleich thun wollen, zeiget, daß C dem E gleich sey.

§. 35. Weil nemlich M:N=A:B und
O:N=A:D, so ist O:M=B:D, VIII, 32. oder O:B=M:D. Nun ist auch, wenn man in der Proportion O:P=B:C, die Glieder verwechselt, O:B=P:C, und also M:D=P:C. Vergleichet man aber diese Proportion noch mit der letzten der angenommenen M:P=D:E, oder M:D=P:E, so siehet man sogleich, daß P:C=P:E, und daß also E nothwendig so groß seyn müsse als C. Folgends ist auch A:C=A:E, das ist, die zwo zusammen gesetzten Verhältnisse sind einander gleich.

§. 36. Auf eben die Art kan man auch zeigen, daß, wenn man in den zwo Verhältnissen M:N und O:P die letzten Glieder versetzet, und schreibet M:P und O:N, man durch die Zusammensetzung der ersten zwo Verhältnisse keine andere Verhältniß heraus bringen werde, als diejenige, welche man durch die Zusammensetzung der letztern herausbringen kan, und daß, wenn man macht:

M:N=A:B wie auch M:P=A:D
O:P=B:C und O:N=D:E,

die Größe C der Größe E, und folgends die Verhältniß A:C der Verhältniß A:E gleich seyn werde. Denn wenn man die mittlern Glieder der angenommenen Proportion M:N=A:B und M:P=A:D verwechselt, so schließet man alsbald N:B=P:D. Nun ist auch O:P=B:C, also O:N=D:C,

=D:C, VIII, 32. Da nun auch O:N=D:E, so ist allerdings D:C=D:E, und folgends C=E, welches solte erwiesen werden. Und also ist überhaupt richtig, was wir zu zeigen hatten, daß nemlich, wenn in zwo Verhältnissen M:N und O:P die erstern, oder die letztern, oder sowol die erstern als die letztern Glieder, auf alle mögliche Arten versetzet werden, dieses die Verhältnisse, welche aus den gegebenen und aus denjenigen Verhältnissen zusammen gesetzt werden, so durch diese Verwechselung der Glieder entstanden sind, nicht verschieden mache.

Die Zahl der Verhältnisse, aus welchen eine andere zusammen zu setzen ist, zu vermindern.

§. 37. Es ist aber dieses nicht allein richtig, wenn nur zwo Verhältnisse zusammen gesetzt werden, sondern es hat eben dieses auch statt, wenn man zwo Verhältnisse mit verschiedenen andern zusammen setzen soll. Man kan auch in diesem Falle die forderen wie auch die hintern Glieder dieser zwo Verhältnisse verwechseln wie man will, ohne dadurch in der Zusammensetzung der Verhältnisse etwas zu verändern. Denn es sey aus den Verhältnissen K:L, M:N, O:P und Q:R eine neue Verhältniß zusammen zu setzen, deren erstes Glied A sey, so muß man machen, VIII, 15.

K:L=A:B
M:N=B:C
O:P=C:D
Q:R=D:E

Die Verhältniß A:E ist so dann aus den vier gegebenen zusammen gesetzet. Man siehet aber auch leicht, daß eben diese Verhältniß sich aus den drey Verhältnissen A:B oder K:L, und B:D, und D:E, oder Q:R, zusammen setzen lasse. Nun ist die mittlere dieser Verhältniß B:D diejenige, welche durch die Zusammensetzung der zwo Verhältnisse M:N und O:P entstehet; und wenn man die forderen wie auch die hintern Glieder dieser zwo Verhältnisse wie man will, verwechselt, so bleibet diese Verhältniß B:D dennoch unverändert. Will man demnach aus den Verhältnissen

K : L
O : N
M : P
Q : R

eine Verhältniß zusammen setzen, da die Glieder O, M verwechselt worden sind, so wird dieselbe noch aus den Verhält-

hältnissen A:B=K:L, B:D, und D:E=Q:R, bestehen, und also der vorigen zusammen gesetzten Verhältniß A:E gleich seyn: und eben dieses ist auch richtig, wenn man die hintern Glieder N und P mit einander verwechselt.

§. 38. Kan man aber jede zwey fordere oder hintere Glieder der Verhältnisse, die man zusammensetzen soll, verwechseln, ohne dadurch in der Verhältniß, welche durch ihre Zusammensetzung entstehet, etwas zu verändern; so kan man auch diese Verwechselung so oft man will, wiederholen, ohne daß auch hiedurch einige Veränderung in der zusammen gesetzten Verhältniß vorgehe. Dadurch aber, wenn man die Verwechselung zweyer Glieder der Verhältnisse wiederholet, können dieselbe in eine jede beliebige Ordnung gebracht werden, die man verlanget. Wenn demnach bey verschiedenen Verhältnissen, die man zusammen setzen soll, die erstern, wie auch die letztern Glieder einerley sind, so sind auch die zusammen gesetzten Verhältnisse einerley in was Ordnung diese auch stehen mögen, eben wie wir dieses von solchen Verhältnissen, die durch Zahlen ausgedrückt sind, oben VIII, 27. gezeiget haben. Aus den Verhältnissen

K : L
M : N
O : P
Q : R

wird eben die Verhältniß zusammen gesetzt, welche aus den Verhältnissen

M : L
O : N
K : R
Q : P

zusammen gesetzet wird. Denn wenn man immer zwey der fordern Glieder dieser letzten Verhältnisse versetzet, so bekommet man endlich die Ordnung der fordern Glieder der vorigen Verhältnisse, und eben dieses ist auch bey den hintern Gliedern richtig. Man wiederhole hiebey, wenn man es nöthig findet, was wir längst von der Versetzung der Factoren zweyer Producte gezeiget haben, I, 98.

§. 39. Dieses kan uns nutzen, die Verhältnisse, aus welchen eine neue zusammen zu setzen ist, öfters auf eine sehr leichte Art auf wenigere zu bringen, und drey Verhältnisse, oder zwo anzugeben, aus welchen eine Verhältniß zusammen gesetzt werden kan, welche aus vieren oder mehrern zusammen gesetzt ist, ja zuweilen gar eine zusammen gesetzte Verhältniß in eine einfache zu verwandeln. Denn daß in dem Falle, wenn die Verhältnisse aus welchen eine neue zusammen gesetzt werden soll, folgendergestalt stehen:

A : B
C : D
D : E
F : G, die Verhältniß, welche aus denselben zusammen gesetzet wird, auch aus den dreyen A : B, C : E, F : G zusammen gesetzet werden könne, ist leicht einzusehen: weil die Verhältniß C : E eben diejenige ist, welche aus den zwoen C : D und D : E zusammen gesetzet wird. Stehen aber die Glieder anders, folgendergestalt, zum Exempel:

A : B
C : D
F : E
D : G, so kan man dieselbe auf die vorige Ordnung bringen. Man kan also hier ebenfals sagen, daß die Verhältniß, welche aus den gegenwärtigen vieren zusammen gesetzt wird, auch aus den dreyen Verhältnissen A : B, C : E und F : G zusammen gesetzt werden könne.

§. 40. Es ist also die Regel, nach welcher man die Zahl der Verhältnisse, aus welchen eine andere zusammen gesetzet werden sol, vermindert, diese: Man lösche alle diejenigen Glieder, welche sowohl unter den förderen als unter den hinteren Gliedern der Verhältnisse vorkommen, die zusammen gesetzt werden sollen, aus, und verknüpfe die übrigen wie man wil mit einander, nur daß man nicht die förderen Glieder an die Stelle der hinteren setze. In den gegebenen Exempeln kommet D einmal unter den forderen und das andere mal unter den hinteren Gliedern der zusammen zu setzenden Verhältnisse vor. Man lasse also dasselbe gar aus, so bleiben die Verhältnisse, deren erstere Glieder sind A, C, F, und die letzteren B, E, G. Die Verhältniß nun, welche aus den bezeichneten vieren zusammen gesetzet werden kan, lässet sich auch aus den dreyen zusammen setzen, deren erstere Glieder A, C, F, und die zweyten B, E, G sind, als aus diesen A : G, C : B, F : E, oder aus diesen A : E, C : G, F : B, oder wie man diese Glieder sonst verknüpfen wil.

§. 41. Wenn eine Proportion aus zusammen gesetzten Verhältnissen bestehet, das ist, wenn eine zusammen gesetzte Verhältniß einer andern zusammen gesetzten oder einfachen Verhältniß gleich ist, so kan man die Verhältnisse, welche zusammen gesetzt werden sollen, auch öfters zu einer geringeren Zahl bringen, wenn man noch andere Verhältnisse zu der vorigen hinzu setzet, welche einander gleich sind. Es sey zum Exempel:

$$\left.\begin{matrix} A : B \\ C : D \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} M : N \\ O : P \\ Q : R \end{matrix}\right.$$

das

das ist, es sey diejenige Verhältniß, welche aus den zwoen A:B und C:D zusammen gesetzt ist, derjenigen gleich, welche durch die Zusammensetzung der drey Verhältnisse M:N, O:P, Q:R entstehet: es sey aber auch D:A =R:M. Setzet man nun diese Verhältniß noch zu den vorigen, so wird

$$\left.\begin{matrix} A:B \\ C:D \\ D:A \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} M:N \\ O:P \\ Q:R \\ R:M \end{matrix}\right.$$

, das ist, diejenige Verhältniß, welche aus den ersteren dreyen zusammen gesetzet ist, wird derjenigen gleich, welche aus den letzteren vieren, durch ihre Zusammensetzung entstehet. Denn aus der Zusammensetzung gleicher Verhältnisse müssen immer gleiche Verhältnisse entstehen. Nun ist aber die Verhältniß, welche durch die Zusammensetzung der drey ersteren dieser Verhältnisse entstehet, keine andere als die Verhältniß C:B, denn die Glieder A und D kan man wegstreichen, weil sie sowohl unter den fordern als unter den hintern Gliedern der Verhältnisse, welche man zusammen setzen sol, vorkommen; VIII, 40. und auf eben die Art bringet man heraus, daß die Verhältniß, welche aus den letzteren vieren zusammen gesetzet werden kan, sich auch aus den zwoen O:N und Q:P zusammen setzen lasse. Man kan demnach in dem gesetzten Falle schließen, daß die Verhältniß C:B derjenigen Verhältniß gleich sey, welche aus den zwo Verhältnissen O:N und Q:P zusammen gesetzet wird.

§. 42. Da die Glieder solcher Verhältnisse, die aus verschiedenen anderen zusammen gesetzet worden, in dem Falle, da die Verhältnisse durch Zahlen ausgedrückt werden können sich durch die Producte derjenigen Zahlen, welche diese Verhältnisse ausdrücken, darstellen lassen; VIII, 24. so pflegen die meisten heut zu Tage die Glieder der zusammen gesetzten Verhältnisse eben so zu bezeichnen, wie die Producte aus verschiedenen Zahlen bezeichnet werden, ob zwar die einfachen Verhältnisse, aus welchen man eine neue zusammen setzen sol, nicht durch Zahlen ausgedrücket sind, und vielleicht nicht durch eigentliche Zahlen ausgesprochen werden können. Also wenn man schreibet: $A \times C \times E : B \times D \times F$, so bedeutet dieses eine Verhältniß, welche aus den dreyen A:B, C:D, E:F zusammen gesetzt ist, oder aus jeden anderen dreyen, deren fordere Glieder sind A, C, E, und die hintern B, D, F, wie man auch diese Glieder mit den ersteren verknüpfen will. Uns scheinet diese Zeichnung gar bequem, und derowegen wollen wir sie beybehalten. Es ist nach der Erklärung, welche wir von diesen Dingen gegeben haben, nicht zu befürchten, daß man sich die unaetheilten Größen als Zahlen vorstellen werde, ob man sich zwar der arithmetischen Zeichen, der

gleichen das (×) ist, auch in der Geometrie bedienet, welches allerdings ein Fehler wäre. Doch wollen wir uns auch vorbehalten die Sache durch Worte so auszudrücken, wie wir bishero gethan haben, so oft wir uns davon einige Bequemlichkeit versprechen können.

§. 43. Zeichnet man derohalben folgendergestalt A×C×E=B×D ×F, so kan dieses in der Geometrie, oder wo sonst von ungetheileten Größen die Rede ist, nichts anders bedeuten, als daß die Glieder derjenigen Verhältniß, welche aus den dreyen A:B, C:D, E:F zusammen gesetzet ist, einander gleich sind. Diese Bedeutung ist allgemein, und kan auch bey Zahlen gebrauchet werden.

§. 44. Wenn bey der Verhältniß A×C×E:B×C×D die Buchstaben A, B, C, D, E Zahlen bedeuten, so ist diese Verhältniß allezeit der Verhältniß A×E:B×D gleich. Denn die Glieder dieser Verhältnisse entstehen aus den Gliedern der ersteren, wenn man dieselbe beyderseits durch C dividiret, welchen Factor sie gemeinschaftlich haben, und durch eine solche Division wird die Verhältniß niemals geändert, VI, 115. Bedeuten aber diese Buchstaben ungetheilte Größen, so entstehen die Glieder der letztern Verhältniß A×E:B×D aus den Gliedern der erstern A×C×E:B×C ×D wenn man die Zahl der Verhältnisse, welche zusammen zu setzen sind, dadurch vermindert, daß man das Glied C, welches sowohl unter den fordern als auch unter den hintern Gliedern dieser Verhältnisse vorkommet, weglässet, welches jederzeit geschehen kan, VIII, 40. Es ist demnach allezeit A×E:B×D=A×E×C:B×D×C, und so in allen übrigen ähnlichen Fällen.

§. 45. Gleichwie aber auch, wenn die Buchstaben Zahlen bedeuten, der Bruch $\frac{R\times P\times N}{Q\times O\times M}\times A$, oder $\frac{R\times P\times N\times A}{Q\times O\times M}$ das zweyte Glied einer Verhältniß bedeutet, die aus den Verhältnissen Q:R, O:P, M:N zusammen gesetzet, und deren erstes Glied A ist; VIII, 20. Also pfleget man auch in der Geometrie diese Zeichnung in eben dem Verstande zu gebrauchen, ob zwar die Buchstaben Linien bedeuten, welche sich nicht im eigentlichen Verstande durch einander multipliciren, noch weniger aber dividiren lassen. Diese Gleichförmigkeit der Zeichnung ist von einer großen Bequemlichkeit. Sie machet, daß man nach einerley Regeln verfahren kan, wenn in den zusammengesetzten Verhältnissen etwas zu ändern ist. Als, wenn in der Verhältniß $A:\frac{R\times P\times N}{Q\times O\times M}\times A$: die Glieder Q, R einander gleich wären, so

könte man diese Verhältniß auch dergestalt ausdrücken $A : \frac{P \times N}{O \times M} \times A$, wie leicht einzusehen ist.

Einige besondere Sätze.

§. 46. Dieses könte uns von dieser Materie genug seyn, weil das übrige sich bey der Anwendung aus dem dergestalt gelegeten Grunde leicht herleiten lässet. Doch kan es nicht schaden, wenn wir noch einige Folgen dieser Sätze anmerken, welche öfters vorkommen, und uns also unsere künftige Arbeit erleichtern können. Es sey erstlich die Verhältniß $A:B$ der Verhältniß $C:D$ gleich, oder es sey die Proportion $A:B = C:D$ richtig. Man verwechsele die Glieder einer dieser Verhältnisse und setze die Verhältniß, welche dergestalt kommet, als $D:C$, sodann mit einer der ersteren $A:B$ zusammen: wodurch man die Verhältniß $A \times D : B \times C$ erhält. Die Glieder dieser Verhältnisse werden einander gleich seyn $A \times D = B \times C$. Von Zahlen hat die Richtigkeit dieses Satzes bereits gewiesen werden können. Denn wenn A, B, C, D Zahlen bedeuten, so ist $A \times D$ das Product der äußern Glieder der Verhältniß, und $B \times C$ ist das Product der mittleren Glieder derselben; und wir haben VI, 121 gewiesen, daß dergleichen Producte einander allezeit gleich sind.

§. 47. Daß aber eben dieses auch richtig sey, wenn A, B, C, D ungetheilte Größen bedeuten, siehet man folgendergestalt. Es ist gesetzet worden $A:B = C:D$. Nun ist allezeit richtig,

$D:C = D:C$ weil die erstere dieser Verhältnisse von der zweyten gar nicht verschieden ist. Demnach müssen auch die Verhältnisse gleich seyn, welche durch die Zusammensetzung dieser Verhältnisse entstehen, und die Proportion $A \times D : B \times C = C \times D : C \times D$ muß richtig seyn. Es ist aber $C \times D = C \times D$, wie man leicht siehet. Also ist auch $A \times D = B \times C$. Und wenn man aus zwo gleichen Verhältnissen $A:B$ und $C:D$ eine neue Verhältniß $A \times D : B \times C$ zusammen setzet, nachdem man zuvor die Glieder einer dieser Verhältnisse verwechselt hat, so werden die Glieder der zusammen gesetzeten Verhältniß einander allezeit gleich.

§. 48. Es lässet sich dieser Satz verkehren, und man kan sagen, daß, wenn man eine Verhältniß, deren Glieder einander gleich sind, aus zwo Verhältnissen zusammensetzet, diese Verhältnisse einander gleich sind, und eine Proportion geben, wenn eine derselben verkehrt genommen wird. Es

sey $A \times D = B \times C$, die Glieder nemlich der Verhältniß $A \times D : B \times C$ welche aus den zwo Verhältnissen $A:B$, und $D:C$ zusammen gesetzt ist, seyn einander gleich; so wird behauptet, daß die Verhältniß $A:B$ zwar nicht der Verhältniß $D:C$, aber gewiß der Verhältniß $C:D$ gleich seyn werde: und dieses siehet man sogleich ein, wenn man setzet

$$A \times D : B \times C = A : A, \text{ und damit vergleichet}$$
$$C : D = C : D$$

welche beyde Proportionen, bey den gesetzten Bedingungen, allzeit richtig sind. Denn $A \times D$ ist so wohl der $B \times C$ gleich, als A der A, oder eine jede andere Größe sich selbst gleich ist, und die Verhältniß der zwoten Proportion bestehet so gar aus einerley Gliedern. Setzet man aber diese Verhältniß zusammen, so kommet allerdings, wenn man die überflüssige Glieder weglässet, VIII, 40. $A:B = C:D$, welches zu zeigen war.

§. 49. Daß dieses auch bey Zahlen richtig sey, folget aus dem Beweise, welcher allgemein ist, und allerdings auch von Zahlen gelten muß. Man kan es aber auch von Zahlen folgender maßen erweisen. Man nehme eine Zahl 12 und theile sie in diejenige Zahlen aus deren Multiplication sie entstanden ist, und dieses zwar auf zwo verschiedene Arten, welches allezeit geschehen kan, weil man eben nicht nöthig hat, die Brüche zu vermeiden. Man schreibe zum Exempel vor 12, $6 \times 2 = 4 \times 3$. Nach dem Satze muß die Proportion $6:4 = 3:2$ richtig seyn. Daß dieses beständig zutreffe, wird man gewahr werden, wenn man betrachtet, daß, wenn man die Producte $6 \times 2 = 4 \times 3$ durch eine beliebige Zahl dividiret, die Quotienten nothwendig gleich seyn müssen. Man nehme zu den Theiler ein Product an aus einem Factor des ersten Products, und aus einem Factor des zweyten, als dieses 2×4, und dividire, so wird $\frac{6 \times 2}{4 \times 2} = \frac{4 \times 3}{4 \times 2}$. Diese Brüche können zu kleineren Benennungen gebracht werden, wenn man die Glieder des ersten durch 2, und die Glieder des zweyten durch 4 dividiret, dadurch aber erhalten wir die gleichen Brüche $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, oder die Proportion $6:4 = 3:2$.

§. 50. Oder wenn man dieses auf eine leichtere Art von Zahlen schliessen wil, so setze man an statt der gebrauchten Ziffer $A \times D = B \times C$ und dividire wieder beiderseits mit $D \times B$, so wird $\frac{A \times D}{B \times D} = \frac{B \times C}{B \times D}$, und wenn man diese Brüche zu kleineren Benennungen bringet, indem man die gemeinschaftlichen Factore B, D aus den Nennern und Zehlern derselben weglas-

lässet, so wird $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, das ist, VI, §1. A:B=C:D. Man siehet aber auch aus diesen Beweisen, und aus dem übrigen, so gezeiget worden ist, überflüssig, daß an der Ordnung nichts gelegen sey, und daß, wenn man hat A×D=B×C, oder A×D=C×B oder D×A=B×C oder D×A=C×B, man doch allezeit schließen könne A:B=C:D, oder B:A=D:C.

§. 51. Sonst ist in einer jeden Proportion A:B=C:D die Verhältniß des ersten Gliedes A zu dem vierten aus der Verhältniß des ersten Gliedes A zu dem zweyten A:B, und aus der Verhältniß eben dieses ersten Gliedes zu dem dritten zusammengesetzt. Dieses siehet man gar leicht ein, wenn man nur betrachtet, daß nach den ersten Grundbegriffen die Verhältniß A:D aus den zwo Verhältnissen A:B, B:D zusammen gesetzet sey. Dieses wäre auch richtig, wenn gleich A, B, C und D nicht proportional wären. Sind aber diese Größen proportional, so ist die Verhältniß B:D der Verhältniß A:C gleich: es wird demnach die Verhältniß A:D auch aus den zwoen A:B und A:C zusammen gesetzt. Als bey der Proportion 2:4=3:6, ist die Verhältniß A:D=2:6, und die Verhältniß A:B=2:4, A:C aber =2:3. Setzet man die zwo letzteren Verhältnisse zusammen, indem man nemlich die Glieder derselben in der Ordnung in einander multipliciret, in welcher sie stehen, so bekommet man die Verhältniß 4:12, welche der Verhältniß 2:6 gleich ist.

§. 52. Gehet nun aber die Proportion in einem fort, und kan man sich also dieselbe unter nachstehender Bezeichnung A:B=B:C vorstellen, so wird die Verhältniß des ersten Gliedes zu dem dritten A:B der Verhäteniß des ersten Gliedes zu dem zweyten A:B gleich. Demnach wird die Verhältniß A:C aus der Verhältniß A:B zweymal genommen zusammen gesetzt, und jene ist zweymal so hoch als diese. Es sey 2:6=6:18, so ist die Verhältniß 2:18 oder 1:9 gleich der Verhältniß 2×2:6×6=4:36=1:9. Die Zahlen, welche die Glieder dieser zweymal so hohen Verhältnisse ausdrücken, sind allezeit Quadratzahlen, weil sie durch die Multiplication einer Zahl in sich selbst entstehen, wie man leicht siehet.

§. 53. Dieses letztere, und was sonst noch von der Zusammensetzung gleicher Verhältnisse hier zu sagen ist, kan man auch aus den ersten Begriffen leicht einsehen. Es sey

A:B=M:N
B:C=M:N
C:D=M:N
D:E=M:N

so ist auch A:B=B:C=C:D=D:E,

$= D:E$, weil eine jede dieser Verhältnisse der Verhältniß $M:N$ gleich ist: das ist, wenn man die Glieder A, B, C, D, E nach einander schreibet, so ist die Verhältniß eines jeden zu dem nachfolgenden einerley; gleichwie hinwiederum, wenn die Verhältniß eines jeden der Glieder A, B, C, D, E zu dem darauf folgenden einerley ist, man auch allezeit diese Glieder so setzen kan, wie wir sie zuerst gesetzt haben. Es ist aber aus derselben Bezeichnung klar, daß die Verhältniß $A:C$ zweymal so hoch sey als die Verhältniß $M:N$ oder $A:B$, und daß die Verhältniß $A:D$ dreymal so hoch sey, als eben die Verhältniß $M:N$ oder $A:B$, die Verhältniß aber $A:E$ viermal so hoch und so immer. Und dieses ist von einer jeden Reihe von Größen, wie wir sie beschrieben haben, richtig.

§. 54. Man kan dieses auch so ausdrücken: bey den gesetzten Bedingungen, wenn nemlich jede der Größen A, B, C, D, E gegen die nachfolgende einerley Verhältniß hat, ist $A:C = A \times A : B \times B$, und $A:D = A \times A \times A : B \times B \times B$, und $A:E = A \times A \times A \times A : B \times B \times B \times B$, und so weiter. Man siehet dieses sogleich, wenn man die Verhältnisse in der Ordnung setzet, in welcher sie §. 53. stehen, und betrachtet, daß die Verhältniß $M:N$ der Verhältniß $A:B$ gleich sey.

§. 55. Wir wollen diesem allen nur noch eine Betrachtung beyfügen, so zu einiger Erläuterung dieser Lehre dienen kan. Wenn zwo Verhältnisse $A:B$ und $C:D$ gegeben sind; so kan man zwey Glieder, deren Verhältniß aus diesen Verhältnissen zusammen gesetzt ist, auch folgendergestalt finden. Nachdem man die zwo Verhältnisse, größerer Deutlichkeit halber, unter einander geschrieben hat, $A:B$

$C:D$, so suche man zu einer beliebig angenommenen Größe V, zur A und zur C die vierte Proportionalgröße, welche wir P nennen wollen, und zu eben der V, zur B und zur D suche man ebenfals die vierte Proportionalgröße Q, so ist die Verhältniß $P:Q$ aus den Verhältnissen $A:B$ und $C:D$ zusammen gesetzet, oder es ist $P:Q = A \times C : B \times D$. Man siehet dieses folgendergestalt ein. Weil man gemachet hat $V:A = C:P$, so ist auch, wenn man die Verhältnsse verkehrt setzet

$A:V = P:C$,

Nun hat man auch gemachet $V:B = D:Q$,

Und es ist nothwendig $C:D = C:D$.

Man setze diese Verhältnisse zusammen, mit Auslassung der überflüssigen Glieder, VIII, 40. so wird $A \times C : B \times D = P:Q$, welche Proportion solte erwiesen werden. Es sey zum Exempel aus den Verhältnissen 2:3 und 5:7 eine neue zusammen zu setzen. Wenn man nun eine Zahl n nach Belieben an-

annimmet und machet $P = \frac{2 \times 5}{n}$ und $Q = \frac{3 \times 7}{n}$, so verhält sich P zu Q wie $\frac{2 \times 5}{n}$ zur $\frac{3 \times 7}{n}$, das ist, wenn man beyderseits mit n multipliciret, wie 2×5 zu 3×7, und die Verhältniß P:Q ist augenscheinlich aus den Verhältnissen 2:3 und 5:7 zusammen gesetzt.

§. 56. Hieraus kan man nachfolgenden Satz schließen, wenn man zwo Proportionen annimmet: A:B=C:D
E:F=G:H und suchet zu einer nach Belieben angenommenen Größe V und zu jeden zwo Größen, deren eine in der ersten dieser Proportionen so stehet, wie die andere in der zweyten, als A, E; B, F; D, H die vierte Proportionalgröße, so werden auch diese proportional seyn. Denn wenn man P, Q, R, S diese vierte Größen bedeuten läßt, so ist die Verhältniß P:Q aus den Verhältnissen A:B und E:F zusammen gesetzt, und die Verhältniß R:S aus den Verhältnissen C:D und G:H. Da nun die einfachen Verhältnisse, einander gleich seyn, so müssen auch die zusammen gesetzten gleich seyn, P:Q=R:S.

§. 57. Man kan aber auch diesen Satz noch weiter ausdehnen, oder noch allgemeiner machen, folgendergestalt. Man nehme drey Proportionen: A:B=C:D
E:F=G:H
J:K=L:M, und suche zu jeden dreyen Gliedern derselben, welche über einander stehen, die vierte Proportionalgröße. Man mache nemlich: A:E=J:P
B:F=K:Q
C:G=L:R
D:H=M:S, so werden auch diese vierte Proportionalgrößen eine richtige Proportion P:Q=R:S geben. Denn wenn man diese letztern vier Proportionen etwas anders schreibet, und ihnen die drey erstern mit einiger Versetzung der Glieder beyfüget, folgendergestalt:

P:J=E:A
K:Q=B:F
G:C=R:L
D:H=M:S
C:D=A:B
H:G=F:E
J:K=L:M, und setzet diese Verhältnisse alle bey-

beyderseits zusammen, mit Weglassung der überflüssigen Glieder, so bekommet man allerdings P:Q=R:S. Man kan gar leicht Zahlen finden, welche dieses erläutern.

Erläuterung durch Zahlen.

§. 58. Ich will die Anwendung dieser Lehre durch Zahlen noch mehr zu erläutern suchen, wodurch sich zugleich der Nutze derselben einiger maßen zeigen wird. Denn der gröste Nutze wird sich bey den Anwendungen äußern, welche wir damit bey den wichtigen Betrachtungen vornehmen werden, die uns noch vorstehen; welche durch die Zusammensetzung der Verhältnisse zu einer Leichtigkeit gebracht werden, die auf eine andere Art keinesweges zu erhalten wäre.

§. 59. Es seyn die Verhältnisse zusammen zu setzen, welche durch diese Zahlen ausgedrückt werden

6 : 7
35 : 24
10 : 6
3 : 5.

So kan erstlich die Zahl 6, welche sowol unter den vorhergehenden als unter den nachfolgenden Gliedern vorkomt, weggelassen werden. Dadurch werden die zusammen zu setzende Verhältnisse auf drey gebracht, die auf verschiedene Art angegeben werden können, als auf die folgende:

35 : 7
10 : 5
3 : 24.

Diese Verhältnisse lassen sich durch kleinere Zahlen ausdrücken; und alsdenn stehen sie also:

5 : 1
2 : 1
1 : 8.

Nun werden diese Verhältnisse auf die nachfolgende zwo gebracht, wenn man wieder das Glied 1 weglässet, welches sowol unter den vorhergehenden als unter den nachfolgenden vorkömt:

5 : 1
und 2 : 8

oder weil die letztere Verhältniß wieder mit kleinern Zahlen ausgedrückt wer-

den

den kan, so können mit eben der Wirkung auch die nachstehende Verhältnisse zusammen gesetzt werden

5 : 1
und 1 : 4

Man siehet aber leicht, daß die Verhältniß, welche durch diese Zusammensetzung erhalten wird, keine andere sey als 5:4. Diese Verhältniß 5:4 ist also diejenige, welche durch die Zusammensetzung der vier im Anfang gegebenen Verhältnisse herausgebracht wird. Und wenn man, nach der allererstern Anweisung, die Glieder der zusammen gesetzten Verhältnisse aus den Gliedern der einfachen zu finden, VIII, 24. diese Glieder gehörig in einander multiplicirt, so bringt man keine andere Verhältniß heraus, sondern stellet bloß die Verhältniß 5:4 in größern Zahlen vor.

§. 60. Hieraus aber folgt nachfolgende allgemeine Regel, die zusammengesetzte Verhältniß so leicht zu finden und in so kleinen Zahlen vorzustellen als nur möglich ist. Man theile jede zwo Zahlen, deren eine unter den vorhergehenden und die andere unter den nachfolgenden Gliedern der Verhältnisse vorkomt, durch den grösten gemeinschaftlichen Theiler, welchen sie haben, und schreibe anstatt dieser Zahlen die Quotienten der Theilungen. Und wenn ein paar oder etliche paare der Zahlen, welche dergestalt an statt der ersten herausgebracht werden, ebenfals einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so nehme man diese Arbeit mit derselben ebenfals vor, und dieses so lang, bis eine jede Zahl, welche in denen zusammen zu setzenden Verhältnissen ein vorhergehendes Glied abgiebt, sich auf ein jedes nachfolgendes Glied als eine einfache Zahl beziehet. Diese Zahlen multiplicire man alsdenn gehörig in einander, so erlangt man die zusammengesetzte Verhältniß. Wir wollen diese Regel bey dem vorigen Exempel anwenden, da die Verhältnisse

6 : 7
35 : 24
10 : 6
3 : 5

zusammen zu setzen waren. Ich dividire 6 und 6 durch 6, alsdenn dividire ich 35 und 7 durch 7. Ferner 3 und 24 durch 3, endlich 10 und 5 durch 5. So bekomme ich an statt der vorigen die nachfolgende Verhältnisse

1 : 1
5 : 8
2 : 1
1 : 1

In diesen Verhältnissen lassen sich wieder die beyde Zahlen 2 und 8 durch 2 theilen, wodurch die zusammen zu setzende Verhältnisse auf die nachfolgende gebracht werden

1 : 1
5 : 4
1 : 1
1 : 1.

Die Verhältniß nun, welche aus diesen zusammen gesetzt wird ist, wie vorher, 5 : 4.

§. 61. Ein anderes Exempel, zur Anwendung eben dieser Regel. Die zusammen zu setzende Verhältnisse sind die folgende:

15 : 14
6 : 33
7 : 26
9 : 5

Weil die zwo Zahlen 15 und 33 sich durch 3 theilen lassen, und 6 und 14 durch 2, so kan man anstatt dieser Verhältnisse die nachfolgende brauchen,

5 : 7
3 : 11
7 : 26
9 : 5

Weil aber hier wieder 7 und 7 wie auch 5 und 5 einerley gemeinschaftliche Theiler haben, so thun die nachfolgende Verhältnisse eben die Dienste:

3 : 11
9 : 26

Die Verhältniß, welche aus diesen zusammengesetzt wird, ist 3×9 : 11×26, das ist, 27 : 286, und diese Zahlen sind die kleinsten, welche diese Verhältniß ausdrücken können.

§. 62. Auf diese Art kan man allzeit verfahren, wenn bloß die zusammengesetzte Verhältniß durch Zahlen auszudrücken ist, und aufs höchste noch verlangt wird, daß diese Zahlen die kleinsten seyn sollen, welche diese Verhältniß ausdrücken können. Und der Grund dieser Arbeit liegt darinne, daß bey der Zusammensetzung der Verhältnisse man die vorhergehende, wie auch die nachfolgende Glieder nach Belieben verwechseln kan, VIII, 27. Ist aber auch das erste Glied der zusammengesetzten Verhältniß gegeben, und man soll das zweyte finden, so wird dadurch die Rechnung selten viel schwerer, und öfters merklich leichter. Gesetzt, es seyn noch eben die Verhältnisse zusammen zu setzen, die wir eben zusammengesetzt haben, nemlich:

15 : 14

15 : 14
6 : 33
7 : 26
9 : 5.

Es sey aber das erste Glied der zusammengesetzten Verhältniß gegeben, und dieses sey 9; man soll das zweyte schaffen, welches wir x nennen wollen. Wenn nun die bereits gefundene zusammen gesetzte Verhältniß diese ist, 27: 286, so ist zu setzen $27 : 286 = 9 : x$. Weil aber hier das erste Glied sowol als das dritte sich durch einerley Zahl 9 theilen lässet, so wird eben die Zahl x gefunden, wenn man machet $3 : 286 = 1 : x$, folgends ist $x = \frac{286}{3} = 95\frac{1}{3}$.

Erweget man dieses etwas genau, so siehet man, daß in diesem Exempel man sich die Arbeit gleich Anfangs noch mehr hätte erleichtern können, wenn man geschrieben hätte $3 \times 9 : 11 \times 26 = 9 : x$
Denn hieraus folgt alsbald $3 : 11 \times 26 = 1 : x$ oder
$3 : 286 = 1 : x$.
Und dieses ist der kürzeste Weg die Zahl x zu finden.

§. 63. Man kan aber die Art und Weise eine Zahl x zu finden, welche zu einer gegebenen Zahl eine Verhältniß hat, die aus verschiedenen andern gegebenen Verhältnissen zusammen gesetzt ist, sich auch anders vorstellen. Wenn die gegebene Verhältnisse noch die vorigen sind, nemlich 15: 14, 6: 33, 7: 26, 9: 5, und das erste Glied der Verhältniß, welche aus der Zusammensetzung dieser Verhältnisse entstehet, ist 9, so wird

$$x = \frac{14 \times 33 \times 26 \times 5 \times 9}{15 \times 6 \times 7 \times 9} \quad \text{VIII, 20.}$$

Man bringe diesen Bruch zu den kleinsten Benennungen, welche er haben kan, indem man einen jeden Factor des Zehlers durch eine Zahl theilet, welche zugleich einen Factor des Nenners theilet, und die Quotienten anstatt der dergestalt getheilten Zahlen setzt: alsdenn aber verfahre man mit diesen Quotienten eben so, wenn einige derselben, die in dem Zehler vorkommen, mit einigen in dem Nenner gemeinschaftliche Theiler haben: und dieses thue man so lang bis ein jeder Factor des Zehlers auf einen jeden Factor des Nenners sich als eine einfache Zahl beziehet; oder bis man keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr finden kan: wiewol es eben kein großes Unglück ist, wenn man einen oder den andern dieser Theiler übersehen solte. Weil dadurch die letzten Factore meistentheils ziemlich klein werden, so ist es alsdenn leicht, die Multiplication und die Division zu verrichten, durch welche

che die gesuchte Zahl x herausgebracht wird. Als in dem gegenwärtigen Exempel erlangt man durch die erste Theilung

$$x = \frac{2 \times 11 \times 13 \times 5 \times 1}{5 \times 3 \times 1 \times 1}.$$

Hieraus aber wird weiter, durch eine abermalige Theilung $x = \frac{2 \times 11 \times 13.}{3}$

Folgends ist $x = \frac{286}{3} = 95\frac{1}{3}$, wie oben.

§. 64. Es ist leicht einzusehen, daß durch diese Art zu rechnen viele Zeit und Mühe ersparet werde: und es kommen in der Ausübung solche Aufgaben, da eine Verhältniß aus verschiedenen andern zusammen zu setzen ist, gar häufig vor, welche in denen Rechenbüchern als besondere Regeln abgehandelt werden. Es ist zwar hier die Absicht nicht zu zeigen, wie die Rechenkunst auf allerhand Vorfälle in dem gemeinen Leben und im Handel anzuwenden sey. Doch wird es nicht ganz überflüssig seyn, wenn wir ein paar Beyspiele von solchen Aufgaben, bey welchen es auf die Zusammensetzung der Verhältnisse ankömt, beybringen.

§. 65. Ein Capital von 5700 trägt in 17 Monathen 420 Interesse; wieviel wird das Capital 9250 tragen, wenn es nach eben den Fuß auf 38 Monathe ausgethan wird. Wenn man hier m das Interesse bedeuten lässet, welches das zweyte Capital in 17 Monaten bringen würde, und x das gesuchte Interesse, welches nemlich von eben dem Capital in 38 Monaten fallen muß, so siehet man nach einer kleinen Ueberlegung, daß die nachfolgende Proportionen beyde ihre Richtigkeit haben:

$$5700 : 9250 = 420 : m$$
$$17 : 38 = m : x.$$

Es ist also die Verhältniß $420 : x$ aus den zwoen $5700 : 9250$ und $17 : 38$ zusammengesetzt, und man hat $x = \frac{9250 \times 38 \times 420}{5700 \times 17}$.

Wenn man nun diese Factore, wie gelehret worden ist, verkleinert, so erhält man $x = \frac{925 \times 38 \times 14}{19 \times 17}$

und durch eine abermalige Verkleinerung

$$x = \frac{925 \times 2 \times 14}{17} = \frac{25200}{17},$$

und also $x = 1523\frac{9}{17}$.

§. 66.

§. 66. Das folgende Exempel ist mehr zusammengesetzt. Ein Capital von 550 Thalern träget in 12 Monaten 26 Thaler Interesse. Nach eben den Fuß ist ein Capital von 2684 Thalern ausgethan worden, und dieses stehet 27 Monate. Es wird aber das Interesse, so von dem letztern Capital nach dieser Zeit zu zahlen wäre, durch einen Vergleich dahin gemindert, daß nur vier Fünftel des Ganzen, oder jedesmal an statt 5 Thaler nur 4 bezahlt werden sollen: und was nunmehro fällt, haben zwo Personen dergestalt unter sich zu theilen, daß die erste fünf achtel des Ganzen und die andere das übrige bekomt. Die Frage ist, wie groß der Theil der ersten Person seyn werde? Wenn man also schreibet:

$$\begin{aligned} 550 &: 2684 = 26 : m \\ 12 &: 27 = m : n \\ 5 &: 4 = n : p \\ 8 &: 5 = p : q \end{aligned}$$

So bedeutet m das Interesse, welches 2684 Thaler in 12 Monathen tragen, n das Interesse, welches eben die Summe in 27 Monathen geben muß, p das durch den Vergleich geminderte Interesse, und endlich q den Theil der ersten Person, welcher gesucht wird. Es ist also

$$q = \frac{2684 \times 27 \times 4 \times 5 \times 26}{550 \times 12 \times 5 \times 8}$$

durch die Division, welche man mit den Zahlen dieses Bruchs vornehmen kan, wird

$$q = \frac{244 \times 9 \times 26}{50 \times 4 \times 2}$$

und wenn man diese Zahlen nochmals dividiret, so erhält man

$$q = \frac{122 \times 9 \times 13}{50 \times 2}$$

$$\text{oder } q = \frac{61 \times 9 \times 13}{50} = \frac{7137}{50}$$

$$\text{also ist } q = 142\tfrac{37}{50}.$$

Neunter Abschnitt.

Von der Gleichheit und Verhältniß der Figuren.

§. 1.

Dieses musten wir uns bekant machen, ehe wir uns zur besonderen Betrachtung der ebenen Flächen wenden konten, von welchen wir den Begrif gleich Anfangs IV, 32. gegeben haben. Wir setzen, daß durch gerade oder krumme Linien dergleichen Flächen von allen Seiten eingeschlossen seyn, wodurch ebene Figuren entstehen, und wollen erwegen, wie sich deralcichen Figuren bey allerhand Bedingungen gegen einander verhalten; das ist, in welchen Umständen sie einander gleich sind, und was erfordert wird, wenn eine zwey- drey- viermal grösser seyn soll als die andere. Dadurch werden wir uns in den Stand setzen, die einfachern unter diesen Figuren überhaupt mit einander zu vergleichen.

Grund dieser Lehre.

§. 2. Wir haben einen Grundsatz nöthig, auf welchen wir diese Lehre bauen, und aus welchem wir vor allen Dingen von der Gleichheit zwoer Figuren urtheilen können. Da ist nun nichts natürlicher und leichter, als daß man die Figuren, welche man mit einander vergleichen will, auf einander passe, und zusehe, ob ihre Gränzen zusammen fallen, oder nicht. Denn geschiehet dieses, so ist kein Zweifel übrig, daß die Figuren gleich seyn; und dieses ist der Satz, aus welchem man gemeiniglich die Gleichheit der Figuren schließet, wie wir bereits zum öftern gethan haben, wenn sich die Gleichheit zwoer Figuren, die wir eben nicht suchten, von selbst, und indem wir bloß mit der Betrachtung ihrer Umkreise beschäftiget waren, darstellete. Auf die Art haben wir geschlossen, daß jede zwey Dreyecke, welche man aus gleichen Seiten zusammen gesetzet hat, auch der Fläche nach einander gleich seyn, weil sie dergestalt auf einander gebracht werden können, daß ihre Umkreise zusammen fallen. Und aus eben dem Grunde ist dieses

auch

auch von zwey Dreyecken geschlossen worden, in welchen gleiche Winkel von gleichen Seiten beschlossen werden; wie auch von denen, in welchen gleiche Seiten zwischen gleichen Winkeln liegen. Von einigen Arten der Vierecke, und von den Cirkeln, ist eben das zu sagen.

§. 3. Allein, weil auch solche Figuren einander gleich seyn können, deren Umkreise nicht eben zusammen fallen, zwey Dreyecke zum Exempel, welche gar verschiedene Seiten und Winkel haben, oder ein Dreyeck und ein Viereck, ein Viereck und ein Cirkel: so lässet sich dieses Kennzeichen gleicher Figuren nicht überall unmittelbar anwenden. Man muß in diesem Falle eine oder die andere, oder beyde Figuren, welche man vergleichen will, in Theile zerschneiden, welche auf einander passen können, und aus der Gleichheit dieser Theile auf die Gleichheit der ganzen Figuren schließen. Dieses geschiehet nicht ohne Umschweif, welcher zwar nicht groß ist; allein wir haben uns immer überall die gröste Leichtigkeit, die nur in unserer Gewalt ist, zum Zweck vorgesetzet, und wolten also gerne auch diese kleine Umschweife ersparen. Derowegen haben wir ein anderes Kennzeichen der Gleichheit zwoer Figuren erwehlet, aus welchen sowohl die Gleichheit der ebenen Figuren, als auch die Gleichheit der Cörper selbst, viel leichter einzusehen seyn wird, als wenn man der gemeinen Art folget, und überall die Figuren auf solche zurück bringet, welche auf einander passen können. Die Gleichförmigkeit und Deutlichkeit erfordert, daß wir diesen Grundsatz zuerst auf die ebene Flächen anwenden, ehe wir ihn von den Cörpern brauchen, ob er zwar bey den Oberflächen nicht so vielen Vortheil bringet, als bey den Cörpern.

[*Fig.* 205.] §. 4. Es bestehet aber dieser Grundsatz im nachfolgenden. Wenn man zwo Figuren, sie mögen geradelinicht oder krumlinicht seyn, ABCD und EFGH zwischen zwo Parallellinien AE, CG legen, und sodann eine dritte Linie IK, wie man will, mit den vorigen AE, CG parallel ziehen kan, deren Theile IL, MK, welche in die Figuren ABCD und EFGH fallen, einander gleich sind, IL, nemlich = MK, so sind die Figuren ABCD und EFGH einander gleich.

[*Fig.* 206.] §. 5. Wir haben nur etwas weniges, zu deutlicherem Verstande des Satzes anzumerken, welches desto nothwendiger ist, weil er neu scheinen kan, indem er in den Anfangsgründen noch nicht leicht gebrauchet worden ist. Ich erinnere demnach 1), daß es erlaubt seyn müsse, die Figuren im Anfange zu legen wie man will, und sie nach Belieben zu kehren und zu wenden; daß aber, nachdem man sie einmal so oder so zwischen Parallellinien gesetzet hat, man sie hernach nicht wieder

versetzen müsse. 2) Daß, indem gesaget wird, man müsse die Linie IK, nach Belieben, mit der AE parallel ziehen können, ohne daß die Theile IL, MK verschieden werden, man damit nicht sagen wolle, es müsse dieses nur bey einer oder der andern solchen Linie zutreffen, in welchem Falle allerdings die Figuren verschiedener Größe seyn könten; sondern es müssen die Theile einer mit der AE parallel gezogenen Linie, welche in die Figuren fallen, einander gleich seyn, man mag im übrigen diese Linie ziehen wie man will, so, daß man den Satz auch nachfolgendergestalt ausdrücken kan: wenn man zwo Figuren hat, ABCDA und EFGHE, und man kan durch dieselben beyde so viele Parallellinien ziehen BO, IK, CQ, DH als man will, deren Theile innerhalb den Figuren einander gleich sind, BN, nemlich = FO, und IL=MK, wie auch CI=GQ, so sind diese Figuren ABCDA, EFGHE einander gleich.

[*Fig.* 205.] §. 6. Wir zweifeln nicht, daß dieser Satz ansich klar und deutlich seyn werde. Solte ja noch einige Bedenklichkeit dabey übrig seyn, so wird dieselbe verschwinden, wenn man erweget, daß, da eine Oberfläche nach der Länge und Breite ausgedehnet ist, zwo Oberflächen einander gleich seyn müssen, wenn die eine so weit in die Länge ausgedehnet ist als die andere, und wenn sie eben so breit ist als die andere. Da nun aber die zwo Figuren ABCD und EFGH zwischen den Parallelen AE, CG liegen, so siehet man sogleich ein, daß beyde Figuren von der Linie AE bis an die Linie CG gleich ausgedehnet sind, weil diese Linien einander parallel liegen, und folgends überall gleiche Entfernungen von einander haben, und beyde Figuren sich von der einen dieser Parallellinien AE bis an die andere CG erstrecken. Will man nun diese Ausdehnung der Figuren von AE bis an CG vor die Breite derselben annehmen, wie man thun kan, so muß man sagen, daß die Figuren ABCD, EFGH gleich breit sind.

§. 7. Was aber die Ausdehnung der Figuren in die Länge betrift, welche nunmehro der Linie AE parallel genommen werden muß; so ist eine jede der Figuren ABCD, EFGH nach dieser Strecke ungleich ausgedehnet, oben weniger als in der Mitte, und in der Mitte mehr als weiter unten. Allein, wo man auch die Ausdehnung nach dieser Strecke in der einen Figur messen will, wie dieses bey der ersteren Figur ABCD durch IL geschehen ist; so findet man, daß die zwote Figur EFGH sich daselbst eben so weit von M nach K erstrecke, weil IL=MK. Also sind nicht nur die Figuren ABCD, EFGH zwischen den Parallellinien AE, CG in die Breite gleich ausgedehnet, sondern sie haben auch nach der Strecke der Parallellinien gleiche Ausdehnungen in die Länge, wo man auch diese Ausdehnungen

gen

gen der Figuren messen, und mit einander vergleichen will. Können bey so gestalten Sachen die Figuren ungleich seyn?

Gleichheit gewisser Parallelogrammen und Dreyecke.

§. 8. Wir können also diesen Satz ohne Bedenken zu den Betrachtungen anwenden; welche wir vorhaben. Damit wir uns aber desto deutlicher erklären können, müssen wir noch merken, daß bey denen Parallelogrammen und Dreyecken eine **Grundlinie** genennet werde, eine jede Seite der Figur, welche man annehmen will, wenn man sich vorstellet, daß das Dreyeck oder Parallelogrammum auf derselben stehe. Die Sache hat an sich keine Schwierigkeit, und wird gleich deutlicher werden.

[*Fig.* 207.] §. 9. Am leichtesten ist aus unserm Grundsatze einzusehen, daß jede zwey Parallelogrammen, welche auf gleichen Grundlinien stehen, und zwischen zwo Parallellinien enthalten sind, deren eine durch die Grundlinien gehet, einander gleich sind. Denn wenn auf den Grundlinien AB, CD, und zwischen den Parallellinien AD, EF die Parallelogrammen BE, CF stehen, und man ziehet mit der Linie AD die Linie GHIK parallel durch beyde Parallelogrammen: so ist leicht einzusehen, daß GH der Grundlinie AB des Viereckes BE, und IK der Grundlinie CD des Vierecks CF gleich seyn werde. Denn GB sowohl als ID sind ebenfals Parallelogrammen, weil ihre entgegen gesetzte Seiten einander parallel laufen, und also sind diese Seiten, welche einander entgegen gesetzet sind, auch einander gleich, IV, 200. Da nun aber gesetzt worden ist, daß die Grundlinie AB, CD einander gleich sind: so müssen auch die Linien GH, IK einander gleich seyn. Und weil dieses von einer jeden Linie, die wie GK mit der AD parallel gezogen wird, kan erwiesen werden: so sind auch die Parallelogrammen BE und CF nach unserm Grundsatze IX, 4. einander gleich.

[*Fig.* 208.] §. 10. Ich sehe nicht, was an der Bündigkeit dieses Beweises auszusetzen wäre. Doch wollen wir zur Erläuterung desjenigen, so von der gewöhnlichen Art die Gleichheit der Figuren zu erweisen, IX, 2. gesagt worden ist, sehen, wie Euclides diesen Satz erweiset. Er setzet zum Anfang, daß die zwey Parallelogrammen ABCD und ABFE auf einer gemeinschaftlichen Grundlinie AB, zwischen den parallelen AB und CF stehen; so ist $CD = AB = EF$: und wenn man zu diesen gleichen Linien CD, EF das Stück DE hinzu setzet, so wird auch $CD + DE = DE + EF$, das ist $CE = DF$. Es ist aber auch $CA = DB$ und $EA = BF$, weil dieses ebenfals einander entgegen gesetzte Seiten der Parallelogrammen sind.

Demnach sind die Seiten des Dreyeckes ECA den Seiten des Dreyeckes FDB gleich, CE nemlich = DF, CA = DB und AE = BF; und also sind auch diese Dreyecke selbst gleich, ECA = FDB. Es haben aber diese Dreyecke das Dreyeck GED mit einander gemeinschaftlich; man kan dieses Dreyeck von ihnen beyderseits abziehen. Geschiehet dieses, so wird auch ECA — EDG = FDB — EDG. Nun ist aus der Figur zu sehen, daß ECA — EDG das Viereck CAGD, und FDB — EDG das Viereck FEGB gebe, welche Vierecke demnach einander gleich seyn müssen. Und wenn man einem jeden dieser Vierecke das Dreyeck GAB zusetzet, so kommen wieder gleiche Figuren. Es ist aber CAGD + GAB = ABDC, und FEGB + GAB = ABFE, und diese Figuren ABDC, ABFE sind die Vierecke, deren Gleichheit solte erwiesen werden. Eben dieses kan nunmehro gar leicht auch von solchen Vierecken mit parallelen Seiten erwiesen werden, welche zwischen Parallellinien auf gleichen Grundlinien stehen, obwohl diese Grundlinien im übrigen außer einander liegen.

[*Fig.* 209.] §. 11. Man schließet aus diesem Satze, wie man ein Parallelogrammum machen könne, so einem andern dergleichen Viereck gleich ist, und einen gegebenen Winkel hat. Es sey das Parallelogrammum AB gegeben, und der gegebene Winkel sey C: man soll ein Parallelogrammum machen, so dem gegebenen AB gleich ist, und unter dessen Winkeln einer so groß sey als C. Dadurch wird die Größe der übrigen Winkel dieser Art Vierecke bestimmet; denn, ist in einem derselben ein Winkel gegeben, so sind alle gegeben. Man verlängere die Linie DB, und setze an dieselbe den Winkel EFG = C. Man verlängere auch die entgegen gesetzte Seite des Viereckes AB, bis sie die EF schneidet, und von dannen weiter, so viel nöthig ist, mache FG = DB, ziehe sodann durch G die gerade Linie GH der FE parallel, so wird das Parallelogrammum EG dem gegebenen AB gleich seyn, und den verlangeten Winkel haben.

§. 12. Auf diese Art verwandelt man ein jedes Parallelogrammum in ein rechtwinklichtes, wenn man alles machet, wie eben gewiesen worden ist, aber den Winkel EFG nicht schief, sondern gerade annimmet: und ein jedes schiefwinklichtes Parallelogrammum ist einem rechtwinklichten gleich, welches mit jenem eine gleiche Grundlinie hat, und zwischen einerley Parallellinien kan gesetzt werden.

§. 13. Man pfleget die Entfernung der Parallellinien AH, DG zwischen welchen zwey Parallelogrammen, oder auch jede zwo andere Figuren, beschrieben sind, das ist, die Perpendicularlinie auf die zwo parallelen AH und DG, welche zwischen ihnen enthalten ist, die Höhe der Parallelo-

lelogrammen, oder überhaupt der **Figuren** zu nennen; und man kan also den Satz, mit welchen wir gegenwärtig beschäftiget sind, auch also ausdrücken: alle Parallelogrammen, welche gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, sind einander gleich. Gesetzt EFGH sey ein rechtwinklichtes Parallelogrammum, so ist EF selbst seine Höhe, und eben diese EF ist auch die Höhe des Vierecks AB, welches dem EG gleich ist. Eben deswegen, weil die Höhe EF der beyden Parallelogrammen gemeinschaftlich ist, und DB=FG, sind die Parallelogramme einander gleich.

[*Fig.* 210.] §. 14. Man kan hieraus auch die Dreyecke mit einander vergleichen. Denn man kan ein jedes Dreyeck zu einem Parallelogrammum machen, von welchem es die Helfte ist, IV, 182. Stehen nun zwey Dreyecke ABC, DEF auf gleichen Grundlinien BC, EF zwischen denen Parallellinien BF, AG, und man machet die Parallelogramme BH, EG aus denselben, (welches leicht geschehen kan, wenn man nur AH der BC, und DG der EF gleich machet, und sodann die geraden Linien CH und FG ziehet) so sind die Parallelogramme einander gleich, und folgends auch die Dreyecke, ABC, DEF, welche ihre Helften sind. Und also sind alle Dreyecke, welche gleiche Grundlinien BC=EF haben, und einerley Höhen, oder welche zwischen einerley Parallellinien BF, AG können gesetzet werden, einander gleich.

§. 15. Dieses ist der gemeine Beweiß dieses Satzes: allein da hier vornemlich mit den Nutzen des Grundsatzes IX, 4. von der Gleichheit der Figuren, welchen wir angenommen haben, zu zeigen, und zu erläutern ist, so würden wir wieder unsern Zweck handeln, wenn wir nicht auch diesen Satz von der Gleichheit der Dreyecke aus demselben erweisen wolten.

[*Fig.* 211.] §. 16. Es seyn demnach die Dreyecke ABC und a b c beyde zwischen den Parallellinien BC und DE beschrieben, und ihre Grundlinien BC, bc seyn einander gleich. Man ziehe die gerade Linie F g wie man wil, mit der B c oder DE parallel. Es ist zu beweisen, daß die Theile dieser geraden Linie FG, fg, welche innerhalb der Figuren fallen, einander gleich seyn werden, woraus sodann, nach dem Grundsatze, die Gleichheit der Dreyecke sogleich folgen wird. Dieser Beweiß stehet folgendergestalt. Weil die zwo geraden Linien AB und ab beyde von den drey Parallellinien DE, F g und B c, geschnitten werden, so ist die Verhältniß AB:AF der Verhältniß ab:af gleich. Und man hat die Proportion AB: AF=ab:af, VII, 7. Nun aber hat man auch in dem Dreyecke ABC, in welchen FG mit der BC parallel gezogen worden, nachstehende gleiche Verhältnisse BC:FG=AB:AF; und in dem Dreyeck abc kan man aus

eben dem Grunde schließen, bc:fg=ab:af, VII, 27. Da nun also die beyden Verhältnisse BC:FG und bc:fg den beyden Verhältnissen AB: AF, und ab:af gleich sind, von diesen letzteren aber gewiesen worden ist, daß sie einander gleich sind, so müssen auch jene gleich seyn, die Verhältniß, nemlich BC:FG der Verhältniß bc:fg, und die Proportion BC:FG= bc:fg muß richtig seyn. Oder solte man die Sache nicht so geschwind übersehen können, so schreibe man die erwiesene Proportionen ordentlich:

AB : AF = ab : af,
AB : AF = BC : FG
ab : af = bc : fg,

so kan man aus den zwo erstern Verhältnissen diese schließen ab:af=BC: FG, und aus dieser und der dritten folget BC:FG=bc:fg. Nun aber ist BC=bc, denn die Dreyecke ABC, abc haben gleiche Grundlinien, folgends auch FG=fg.

§. 17. Es ist fast nicht nöthig etwas weiter hinzu zu fügen. Man siehet leicht, daß, eben wie Fg gezogen worden ist, sich auch durch alle Punete der Dreyecke Parallellinien ziehen lassen, von welchen die Stücke, welche innerhalb die Dreyecke fallen, wie hier FG, fg, jederzeit gleich sind; und dieses ist eben das Kennzeichen, welches wir überhaupt angenommen haben, die Gleichheit der Figuren einzusehen. Aber man siehet auch hieraus unmittelbar, daß nicht allein die Dreyecke ABC, abc welche auf gleichen Grundlinien, zwischen einerley Parallelen stehen, einander gleich sind, sondern daß dieses auch von den Vierecken richtig ist, welche von den Dreyecken durch die gerade Linie Fg abgeschnitten werden. Es ist nemlich FC= fc: ferner sind auch die Dreyecke AFG und afg, gleich, welche übrig bleiben, wenn man von den ganzen Dreyecken ABC, abc die Vierecke FC, fc durch die Linie Fg abschneidet. Wiewohl diese Dreyecke stehen auch auf gleichen Grundlinien FG=fg, zwischen den Parallellinien DE und Fg.

[*Fig.* 212.] §. 18. Wenn ein Dreyeck und ein Parallelogrammum zwischen zwo Parallellinien auf gleichen Grundlinien stehen, so ist das Dreyeck die Helfte des Viereckes. Dieses ist aus dem gesageten gar bald geschlossen. ABC ist das Dreyeck, DEFG das Parallelogrammum: es wird gesetzt, es sey BC=DE, und man soll zeigen, daß das Dreyeck ABC halb so groß sey, als das Viereck DEFG. Es sey die Queerlinie GE gezogen, welche das Parallelogrammum in zwey gleiche Dreyecke GDE, GFE theilen wird, wie längst IV, 202. gezeiget worden ist, und auch daraus sichtlich ist, weil die zwey Dreyecke GDE, FGE gleiche Grundlinien DE, GF, und gleiche Höhen haben. Es ist demnach das Dreyeck GDE die Helfte des Vierecks DF.

Nun

Nun ist das eben genannte Dreyeck GDE dem Dreyecke ABC gleich, IX, 14. also ist auch ABC die Helfte des Viereckes DF.

[*Fig.* 213.] §. 19. Theilet man die Grundlinie des Viereckes GE mit H in zwey gleiche Theile, und ziehet HI mit der DG parallel; so sind auch die zwey Vierecke DI und HF einander gleich, und jedes derselben ist die Helfte des ganzen Viereckes DF. Nun ist das Dreyeck ABC ebenfals die Helfte dieses Viereckes DF, derowegen ist das Dreyeck ABC dem Viereke DI gleich. Man machet also leicht ein Parallelogrammum, welches einem gegebenen Dreyecke gleich ist, wenn man nur die Grundlinie DH dieses Vierecks halb so groß nimmet, als die Grundlinie des Dreyeckes BC ist, und hernach auf DH ein Parallelogrammum DI beschreibet, dessen Höhe so groß ist als die Höhe des Dreyeckes ABC. Man kan dazu den Winkel bey D so groß oder so klein annehmen als man will. Machet man diesen Winkel bey D gerade, so bekommet man ein geradewinklichtes Viereck, welches dem Dreyecke ABC gleich ist. Und auf die Art kan ein jedes Dreyeck in ein rechtwinklichtes Viereck verwandelt werden.

[*Fig.* 214.] §. 20. Aus eben dem Satze von der Gleichheit der Dreyecke, welche auf gleichen Grundlinien zwischen zwo Parallellinien stehen, wird auch geschlossen, daß ein Viereck, unter dessen Seiten zwo anzutreffen sind, die einander parallel laufen, einem Dreyecke gleich sey, dessen Grundlinie, die Summe der gedachten parallelen Seiten ist, und die Höhe, die Entfernung derselben von einander. Es sey ABCD ein dergleichen Viereck, und AD sey der BC parallel. Man ziehe AC, und theile dadurch das Viereck in zwey Dreyecke ABC, ACD. Sodann mache man in der verlängerten BC die Linie CE = AD, und ziehe AE. Weil nun die zwey Dreyecke ADC, ACE zwischen den parallelen AD, BE auf gleichen Grundlinien AD, CE stehen: so sind diese Dreyecke einander gleich. Folgends ist ABC + ADC = ABC + ACE, das ist, das Viereck ABCD ist dem Dreyeck ABE gleich. Nun ist die Grundlinie desselben BE = BC + CE, das ist, = BC + AD, weil CE = AD, und seine Höhe ist die Entfernung der Parallellinien AD, BE von einander. Hieraus ist es leicht ein dergleichen Viereck, in ein Parallelogrammum zu verwandeln. Die Grundlinie dieses Parallelogrammum wird $\frac{1}{2}$BE, das ist $\frac{1}{2}$BC + $\frac{1}{2}$CE, oder $\frac{1}{2}$BC + $\frac{1}{2}$AD, und seine Höhe ist der Höhe des Dreyeckes ABE gleich.

Die übrige ebene Figuren mit Dreyecken zu vergleichen.

§. 21. Was die übrige geradelinichte Figuren anlanget, welche unter

ter denen, die wir betrachtet haben nicht mit begriffen sind, das ist, bey welchen sich das allgemeine Kennzeichen der Gleichheit der Figuren entweder gar nicht, oder doch nicht leicht, anwenden lässet: so sind dieselben gleich, wenn sie aus gleichen Dreyecken zusammen gesetzet sind, und dieses ist ein Kennzeichen ihrer Gleichheit. Man kan nemlich eine jede solche Figur durch Queerlinien in Dreyecke zertheilen. Hat man nun zwey Vielecke mit einander zu vergleichen, so theile man sie in Dreyecke, und sehe, ob dieses so geschehen könne, daß vor jedes Dreyeck, welches in der ersten Figur vorkommet, in der andern ein Dreyeck vorkomme, welches jenem gleich ist. Ist dieses, so sind die Figuren nothwendig gleich. Allein weil daraus, daß die Figuren nicht dergestalt getheilet werden können, nicht folget, daß sie ungleich sind (denn es können auch die Summen ungleicher Größen gleich seyn, und aus ungleichen Dreyecken können gleiche Figuren zusammen gesetzet werden) so ist diese Art die Gleichheit der Figuren zu untersuchen nicht überall anzuwenden.

§. 22. Man kan sich derowegen noch eine andere Methode vorstellen, die geradelinichte Figuren mit einander zu vergleichen, welche die Unbequemlichkeiten der vorigen nicht hat, und welche darinne bestehet, daß man eine jede vieleckichte Figur erstlich in ein einziges Dreyeck, und hernach in ein geradewinklichtes Viereck verwandelt. Denn wenn man dieses bey zwo Figuren beobachtet, und setzet vor beyde Figuren rechtwinklichte Vierecke, welche ihnen gleich sind, so kan man hernach zum öftern durch das, so bereits gewiesen worden ist, sonst aber allezeit vermittelst desjenigen, so folgen wird, diese rechtwinklichte Figuren mit einander vergleichen, und sehen, ob sie gleich sind oder nicht. Findet man nun das erste, so ist der Schluß leicht gemacht, daß auch die Vielecke, aus welchen sie gemacht werden, und welchen sie gleich sind, einander gleich seyn müssen.

§. 23. Wir wollen diese Anweisung, jedes geradelinichtes Vieleck in ein Dreyeck zu verwandeln, so leicht vorstellen als es möglich ist. Sie bestehet darinnen, daß, wenn eine vieleckichte Figur gegeben ist, von so vielen Seiten als man will, man eine andere Figur mache, welche eine Seite weniger hat als jene, und doch jener gleich ist. Man sihet leicht, daß, wenn man dieses bey allen Vielecken bewerkstelligen kan; man leicht aus einem Sechsecke ein Fünfeck, aus einem Fünfecke ein Viereck, und endlich aus einem Vierecke ein Dreyeck werde machen können. Wir haben also in der That nichts anders zu lernen, als wie überhaupt die Zahl der Seiten einer jeden geradelinichten Figur um eine zu vermindern sey.

[*Fig.* 215.] §. 24. Es sey die Figur das Sechseck ABCDEF, welches

ches in ein Fünfeck verwandelt werden soll. Man schneide vermittelst einer Queerlinie AE von dem gegebenen Sechsecke ein Dreyeck ab, wie hier AFE. Durch die Spitze dieses Dreyecks F ziehe man mit der gezogenen Queerlinie AE die gerade Linie FG parallel. Man verlängere sodann eine von den Seiten des Sechsecks, welche an der AE liegen, als BA, so lange, bis sie die Linie GF in G schneidet, so kan man eine gerade Linie GE ziehen, und man hat an statt des Sechsecks ABCDEFA, das Fünfeck GBCDEG, welches dem Sechseck gleich ist.

§. 25. Diese Gleichheit ist also einzusehen. Das Sechseck ABCDEF bestehet aus dem Fünfeck ABCDEA, und aus dem Dreyeck AEF; das Fünfeck GBCDE aber bestehet wieder aus ABCDEA und aus dem Dreyecke GAE. Nun sind die zwey Dreyecke FAE und GAE gleich, weil sie beyde auf der Seite AE und zwischen den Parallellinien AE, GF stehen. Derowegen sind die zwo Figuren, das Sechseck und das Fünfeck, aus Theilen zusammen gesetzt, welche einander gleich sind, nemlich das Sechseck aus ABCDEA+AEF, und das Fünfeck aus ABCDEA+AEG, woraus allerdings folget, daß diese Figuren einander gleich sind. Es ist aber das Sechseck in ein Fünfeck verwandelt worden, indem der Winkel FAB verschwunden ist, da man an die Stelle der zwo Seiten BA+AF, diese zwo BA+AG in die Figur gebracht hat, welche gerade ausliegen, und in der That nur eine Seite BAG geben.

§. 26. Soll man aber ein Dreyeck machen, welches einem gegebenen regulären Vielecke gleich ist, so kan man viel leichter fertig werden, als mit andern Vielecken. Man kan jederzeit in einem regulären Vielecke ein Punct finden, welches von allen Ecken, wie auch von allen Seiten der Figur, gleich weit entfernet ist, und wenn man von diesem Puncte, welches wir den Mittelpunct des Vieleckes nennen wollen, an alle Ecken des Vieleckes gerade Linien ziehet, so wird das Vieleck in lauter solche Dreyecke getheilet, welche auf einander passen können. Man könte dieses als bekant annehmen, denn es fließet aus demjenigen, so wir von der Beschreibung dieser Art Vielecke gewiesen haben, unmittelbar; und der Mittelpunct des Vielecks ist mit dem Mittelpuncte des Cirkels, in welchen oder um welchen das Vieleck beschrieben worden ist, einerley. Doch ist es besser, daß wir es vorne beweisen. Wir hätten dieses bereits thun können, und vielleicht auch bereits thun sollen. Ich enthalte mich aber zuweilen mit Fleiß, den Leser mit solchen Sätzen zu überhäufen, deren Nutzen ihm nicht sogleich in die Augen leuchtet, und ich will es nur bekennen, es begegnet mir auch zuweilen, daß ich einen oder den andern Satz, welcher seinen Nutzen erst in den folgenden

hat, mitzunehmen vergesse, welcher hernach da muß eingerücket werden, wo er gebrauchet wird.

[*Fig.* 216.] §. 27. Es ist also zu beweisen, daß ein jedes reguläres Vieleck einen Mittelpunct habe. Man wird dieses am besten einsehen können, wenn wir weisen, wie derselbe zu finden sey. Es sey das reguläre Siebeneck ABD gegeben, und dessen Mittelpunct zu suchen. Man theile den Winkel desselben A, vermittelst der Linie AC, in zwey gleiche Theile, wie auch den nebenstehenden B vermittelst der BC. Diese geraden Linien AC, BC laufen nothwendig in einem Puncte zusammen. Man bemerke dieses mit C, so ist C der gesuchte Mittelpunct. Denn die Winkel CAB, CBA sind einander gleich, weil sie die Helften der gleichen Polygonwinkel A und B sind. Folgends sind auch die Seiten AC und CB, in dem Dreyeck ACB einander gleich. Man ziehe von C an die nächste Ecke des Vieleckes die gerade Linie CE. Weil nun auch CBE die Helfte des Polygonwinkels B und folgends dem Winkel CAB gleich ist, aber auch CB = CA, und BE = AB, so ist das Dreyeck CBE dem Dreyecke CAB gleich und ähnlich, und CE = CB, aber auch CEB = CBA, IV, 116. und CEB ist wieder die Helfte des Polygonwinkels. Demnach sind die drey Puncte A, B, E von dem Mittelpuncte C gleich weit entfernet: aber man hat auch eben die Gründe weiter zu gehen und zu zeigen, daß D von C so weit entfernet sey, als E, welche gebrauchet worden sind zu zeigen, daß E von C so weit entfernet sey als B. Man kan also schließen, daß alle Spitzen der Winkel des Vieleckes von dem Puncte C gleich weit entfernet sind, wie auch, daß durch die gerade Linien CA, CB, CE und so fort, das reguläre Vieleck in gleiche Dreyecke zertheilet werde.

§. 28. Und hieraus schließet man leicht, daß auch alle Seiten der Figur von C gleich weit entfernet sind. Denn die Entfernungen der Seiten von C sind die Perpendicularlinien, welche aus C auf die Seiten fallen, dergleichen CF ist. Daß aber diese Perpendicularlinien alle gleich sind, siehet man aus der Gleichheit und Aehnlichkeit der Dreyecke CAB, CBE gar leicht, und wir wollen den Leser mit diesem Beweise nicht einmal aufhalten. Also ist daran nicht zu zweifeln, daß, wenn man aus C als dem Mittelpuncte durch A einen Cirkelkreis beschreibet, dieser auch durch B, E, D und die übrigen Ecken der Figur gehen werde, wie auch, daß, wenn man um eben dieses Punct C einen Cirkelkreis dergestalt beschreibet, daß er die Seite AB berühret, er die übrigen Seiten alle berühren werde. In dem ersten Falle wird der Cirkelkreis um die reguläre Figur beschrieben, in dem andern Falle aber in dieselbe.

[*Fig.* 216. 217.] §. 29. Will man nun ein Dreyeck beschreiben, welches einem beliebig angenommenen Theile der regulären Vielecke CABEDC gleich ist, so verfahre man folgendergestalt. Man setze an eine beliebig angenomme gerade Linie ab = AB, ziehe auf eben diese Linie cf perpendicular, und mache sie so groß als CF ist. Sodann ziehe man ca, cb; so wird das Dreyeck cab dem Dreyeck CAB gleich; weil diese Dreyecke gleiche Grundlinien AB = ab, und gleiche Höhen CF = cf haben. Ferner mache man auch be = AB und ziehe ce, so ist das Dreyeck cbe wieder dem Dreyecke ACB, aus eben der Ursach gleich, weil sie nemlich gleiche Grundlinien be = AB, und gleiche Höhen CF = cf haben. Es ist aber auch das Dreyeck CAB dem Dreyecke CBE gleich, und folgends auch cbe = CBE. Fähret man nun in dieser Arbeit fort, und machet wieder ed = AB, und ziehet cd, so wird aus den wiederholten Gründen wieder ced = ACB = CED. Da nun also CAB = cab, und CBE = cbe, wie auch CED = ced, so ist allerdings die Summe der erstern dieser Dreyecke CAB + CBE + CED gleich der Summe der letztern cab + cbe + ced, und die Figur CABEDC, welche aus den erstern Dreyecken zusammen gesetzet ist, ist gleich dem Dreyecke cad, welches aus den letztern Dreyecken bestehet. Man siehet aber auch daß ab + be + ed = AB + BE + ED, das ist, daß ad, die Grundlinie des Dreyeckes cad, dem Theile des Umkreises der regulären Figur ABED, gleich sey.

§. 30. Demnach ist das Stück des regulären Vieleckes, welches wir betrachten CABEDC einem Dreyeck cad gleich, dessen Grundlinie ad dem äußern Umkreise desselben ABED; und dessen Höhe cf der geraden Linie CF, welche aus dem Mittelpuncte des regulären Vieleckes auf eine Seite desselben perpendicular gefallen, das ist, der Entfernung der Seiten von dem Mittelpuncte gleich ist. Wir schließen hieraus zweyerley: Erstlich, daß, was von dem Theile des regulären Vieleckes erwiesen worden ist, auch von dem ganzen Vielecke dergestalt richtig sey, daß, wenn man ein Dreyeck verfertigen will, welches einem regulären Vielecke gleich ist, man nur zur Grundlinie desselben den ganzen Umkreis des Vieleckes, und zur Höhe eben die Linie CF nehmen müsse. Oder daß ein jedes reguläres Vieleck einem Dreyecke gleich sey, dessen Grundlinie der ganze Umkreis des Vieleckes ist, und die Höhe, die Entfernung der Seiten des Vieleckes von dem Mittelpuncte desselben. Und zweytens, daß, was hier von dem Theile des regulären Vieleckes CABED erwiesen worden ist, überhaupt von solchen Figuren richtig sey, welche, wie CABED aus gleichen und ähnlichen gleichschenklichten Dreyecken zusammen gesetzet sind, ob sie zwar nicht als ein Theil eines regulären Vieleckes angesehen werden können. Denn aus diesen Be-

griffen, daß die Dreyecke CAB, CBE, CED gleich, ähnlich und gleichschenklicht sind, ist dasjenige, so wir hier erwiesen haben, allein hergeleitet worden, und kan also überhaupt von allen Figuren geschlossen werden, welche so wie CABED aus dergleichen Dreyecken zusammen gesetzt sind.

[*Fig.* 218.] §. 31. Daß aber dergleichen Figuren seyn können, welche aus gleichen und ähnlichen gleichschenklichten Dreyecken, wie CABED zusammen gesetzt sind, ob sie zwar nicht zu regulären Figuren ergänzet werden können, siehet man gar leicht ein. Gesetzt, zum Exempel, der Winkel ACB in der 218 Figur betrüge $\frac{1}{2}\frac{1}{1}$ eines geraden Winkels, so würde er, wenn man ihn siebenmal um C setzet $\frac{7}{2}\frac{7}{1}$, das ist, $3\frac{2}{3}$ gerade Winkel betragen, und also weniger als viere. Demnach würden ACB, BCD, DCE und so fort, kein reguläres Vieleck voll machen. Acht mal aber könte man diesen Winkel um C nicht setzen, weil $\frac{1}{2}\frac{1}{1}$ acht mal genommen $\frac{8}{2}\frac{8}{1}$ giebet, das ist $4\frac{4}{2}\frac{4}{1}$, und also mehr als vier gerade Winkel.

§. 32. Indessen kan man auch hier aus C durch A einen Cirkelbogen beschreiben, welcher durch die Puncte B, D, E, gehen wird. Wir setzen, es sey dieses geschehen, so ist aus demjenigen klar, so wir oben V, 90. von den regulären Polygonen, die in einen Cirkel beschrieben sind, gezeiget haben, daß, wenn man die Zahl der Seiten AB, BD, DE, vermehret, ohne daß man den Bogen AE vergrößere, der Umkreis des Polygons dem Cirkelbogen, und die Perpendicularlinie CF dem Halbmesser, immer näher und näher kommen werde: und dieses zwar ohne Ende, das ist, ohne daß man jemals gezwungen wird, in dieser Näherung aufzuhören. Denn man kan die Zahl der Seiten, so groß sie auch seyn mag, noch immer vermehren. Und eben so deutlich ist es auch, daß, wenn man mit den Seiten AB, BD, DE andere ab, bd, de parallel ziehet, welche die Cirkelbogen berühren, und vermehret nach und nach die Zahl dieser Seiten, sich auch der Umkreis abde dem Cirkelbogen AE ohne Ende nähern werde.

[*Fig.* 219.] §. 33. Dieses nun giebet uns die Schlüsse an die Hand, durch welche wir wenigstens den Gedanken eine geradelinichte Figur vorstellen können, welche so groß ist als der Ausschnitt des Cirkels CABDE. Denn dieselbe würklich zu beschreiben, ist deswegen nicht möglich, weil man dieses zu bewerkstellen eine gerade Linie haben müste, die so groß ist als der Cirkelbogen AE, welche anzugeben noch zur Zeit in keines Geometra Gewalt ist, wenn von einer solchen Richtigkeit die Rede ist, welche gar nicht fehlet, und durch unwidersprechliche Schlüsse dargethan werden kan, dergleichen man in dieser Wissenschaft überall suchet. Könte man aber dieses machen, und wäre die Linie GH in der 219 Zeichnung dem Bo-

gen

gen AE vollkommen gleich, so dürfte man hernach nur auf GH ein Dreyeck GHI setzen, dessen Höhe GI so groß ist, als der Radius des Ausschnittes CA. Dieses Dreyeck GHI wäre dem Ausschnitte CAE gewiß vollkommen gleich. Und daß dieses sey, kan aus den bisher gezeigten Gründen dargethan werden.

§. 34. Es ist nemlich klar, daß die geradelinichte Figur CABDE kleiner sey als das Dreyeck IGH. Denn wenn man ein Dreyeck machen will, welches der Figur CABDE gleich ist, so muß die Höhe desselben der CF gleich gemacht werden, und also kleiner als CA oder IG; die Grundlinie aber muß so groß werden als ABDE, und also kleiner als GH. Woraus nothwendig folget, daß das Dreyeck, welches dem Vielecke CABDE gleich ist, und folgends das Vieleck selbst, kleiner sey als IGH. Indessen nähert sich das Vieleck CABDE dem Dreyecke IGH beständig, wenn man die Zahl seiner Seiten vermehret, weil dadurch sowohl CF der IG, als auch ABDE der GH immer näher kommet; niemals aber kan das Vieleck CABDE größer werden als das Dreyeck IGH. Hieraus aber schließen wir, daß es nicht möglich sey, daß der Ausschnitt CAE kleiner sey als das Dreyeck IGH. Denn wäre der Ausschnitt kleiner als das Dreyeck, so könte man machen, daß ein Vieleck CABDE größer würde als der Ausschnitt CAE. Gesetzt, der Ausschnitt wäre so groß als das Dreyeck IKL. Weil nun durch die Vermehrung der Seiten des Vieleckes CABDE man dem Dreyecke IGH immer näher und näher kommen kan, so kan man ihm auch näher kommen, als das Dreyeck IKL dem Dreyecke IGH ist, das ist, man kan machen, daß das Vieleck größer wird als IKL. Alsdenn aber ist das Vieleck größer als der Ausschnitt, von welchem gesetzet wird, daß er dem IKL gleich sey. Es ist aber unmöglich, daß das Vieleck CABDE jemals größer werde als der Ausschnitt CAE: also ist auch das Dreyeck IGH nicht größer als der Ausschnitt CAE, oder der Ausschnitt nicht kleiner als das Dreyeck.

§. 35. Man kan aber auch auf eben die Art zeigen, daß das Dreyeck IGH nicht kleiner seyn könne als der Ausschnitt CAE. Denn das Vieleck Cabde ist zwar größer als das Dreyeck IGH, weil die Grundlinie des Dreyeckes, welches dem Vielecke Cabde gleich ist, das ist, die Länge des Umkreises desselben abde, größer als der Cirkelbogen AE, und folgends auch größer als GH, die Höhe aber des dem Vielecke Cabde gleichen Dreyecks, Ck, der Höhe IG=CA gleich ist. Man kan aber durch die Vermehrung der Seiten des Umkreises abde denselben dem Cirkelbogen AE immer näher und näher bringen, und dadurch auch das Vieleck

Cabde dem Dreyecke IGH nach Belieben immer mehr und mehr nähern; doch niemals kan das Vieleck kleiner werden als das Dreyeck IGH, weil weder die Höhe desselben Cf kleiner werden kan als IG, noch auch der Umkreis abde kleiner als der Bogen AE=GH. Ist aber dieses alles, so kan auch der Ausschnitt CAE nicht gröſſer seyn als das Dreyeck IGH. Denn wäre der Ausschnitt gröſſer als IGH, und etwa so groß als IMN, so könte man eine vieleckichte Figur, dergleichen Cabde ist machen, die kleiner wäre als der Ausschnitt. Denn weil man eine solche Figur machen kan, deren Größe dem Dreyecke IGH so nahe kommet, als man wil, so kan man auch eine machen, deren Größe von der Größe des Dreyecks IGH weniger verschieden ist, als die Größe des Dreyeckes IMN. In diesem Falle aber ist das Vieleck Cabde kleiner als der Ausschnitt ACE, weil man setzet, daß dieser Ausschnitt dem Dreyecke IMN gleich sey. Es ist demnach der Ausschnitt CAE auch nicht gröſſer als das Dreyeck IGH.

§. 36. Und da also der Ausschnitt eines Cirkels CAE weder gröſſer noch kleiner ist als das Dreyeck IGH, dessen Grundlinie GH dem Bogen des Ausschnittes AE, und dessen Höhe IG dem Halbmesser desselben CA gleich ist, so muß nothwendig der Ausschnitt CAE dem Dreyecke IGH gleich seyn. Also ist der vierte Theil eines Cirkels einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie dem Quadranten, und dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist, und eben diese Höhe muß man behalten, wenn man ein Dreyeck machen wil, welches einem halben oder einem ganzen Cirkel gleich ist; nur muß zu dem halben Cirkel die Grundlinie des Dreyeckes dem halben Umkreise gleich genommen werden, und wenn das Dreyeck einem ganzen Cirkel gleich seyn sol, so muß man zu seiner Grundlinie eine Länge annehmen, welche dem ganzen Umkreise des Cirkels gleich ist.

Allgemeine Gründe, die Dreyecke und Parallelogramme mit einander zu vergleichen.

§. 37. So weit konte uns unser Grundsatz führen. Es sind aber wie wir schon einiger maßen erwehnet haben, die bisher angegebene Sätze noch nicht hinlänglich von der Gleichheit aller Figuren ein Urtheil zu fällen. Sie langen nicht einmal bey den einfachesten, nemlich den Dreyecken, oder den rechtwinklichten Vierecken überall zu, noch vielweniger sind wir im Stande vermittelst derselben die Verhältniß, welche zwo ungleiche Figuren

gegen

gegen einander haben, anzuzeigen. Denn es folget nicht, zwey Dreyecke oder zwey Parallelogrammen haben ungleiche Grundlinien, oder ungleiche Höhen, also sind sie ungleich. Es kan seyn, daß der einen Figur so viel an der Länge abgehet, als sie im Gegentheile breiter ist als die andere, und können also die Figuren, bey verschiedenen Längen und Breiten, doch gleich seyn. Wir müssen untersuchen, unter was vor Umständen diese Gleichheit der Dreyecke und der Parallelogramme, bey verschiedenen Grundlinien und Höhen, statt habe; aber wir werden dieselbe nicht einsehen können, wenn wir nicht erst überhaupt ihre Verhältnisse gegen einander betrachten. So bald diese ausgemacht seyn wird, werden wir im Stande seyn von der Vergleichung der Größe aller ebenen Flächen etwas allgemeines anzugeben. Wir fangen natürlicher Weise von solchen Dreyecken und Parallelogrammen an, welche gleiche Höhen haben, von was vor Größe auch übrigens ihre Winkel seyn mögen.

[*Fig.* 220.] §. 38. Es seyn ABC und abc zwey Dreyecke von gleicher Höhe. Man theile die Grundlinie BC des einen in eine beliebige Zahl gleicher Theile, wie wir öfters gethan haben, wenn wir die Verhältnisse der Größen untersuchten, und ziehe von allen Theilungspuncten gerade Linien nach der Spitze des Dreyeckes A. Dadurch wird das Dreyeck ABC in Theile getheilet, welche einander alle gleich sind, IX, 14. Denn es haben die kleinen Dreyecke, in welche dasselbe zerfället worden ist, alle gleiche Grundlinien und gleiche Höhen, oder sie stehen alle auf gleichen Grundlinien zwischen den Parallellinien Bc und Aa. Nunmehro lege man bc aus B in D, und ziehe DA, so wird auch das Dreyeck ABD dem Dreyecke abc gleich seyn, weil diese Dreyecke ebenfals sowohl gleiche Höhen als gleiche Grundlinien haben. Man siehet aber auch leicht, daß eben dadurch das äußerste Punct D der Grundlinie BD zwischen diejenige Theilungspuncte der Linie BC fället, welche von dem Anfange derselben B um so viele gleiche Theilchen entfernet sind, als viele gleiche Theile des Dreyeckes ABC zwischen der ersten Linie AB und denjenigen liegen, zwischen welche die AD fället: und es ist nicht nöthig zu erinnern, daß dieses bey einer jeden Theilung der BC folgen müsse, weil ein bloßer Blick in die Figur, uns davon zu überzeugen, genugsam ist. Dieses aber ist das Kennzeichen, daß sich das Dreyeck ABD zu dem Dreyecke ABC verhalte, wie sich die Grundlinie des ersteren BD zu der Grundlinie des zweyten BC verhält, VI, 71. Ist aber ABD : ABC = BD : BC, so ist auch abc : ABC = bc : BC. Denn diese Proportion folget aus jener, wenn man an die Stelle der ABD und BD, die Größen abc, bc setzet, welche ihnen gleich sind. Es

verh-

verhalten sich demnach zwey Dreyecke abc, ABC, welche gleiche Höhen haben, gegen einander, wie ihre Grundlinien bc, BC.

§. 39. Wil man bey diesem Beweise bis auf die ersten Begriffe zurücke gehen, und zum Grunde legen, daß die Verhältnisse solcher Größen gleich seyn, welche durch einerley gleichförmiges Wachsthum zugleich entstehen, so wird man mit dem Beweise fast noch eher fertig. Denn nachdem man die AB gezogen hat, so stelle man sich vor, daß die Linie BC nach und nach anwachse, und daß jederzeit durch das äußerste Punct derselben, und durch A eine gerade Linie wie DA oder CA, gehe: so ist klar, daß, indem eines der gleichen Theilchen, die man sich in BC vorstellet, anwächset, so groß oder so klein man auch diese Theilchen annehmen wil, auch eines der gleichen Theilchen des Dreyeckes ABC erzeuget werde. Es entstehen also BD und ABD, wie auch BC und ABC durch einerley gleichförmiges Wachsthum, zugleich. Folgends verhält sich allerdings BD zur BC, wie sich ABD zum ABC verhält, und die Proportion ABD:ABC=BD:BC ist richtig, VI, 78.

[*Fig.* 221.] §. 40. Man wird nach einem gar kleinen Nachdenken finden, daß dasjenige, so hier von den Dreyecken gewiesen worden ist, auch von den Parallelogrammen richtig sey, und daß auch dieser Figuren ihre Größen, oder die Flächen welche von ihren Umkreisen beschlossen werden, sich gegen einander so, wie ihre Grundlinien, verhalten; wenn die Parallelogramme gleiche Höhen haben: ihre Winkel mögen im übrigen beschaffen seyn wie sie wollen. Der Beweiß ist vollkommen wie derjenige, welchen wir eben bey den Dreyecken gebraucht haben, und man darf nur die Augen auf die 221 Figur werfen, um ihn einzusehen. Es sind in derselben ABC, und abc Parallelogramme von gleichen Höhen, BC ist, wie vorher die Grundlinie des Dreyeckes, in gleiche Theile getheilet, und durch die der Seite AB parallel laufende Linien, welche durch diese Theilungspuncte gezogen sind, ist auch das Viereck ABC in gleiche Vierecke zerfället worden, deren an der Zahl so viele sind, als viele gleiche Theilchen man der BC gegeben hat; BD ist der bc gleich gemacht worden, und folgends auch das Viereck ABD dem Viereckе abc. Aus diesen Gründen haben wir geschlossen, daß das Dreyeck ABD oder abc sich zu dem Dreyecke ABC verhalte, wie BD oder bc zur BC. Man wird also hier eben das schließen müssen, wenn diese Buchstaben die Vierecke der 221 Figur bedeuten, und die Proportion abc:ABC=bc:BC wird auch hier richtig seyn.

[*Fig.* 222.] §. 41. Sind die Dreyecke oder die Parallelogramme geradewinklicht, so kan man diejenige Seiten ihre Grundlinien nennen, welche

welche man vorher als ihre Höhen angesehen hat, wodurch dann die Seiten, welche vorhero die Grundlinien waren, nunmehro ihre Höhen werden. Eine Figur kan dieses deutlicher machen. Wenn ABC ein geradewinklichtes Dreyeck oder Viereck ist, und man siehet BC als seine Grundlinie an, so ist AB seine Höhe, denn diese Linie ist hier die Entfernung der Linie, welche durch die Spitze A mit der Grundlinie BC parallel kan gezogen werden, von dieser Grundlinie. Nimmet man aber AB vor die Grundlinie an, so wird sodann BC die Höhe dieser Figuren. Man kan also bey diesen Figuren die Wörter, Grundlinien und Höhen, nach Belieben verwechseln, und man kan also auch, wenn von geradewinklichten Dreyecken oder Vierecken die Rede ist, sagen, daß, wenn dieselbe gleiche Grundlinien haben, sie sich gegen einander verhalten werden, wie sich ihre Höhen gegen einander verhalten. Dieses ist eben das vorige mit andern Worten gesaget.

[*Fig.* 223.] §. 42. Denket man aber dieser Sache noch etwas weiter nach, so findet man bald, daß eben dieses von allen Dreyecken, wie auch von allen Parallelogrammen könne gesaget werden, daß nemlich sie sich wie ihre Höhen verhalten, wenn ihre Grundlinien gleich sind, ihre Winkel mögen so groß oder so klein seyn, als sie wollen. Man siehet dieses auf nachfolgende Art ein. Die Dreyecke ABC, abc haben einerley Grundlinien BC=bc, aber verschiedene Höhen. Man setze auf die Grundlinie EF=BC das geradewinklichte Dreyeck DEF, so dem Dreyecke ABC gleich ist, welches geschiehet, wenn man ihm eben die Höhe giebet, welche ABC hat. Und eben so setze man auf die Grundlinie ef=bc das geradewinklichte Dreyeck def=abc, welches wieder erhalten wird, wenn man auch die Höhe dieses Dreyecks de so groß machet, als die Höhe des Dreyecks abc ist. Da nun also die Dreyecke ABC, DEF, wie auch abc, def einander gleich sind, so siehet man leicht, daß die Verhältniß ABC:abc der Verhältniß DEF:d e f gleich sey, denn es sind so gar die Glieder beyder Verhältnisse von einerley Größe. Nun ist aber die letztere Verhältniß DEF:d e f der Verhältnisse DE:de gleich, wie eben gewiesen worden ist; weil nemlich die geradewinklichten Dreyecke DEF, d e f gleiche Grundlinien EF, ef haben, und sich also wie ihre Höhen DE:de verhalten. Da nun also ABC:abc=DEF:def, so muß auch die Verhältniß ABC:abc der Verhältniß DE:de gleich seyn, und man hat ABC:abc=DE:de. Nun ist auch DE die Höhe des Dreyecks ABC, und de die Höhe des Dreyeckes abc, also ist dasjenige richtig, so wir erweisen solten, daß nemlich alle Dreyecke von gleichen Grundlinien sich wie ihre Höhen verhalten.

[*Fig.* 224.] §. 43. Nichts ist leichter, als eben dieses von den Parallelogrammen zu zeigen. Man darf nur den eben gegebenen Beweiß wiederhohlen, doch so, daß man jederzeit vor ein Dreyeck ein Parallelogrammum nenne, und denselben im übrigen auf die 224 Figur anwenden, so kan nicht der geringste Zweifel daran übrig bleiben, daß auch jede Parallelogrammen von gleichen Grundlinien sich gegen einander wie ihre Höhen verhalten.

[*Fig.* 225.] §. 44. Und hieraus siehet man auch, daß ein jedes Dreyeck einem Parallelogrammum gleich sey, welches auf eben der Grundlinie stehet, auf welche das Dreyeck gesetzet ist, und dessen Höhe halb so groß ist, als die Höhe des Dreyecks. Es sey ABC ein Dreyeck, und DEF ein Parallelogrammum, welche auf gleichen Grundlinien BC = EF zwischen zwo Parallellinien stehen: so ist das Dreyeck die Helfte des Viereks DEF. Denn man setze auf EF ein anderes Parallelogrammum GEF, dessen Höhe die Helfte ist der Höhe des DEF, und folgends die Helfte der Höhe des Dreyeckes ABC, so ist dieses Parallelogrammum GEF ebenfals die Helfte von DEF, denn die Grundlinien der Parallelogrammen DEF, GEF sind einander gleich, folgends verhalten sich die Parallelogrammen wie ihre Höhen; oder man siehet vielmehr gleich aus der Figur, daß GEF $= \frac{1}{2}$ DEF. Da also sowohl ABC als GEF der Helfte von DEF gleich ist, so ist auch ABC dem Parallelogrammum GEF gleich, und so ist es mit allen Dreyecken.

§. 45. Diese Sätze nun vermittelst welcher wir die Dreyecke und Parallelogrammen von gleichen Höhen oder von gleichen Grundlinien mit einander verglichen haben, geben uns an die Hand, wie jede Dreyecke und Parallelogramme, ihre Grundlinien und Höhen mögen so groß seyn als sie wollen, mit einander verglichen werden können. Es geschiehet dieses ohne viele Weitläuftigkeit. Man darf nur die Verhältniß ihrer Grundlinien untersuchen, wie auch die Verhältniß ihrer Höhen, und diese Verhältnisse zusammen setzen, so ist die Verhältniß, welche durch diese Zusammensetzung kommet, die Verhältniß der Dreyecke oder der Parallelogrammen. Der Beweiß wird zugleich den Verstand dieser Sache etwas deutlicher machen.

[*Fig.* 226. 227.] §. 46. Wir sollen das Dreyeck ABC mit dem Dreyecke abc vergleichen, und sagen, wie sich jenes zu diesem verhalte, auf eine Art, welche sich anwenden lässet, alle Dreyecke mit einander zu vergleichen, und eine eben dergleichen Vergleichung sollen wir auch mit den Vierecken ABC, abc, deren entgegen gesetzte Seiten einander parallel sind,

anstel-

anstellen. Es haben die beyden Dreyecke ABC, abc verschiedene Grundlinien BC und bc, sonst wäre die Vergleichung derselben leicht, denn sie würden sich wie ihre Höhen verhalten; aber auch selbst diese Höhen sind verschieden. Eben so ist es auch mit den Vierecken. Um aber bey dem allen die Vergleichung der Dreyecke ABC, abc zu verrichten, so stelle man sich ein anderes Dreyeck DEF vor, dessen Grundlinie EF der Grundlinie bc des Dreyeckes abc gleich ist, und welches mit dem Dreyecke ABC einerley Höhe hat. Man kan gar leicht das Dreyeck ABC mit diesem Dreyecke DEF vergleichen, vermittelst des Satzes, dessen wir eben erwehnet haben: nemlich, es verhält sich das Dreyeck ABC zu dem Dreyecke DEF, wie die Grundlinie des ersteren BC, zu der Grundlinie des zweyten EF oder bc=EF. Wiederum lässet sich das Dreyeck DEF mit dem Dreyecke abc vergleichen. Denn weil die Grundlinien dieser Dreyecke gleich sind, so verhält sich das Dreyeck DEF zu dem Dreyecke abc, wie sich die Höhe des ersteren AG zu der Höhe des zweyten ag verhält. Da wir also ABC mit DEF, und DEF wieder mit abc vergleichen können, so kan die Vergleichung des Dreyeckes ABC mit dem Dreyecke abc selbst keine Schwierigkeit haben. Denn wenn wir die zwo Proportionen, die eben heraus gebracht worden sind:

ABC : DEF = BC : bc

DEF : abc = AG : ag nur einiger maßen betrachten, und dieselbe mit dem so VIII, 8. gesaget ist, zusammen halten, so sehen wir sogleich, daß die Verhältniß des Dreyeckes ABC zu dem Dreyecke abc aus der Verhältniß der Grundlinien dieser Dreyecke BC : bc, und aus der Verhältniß ihrer Höhen AG : ag zusammen gesetzet sey.

[*Fig.* 227.] §. 47. Bey den Parallelogrammen ist eben das richtig, was von den Dreyecken richtig ist. Wenn wir nunmehro die 227 Figur vor uns nehmen, um den Beweis, welchen wir von den Dreyecken gegeben, auf die in derselben gezeichnete Vierecke anzuwenden; zu welchem Ende diese eben so bezeichnet sind, wie jene: so hat man ebenfals, weil die Parallelogrammen ABC, DEF einerley Höhe AG, und die Parallelogrammen DEF, abc, einerley Grundlinie bc=EF, haben, und weil ag, die Höhe des Vierecks abc ist; so hat man, sage ich, hier ebenfals,

ABC : DEF = BC : bc, und

DEF : abc = AG : ag. Wenn man also diese Verhältnisse zusammen setzet, so werden auch hier die Verhältnisse, welche durch die Zusammensetzung entstehen, einander gleich. Nun aber kommet durch die Zusammensetzung der erstern zwo Verhältnisse die Verhältniß der Paralle-

logrammen ABC:abc, und in den zwo letztern werden die Verhältnisse der Grundlinien dieser Parallelogrammen BC:bc, und der Höhen AG:ag zusammen gesetzt, daß also auch die Verhältniß der Parallelogrammen ABC: abc der Verhältniß BC×AG:bc×ag gleich ist, welche durch die Zusammensetzung der Verhältnisse der Grundlinien und der Höhen herausgebracht wird.

[*Fig.* 226. 227.] §. 48. Ich befürchte nicht, daß diejenigen, welche recht eingesehen haben, was von der Zusammensetzung der Verhältnisse gelehret worden ist, bey dem Nutzen oder der Anwenduug dieses Satzes Schwierigkeit finden werden. Doch kan es nicht schaden, wenn wir die Sache zum Ueberfluß erläutern, zumalen da hier die Zusammensetzung der Verhältnisse zuerst gebraucht wird: und der gegenwärtige Satz dieselbe in ein noch größers Licht setzen kan. Es sey sowol die Verhältniß der Grundlinien als auch die Verhältniß der Höhen der Dreyecke oder Parallelogramme ABC, abc, welche man vergleichen soll, durch Zahlen ausgedrücket, und es sey: ABC:DEF=BC:bc=5:3, und

DEF:abc=AG:ag=2:1, so wird

ABC:abc=BC×AG:bc×ag=5.2:3.1=10:3, und wie sich 10 zu 3 verhält, so verhält sich auch das Dreyeck oder Parallelogrammum ABC zu dem Dreyecke oder Parallelogrammum abc. Denn die Glieder der Verhältniß, welche aus den zwoen BC:bc und AG:ag zusammen gesetzet ist, sind in diesem Falle, da die Verhältnisse durch Zahlen ausgedrücket sind, allezeit die Producte der ersten und der letzten Glieder dieser Verhältnisse, VIII, 24.

[*Fig.* 228.] §. 49. Und so ist es überall bey diesen Figuren. Nachdem man sowol die Grundlinien derselben durch Zahlen ausgedrücket hat, als auch ihre Höhen, so multipliciret man die Zahlen, welche die Grundlinien ausdrücken, durch die Zahlen, welche die Höhen anzeigen. Die Verhältniß der Producte ist eben die Verhältniß, welche die Dreyecke oder die Parallelogramme, welche man vergleichen sollen, gegen einander haben. Dieses auch dem Gesichte vorzustellen sind in der 228 Figur zwey Parallelogramme gezeichnet worden, deren Grundlinien sich so wie IX, 48. angenommen worden, gegen einander verhalten: da man denn leicht siehet, daß auch ABC sich gegen abc verhalte, wie 20:6, oder wie 10:3, welches eben die Verhältniß ist, die wir durch die Zusammensetzung der zwo Verhältnisse 5:3 und 2:1 herausgebracht haben. Ich habe nicht nöthig erachtet, auch dergestalt getheilte Dreyecke zu zeichnen, weil man alle Dreyecke gar leicht in Parallelogramme verwandeln kan, da denn klar ist, daß von

der

der Größe der Dreyecke dasjenige richtig seyn müsse, was von der Größe der Parallelogrammen erwiesen worden ist.

[*Fig.* 226. 227.] §. 50. Soll man aber zwo gerade Linien schaffen, der erstere sich zu der zwoten verhält, wie ABC zu abc, es mögen nun diese Buchstaben die Dreyecke der 226, oder die Vierecke der 227 Figur bedeuten; so giebet uns eben der Satz, und dasjenige, so wir von der Zusammensetzung der Verhältnisse bereits wissen, dazu die Anleitung. Nachdem die erste dieser Linien, die wir uns unter P vorstellen können, ob sie zwar nicht gezeichnet ist, nach Belieben angenommen worden ist, so mache man VI, 13. BC : bc = P : X: und nachdem man diese Linie X gefunden, mache man nochmals AG : ag = X : Q, so ist die Verhältniß der P zu Q aus den zwo Verhältnissen BC : bc und AG : ag zusammen gesetzt, und demnach der Verhältniß der Figur ABC zu der Figur abc gleich. Da man das erste Glied P der zusammen gesetzten Verhältniß, nach Belieben annehmen darf, so kan man P allezeit so groß annehmen als BC ist; geschiehet dieses, so wird in der Proportion BC : bc = P : X, die letzte X so groß als bc, und man hat also, um die Q zu erhalten, nur zu machen AG : ag = bc : Q. Demnach ist ABC : $abc = P : Q = BC : \frac{ag \times bc}{AG}$.

§. 51. Oder man nehme eine gerade Linie V, nach Belieben an, und suche zur V, zur BC und zur AG die dritte Proportionallinie P: und ferner suche man auch zu eben der V, zur bc und zur ag die dritte Proportionallinie Q, so verhält sich VIII, 55. wieder die erste dieser Linien $\frac{BC \times AG}{V}$ zu der zwoten $\frac{bc \times ag}{V}$ das ist P : Q, wie die Figur ABC zu der Figur abc. Man kan sich aber auch hier die Arbeit erleichtern, wenn man V so groß annimt als AG. Dadurch wird $P = \frac{BC \times AG}{V}$ so groß als BC, und die zweyte Linie Q wird $= \frac{bc \times ag}{AG}$, wie vorher. Nimmt man aber V = BC, so wird $P = \frac{BC \times AG}{V}$, so groß als AG. Und die zwote Linie $Q = \frac{bc \times ag}{V}$ wird in diesem Falle $\frac{bc \times ag}{BC}$. Man kan also auch sagen, es verhalte sich

auch ABC zu abc, wie AG zur $\frac{bc \times ag}{BC}$, welches mit dem vorigen auf eins hinaus komt.

[*Fig.* 227.] §. 52. Man siehet aber auch aus den Figuren und Beweisen, die wir bisher von der Gleichheit der Parallelogramme und Dreyecke gegeben haben, daß es sehr ohnnöthig sey, in den Beweisen sowol als in den Figuren, andere als geradewinklichte Vierecke zu nennen und vorzustellen: und daß an die Stelle der Grundlinie, und der Höhe der Parallelogramme, man nur die Seiten eines geradewinkiichten Vierecks nennen dürfe. Denn es ist nichts leichter als dasjenige, was von geradewinklichten Vierecken gezeiget wird, auf die übrigen Parallelogramme anzuwenden, welche mit dem geradewinklichten Vierecke auf einer Grundlinie, und zwischen eben den Parallelen stehen können, oder welche mit dem geradewinklichten Vierecke gleiche Grundlinien und Höhen haben. Und man muß würklich, wenn schiefwinklichte Parallelogramme, nach den Sätzen welche wir bishero erkläret haben, mit einander zu vergleichen sind, dieselbe in geradewinklichte verwandeln. Denn was thut man anders, indem man die Höhe AG ziehet, als daß man die eine Seite des geradelinichten Viereckes findet, welches dem schiefwinklichten ABC gleich ist, dessen andere Seite BC bereits gegeben ist. Hat man aber die zwo Seiten eines geradelinichten Viereckes, so hat man das Viereck selbst, weil diese Vierecke sich allezeit aus zwo gegebenen Seiten beschreiben lassen. Man siehet aber leicht, daß wir von solchen Seiten dieser Vierecke reden, welche einander nicht entgegen gesetzt sind, sondern einen Winkel einschließen; mit einem Worte, von der Länge eines solchen Vierecks und von seiner Breite. Aus eben dem Grunde werden wir auch, bey der Vergleichung der Dreyecke, künftig hin meistens bloß geradewinklichte Dreyecke nennen, weil die übrigen doch erst in geradewinklichte Dreyecke müssen verwandelt werden, ehe man sie mit andern Dreyecken, oder mit Parallelogrammen vergleichen will. Die Seiten eines solchen Dreyecks sind diejenigen, welche den geraden Winkel einschließen.

[*Fig.* 229.] §. 53. Will man nun ein geradewinklichtes Dreyeck abc mit einem geradewinklichten Vierecke ABC vergleichen; so hat man nur zu bedenken, daß das Dreyeck abc dem Vierecke dbc gleich sey, dessen Seite bd halb so groß ist, als die Seite ab des Dreyeckes, IX, 44. Nun ist die Verhältniß des Viereckes ABC zu dem Vierecke dbc aus den Verhältnissen AB: db und BC: bc zusammen gesetzt; also entstehet auch die Verhältniß des Vier-

eckes

eckes ABC zu dem Dreyecke abc, durch die Zusammensetzung eben dieser Verhältnisse. Oder wenn man in der erstern Verhältniß AB: db an statt db setzet $\frac{1}{2}$ab, weil db $= \frac{1}{2}$ab, so wird die Verhältniß ABC: abc auch aus den zwo Verhältnissen AB: $\frac{1}{2}$ab und BC: bc zusammen gesetzt: das ist, aus der Verhältniß einer Seite des Viereckes zu der Helfte einer Seite des Dreyeckes AB: $\frac{1}{2}$ab, und aus der Verhältniß der andern Seite des Viereckes BC zur andern Seite des Dreyeckes bc.

§. 54. Nun nenne man an die Stelle der einen Seite des Viereckes und des Dreyeckes die Grundlinie dieser Figur, und der andern gebe man den Namen der Höhe, so wird der Satz allgemein, und lässet sich auch von schiefwinklichten Parallelogrammen und Dreyecken verstehen, indem er anzeiget, daß die Verhältniß eines jeden Parallelogrammum zu einem Dreyecke, aus der Verhältniß der Höhe der ersten Figur zur halben Höhe der zweyten, und aus der Verhältniß der Grundlinie der ersten Figur zur Grundlinie der zweyten: oder aber aus der Verhältniß der Höhe der ersten Figur zur Höhe der zweyten, und aus der Verhältniß der Grundlinie der ersten zu der Helfte der Grundlinie der zweyten, zusammen gesetzt sey.

§. 55. Dieses ist die allgemeine Art, Parallelogramme mit Parallelogrammen, Dreyecke mit andern Dreyecken, und Parallelogramme mit Dreyecken, zu vergleichen. Nimmet man aber in diesen Figuren die Seiten bald von dieser bald von jener Verhältniß an, so bekommet man besondere Sätze, welche eben so nützlich sind als die allgemeinen, und die mit diesen einerley Zweck haben. Wir können uns nun zu dieser besondern Betrachtung wenden.

[*Fig.* 230. 231.] §. 56. Wir setzen zuerst, daß bey zwey Parallelogrammen die Grundlinien sich wie die Höhen verhalten, wenn man diese verkehrt setzet, oder daß sich in den Parallelogrammen ABC, abc, die Grundlinie BC zu der Grundlinie bc verhalte, wie die Höhe ab sich zu der Höhe AB verhält; und daß also diese Proportion BC: bc = ab: AB richtig sey. Ist nun dieses, so sind die Glieder der Verhältniß, welche kommet, wenn man eine dieser gleichen Verhältnisse BC: bc, und ab: AB verkehrt stellet, und sodann diese Verhältniß AB: ab mit der ersteren BC: bc zusammen setzet, einander gleich, BC × AB nemlich = bc × ab, VIII, 47. Da nun also die zusammengesetzte Verhältniß BC × AB: bc × ab der Verhältniß der Vierecke ABC: abc gleich ist, IX, 45. so müssen auch diese Vierecke selbst gleich seyn: und man siehet leicht, daß eben dieses auch von den Dreyecken ABC und abc könne gesaget werden. Demnach sind sowol zwey Parallelogramme als auch zwey Dreyecke, deren Grundlinien sich wie die

Höhen verkehrt gesetzt verhalten, einander gleich; oder wenn bey zwey Parallelogrammen oder Dreyecken ABC, abc diese Proportion BC:bc = ab:AB richtig ist, so ist auch richtig ABC = abc.

[*Fig.* 232.] §. 57. Man kan ohne große Schwierigkeit einen dergleichen Satz auch von einem Dreyecke und rechtwinklichten Vierecke heraus bringen. Das rechtwinklichte Viereck ABC verhält sich zu dem Dreyecke abc, wie die Glieder der Verhältniß, welche aus diesen zwo Verhältnissen AB:ab und BC:$\frac{1}{2}$bc zusammen gesetzt wird, oder wie BC×AB:$\frac{1}{2}$bc×ab, IX, 53. Verhält sich nun aber BC zur $\frac{1}{2}$bc, wie ab zur AB, und ist die Proportion BC:$\frac{1}{2}$bc = ab:AB richtig, so ist BC×AB = $\frac{1}{2}$bc×ab, VIII, 47. Demnach ist in diesem Falle allezeit das Viereck ABC dem Dreyecke abc gleich, und man kan auf die Gleichheit eines Dreyeckes und eines Parallelogrammum allezeit schließen, wenn entweder die Grundlinie eines Dreyeckes halb genommen, sich zu der Grundlinie des Viereckes verhält, wie die ganze Höhe des Viereckes zur ganzen Höhe des Dreyeckes. Oder wenn die halbe Höhe des Dreyeckes sich zur Höhe des Viereckes verhält, wie die Grundlinie des Viereckes zur Grundlinie des Dreyeckes.

§. 58. Es lassen sich auch alle diese Sätze umkehren, und man kan sagen, erstlich, daß, wenn die Parallelogrammen ABC, abc gleich sind, die Grundlinien derselben BC, bc sich umgekehrt, wie die Höhen AB, ab verhalten, und die Proportion BC:bc = ab:AB richtig seyn müsse. Denn es ist allezeit ABC:abc = AB×BC:ab×bc, es mögen die Vierecke gleich oder ungleich seyn, IX, 45. Sind aber die Vierecke ABC, abc gleich, so können die zwey letzteren Glieder der Proportion AB×BC:ab×bc nicht ungleich seyn. Es ist also AB×BC = ab×bc, das ist, die Glieder der Verhältniß, welche aus den zwoen AB:ab und BC:bc zusammen gesetzt ist, sind einander gleich. Wir haben aber gesehen, daß, wenn dieses ist, die Verhältnisse, welche man zusammen gesetzt hat, allezeit gleich seyn, wenn man nur die Glieder der einen verwechselt, VIII, 48. dadurch aber wird AB:ab = bc:BC, oder BC:bc = ab:AB. Und auf eben diese Art schließet man eben die Proportion, wenn zweytens gesetzet wird, daß das Dreyeck ABC dem Dreyecke abc gleich sey. Ist aber drittens das Viereck ABC dem Dreyecke abc gleich, so ist AB×BC = $\frac{1}{2}$ab×bc, woraus denn ebenfals diejenige Proportion, aus welcher wir die Gleichheit vorhergeschlossen haben, AB:$\frac{1}{2}$ab = bc:BC, nach eben den Gründen folget. Es können also zwey Parallelogramme, oder zwey Dreyecke, oder ein Parallelogrammum und ein Dreyeck, ohnmöglich gleich seyn, wenn nicht diejenige Proportion statt hat, aus welcher wir ihre Gleichheit geschlossen haben.

§. 59.

§. 59. Der Satz, bey welchem wir uns aufhalten, ist auch durch den sich selbst gelassenen Verstand einzusehen. Daß die Verhältnisse zweyer Parallelogrammen aus der Verhältniß ihrer Grundlinien und aus der Verhältniß ihrer Höhen zusammen gesetzet sey, heißet in der gewöhnlichen Sprache nichts anders, als daß man bey der Vergleichung solcher Vierecke sowohl auf die Länge derselben, als auch auf ihre Breite zu sehen habe, und daß die Vierecke größer werden, nachdem entweder ihre Länge, oder nachdem ihre Breite zunimmet. Wem ist dieses unbekant? Nur setzet man gemeiniglich dergleichen Begriffe nicht recht aus einander. Ist aber ein solches Viereck ABC zwar breiter als ein anderes a b c, und dieses ist hingegen nach Proportion länger als jenes, so siehet man leicht, daß dem einen an der Länge dasjenige zuwächset, was ihm an der Breite abgehet, und daß dadurch die Vierecke wieder gleich werden. Was von den Dreyecken gesaget worden ist, könte man hieraus herleiten, wenn es nöthig wäre. Wir wenden uns aber vielmehr zu einigen leichten Aufgaben, welche hierbey vorkommen.

[*Fig.* 230. 231. 232.] §. 60. Gesetzt, es sey uns das rechtwinklichte Viereck ABC gegeben, und die Grundlinie eines andern b c, welches dem gegebenen ABC gleich seyn soll: so hat man zu bedenken, daß, wenn dieses letztere Viereck zu verfertigen ist, nunmehro weiter nichts als die Höhe desselben erfordert werde, und daß demnach bloß diese zu suchen sey. Diese Höhe aber ist leicht zu finden. Man stelle sich vor, daß man bereits auf die gegebene Grundlinie b c daß Parallelogrammum a b c gesetzt habe, welches dem gegebenen ABC gleich ist, und daß die Höhe dieses Parallelogrammum a b sey, so ist b c : BC = AB : a b, IX, 58. Demnach ist ab die vierte Proportionalgröße zu bc, BC und AB, und diese drey Größen sind bekant. Also ist auch ab in unserer Gewalt; denn man kan aus den drey vordern Gliedern einer Proportion das vierte allezeit finden. Vollkommen auf eben die Art verfähret man, wenn das Dreyeck ABC gegeben ist, und bc, und man soll auf bc das Dreyeck a b c setzen, so dem Dreyecke ABC gleich ist. Man siehet auch leicht, wie zu verfahren sey, wenn man auf b c ein Dreyeck setzen soll, so dem Viereckе ABC gleich ist, oder auf BC ein Viereck, welches so groß ist als das Dreyeck a b c.

Vergleichung eines Quadrats mit einem anderen geradewinklichten Vierecke.

[*Fig.* 233. 234.] §. 61. Ist das Viereck ABC, welches einem an-

dern Vierecke, oder einem Dreyecke abc gleich ist, ein Quadrat, so bleibet das übrige alles, wie gewiesen worden ist, und es ist auch hier, bc:BC = AB:ab, wenn das Quadrat dem Vierecke abc gleich ist, und bc:BC = AB:$\frac{1}{2}$ab, wenn das Quadrat so groß ist als das Dreyeck abc. Es komt aber hier noch etwas neues hinzu, so vorhero nicht da war. Die Seiten des Quadrats ABC sind einander gleich, AB = BC, und man kan AB vor BC setzen. Demnach ist die Seite des Quadrats ABC, welches dem geradewinklichten Vierecke abc gleich ist, die mittlere Proportionallinie zwischen den Seiten ab, bc dieses Viereckes, und die Seite des Quadrats, welches dem Dreyecke abc gleich ist, ist die mittlere Proportionallinie zwischen einer Seite derselben bc, und der Helfte der andern ab.

§. 62. Und wenn AB die mittlere Proportionallinie ist, zwischen den Seiten des Viereckes abc, so ist das Quadrat ABC dem Vierecke abc gleich. Denn wenn dieses ist, und man hat bc:BC = BC:ab, so hat man auch bc:BC = AB:ab, das ist, die Grundlinien der beyden geradewinklichten Vierecke ABC, abc verhalten sich wie ihre Höhen verkehrt gesetzet, welches das untrügliche Kennzeichen ist, aus welchem wir ihre Gleichheit schließen können. Ist in der 234 Figur bc:BC = BC:$\frac{1}{2}$ab, so kan man auf eben die Art schließen, daß das Dreyeck abc dem Quadrate ABC gleich sey.

[*Fig.* 235.] §. 63. Da also VII, 73. 80. gelehret worden ist, wie zwischen zwo gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden sey, so ist nunmehro bey der Aufgabe, welche verlangt, daß wir ein Quadrat machen sollen, so einem gegebenen rechtwinklichten Vierecke gleich sey, keine Schwierigkeit übrig. Die Auflösung derselben erfordert nichts, als daß man die mittlere Proportionallinie zwischen den zwo Seiten des Viereckes finde; welche die Seite des verlangeten Quadrats seyn wird. Es sey das rechtwinklichte Viereck ABC gegeben. Man verlängere eine Seite desselben AB in D, so lange bis BD der andern Seite BC gleich wird. Man beschreibe sodann auf die ganze AD einen halben Cirkelkreis AED, und verlängere CB bis an diesen Umkreis AED in E, so ist BE die gesuchte Seite des Quadrats, welches dem Vierecke ABC gleich ist. Denn weil der Winkel des Viereckes ABC gerade ist, so ist BE auf den Durchmesser des halben Cirkels AD perpendicular, und folgends AB:BE = BE:BD, VII, 73. Da nun BD der BC gleich genommen worden, so ist auch AB:BE = BE:BC. Und wenn demnach BE vor die Seite eines Quadrates angenommen wird, so ist dieses Quadrat dem Vierecke ABC gleich, weil-

weil die Seite desselben die mittlere Proportionallinie ist zwischen den Seiten des länglichten Viereckes.

[*Fig.* 236.] §. 64. Wil man sich der andern Anweisung bedienen, welche wir gesehen haben, und vermittelst derselben zwischen denen zwo Seiten des länglichten Vierecks eine mittlere Proportionallinie finden, welche die Seite eines dem geradewinklichten Vierecke ABC gleichen Quadrats seyn wird: so verfähret man folgendergestalt. Nachdem die Seite AB des Viereckes, nach Erforderung der Umstände verlängert worden ist, machet man AD so groß, als die andere Seite des Viereckes BC. Man beschreibet auf diese AD einen halben Cirkelkreis AED, und verlängert CB bis sie denselben in E erreichet; so kan man AE ziehen, und dieses ist die gesuchete Seite, deren Quadrat so groß ist als das geradewinklichte Viereck ABC. Denn allerdings ist AE die mittlere Proportionallinie zwischen AB und AD; VII, 80. also ist sie auch die mittlere Proportionallinie zwischen eben der AB und der BC, welche der AD gleich ist.

[*Fig.* 237.] §. 65. Diese Zusammensetzung ist weitläuftiger als die vorige: sie ersetzet aber diesen kleinen Umschweif durch die herlichen Sätze, welche deren Betrachtung an die Hand giebet. Das Quadrat der geraden Linie AE ist dem geradewinklichten Vierecke ABC gleich. Ziehet man auch ED, so ist es außer Zweifel, daß eben dieses auch auf dieser Seite richtig sey, und daß das Quadrat der Seite ED ebenfals dem geradewinklichten Vierecke aus der DB, und der DA=BC, gleich seyn werde. Dieses Viereck erhält man, wenn man DG der BC parallel ziehet, und FC verlängert, bis sie die DG in G schneidet. Dadurch aber wird DG=BC =DA, da nun also AE^q=AC, und ED^q=CD, so ist AE^q+ED^q=AC +CD, das ist, die beyden Quadrate, deren Seiten AE, ED sind, sind zusammen der Summe der Vierecke AC und CD gleich. Diese beyden Vierecke aber machen mit einander das Viereck AG, welches, wie leicht einzusehen, ebenfals ein Quadrat ist, die beyden Quadrate der Seiten AE und ED also, sind zusammen dem einzigen Quadrate AG der Seite AD gleich.

§. 66. Das Dreyeck AED ist geradewinklicht, und zwar ist der Winkel AED der gerade, weil er in dem halben Cirkel AED beschrieben ist, V, 68. Man kan aber bey einem jeden geradewinklichten Dreyecke dasjenige zeigen, wie wir hier erwiesen haben. Man kan allezeit aus der Spitze des geraden Winkels AED auf die größeste Seite eine Perpendicularlinie EB fallen lassen, und dieselbe verlängern bis BC so groß wird als AD. Ziehet man sodann durch C die FG der AD parallel, und AF, DG

auf die AD perpendicular, so ist vermöge desjenigen, so eben gezeiget worden ist, das Quadrat der AE dem Vierecke AC, und das Quadrat der ED dem Vierecke BG gleich, und demnach sind in einem jeden geradewinklichten Dreyecke AED die beyden Quadrate der Seiten AE, ED, welche den rechten Winkel einschließen, zusammen genommen dem einzigen Quadrate der größesten Seite des Dreyeckes AD, welche allezeit dem rechten Winkel entgegen stehet, gleich. Denn daß die beyden Vierecke AC und CD ein Quadrat AG machen, ist bereits als etwas, so leicht einzusehen ist, angemerket worden.

[*Fig.* 238. 239.] §. 67. Wir werden künftig diesen Satz noch weiter betrachten, und ihn auf verschiedene Art anwenden. Gegenwärtig fahren wir in der Vergleichung der Parallelogrammen und Dreyecke fort, und stellen uns nunmehro zwey dergleichen Vierecke oder zwey Dreyecke vor, deren Grundlinien sich gegen einander, wie ihre Höhen verhalten. In der 238 Figur sollen ABC, abc zwey dergleichen Vierecke seyn, und in der 239 Figur werden mit eben den Buchstaben die zwey Dreyecke bezeichnet. Beyderseits wird gesetzet, daß die Verhältniß der Höhen AB:ab der Verhältniß der Grundlinien BC:bc gleich sey, oder daß AB:ab = BC:bc. Es wird durch diesen neuen Umstand dasjenige nicht aufgehoben, so überall richtig ist, daß nemlich die Verhältniß ABC:abc aus den beyden Verhältnissen AB:ab und BC:bc zusammen gesetzet werde: aber hier sind diese Verhältnisse, welche zusammen gesetzt werden sollen, einander gleich, und es wird demnach die Verhältniß ABC:abc aus zwo gleichen Verhältnissen zusammen gesetzt. Man kan also in dieser Zusammensetzung eine dergleichen Verhältnisse an die Stelle der andern setzen, und sagen, es sey die Verhältniß ABC: abc aus den Verhältnissen AB:ab und AB:ab zusammen gesetzt, oder auch, es bestehe die Verhältniß ABC:abc aus den zwo Verhältnissen BC:bc und BC: bc; das ist, die Verhältniß der Figuren, welche wir vor uns haben, sey aus der Verhältniß ihrer Höhen AB:ab, oder aus der Verhältniß ihrer Grundlinien BC:bc, zwey mal genommen, zusammen gesetzt, VIII,9. oder sie sey zwey mal so hoch als die Verhältniß der Grundlinien; wie auch, zwey mal so hoch als die Verhältniß der Höhen.

§. 68. Nur muß man sich in der Anwendung dieses Satzes in Acht nehmen, daß man sich darinnen nicht verstoße, daß man unrechte Linien der Figuren vor die Grundlinien oder vor die Höhen derselben annehme. Es ist zwar wahr, daß es sonst frey stehet, diese oder jene Seite eines geradewinklichten Viereckes oder Dreyeckes vor die Grundlinie, und diejenige, welche mit derselben den geraden Winkel einschließet, vor die Höhe zu halten.

ten. Aber hier ist der allgemeine Satz auf solche Grundlinien eingeschränket, welche sich wie die Höhen verhalten, und man fehlet also, wenn man solche Grundlinien nimmet, welche sich nicht verhalten wie die Höhen, die zu den angenommenen Grundlinien gehören. Die Verhältniß ABC:abc ist zum Exempel nicht zwey mal so hoch, als die Verhältniß AB:bc, weil die Verhältniß AB:bc der Verhältniß BC:ba nicht gleich ist. Denn weil die Verhältniß AB:ab der Verhältniß BC:bc gleich gesetzt wird, so kan, wenn AB größer oder kleiner ist, als BC, ohnmöglich die Verhältniß AB:bc der Verhältniß BC:ab gleich seyn, wie man leicht siehet. Man wird aber diesen Fehler allezeit vermeiden, wenn man entweder beyderseits die größern Seiten der Figuren ABC:abc annimmet, oder die kleinern. Es ist AB größer als BC, und ab größer als bc. Also ist die Verhältniß, welche man verdoppeln muß, damit man die Verhältniß der Figuren ABC:abc erhalte, die Verhältniß AB:ab, oder die Verhältniß BC:bc.

§. 69. Hat man aber zwey Quadrate mit einander zu vergleichen, so wird man von dieser Betrachtung niemals aufgehalten. Die Grundlinie ist hier nothwendig so groß als die Höhe, und man kan weder zur Grundlinie noch zur Höhe etwas anders als die Seite des Quadrats annehmen. Demnach ist die Verhältniß zweyer Quadrate allezeit zweymal so hoch als die Verhältniß ihrer Seiten. Nach dieser kleinen Anmerkung schließen wir leicht, daß dergleichen Figuren als wir eben betrachtet haben, IX, 67. sich gegen einander, wie die Quadrate derjenigen Seiten der Figuren, die einander in der Proportion entgegen stehen, verhalten. Wir haben gesetzt, daß in der 238 und 239 Figur die Verhältniß AB:ab der Verhältniß BC:bc gleich sey, und in der Proportion AB:ab = BC:bc stehet AB der ab und BC der bc entgegen. Man stelle sich zwey Quadrate vor, deren Seiten sind AB und ab, so ist die Verhältniß dieser Quadrate zwey mal so hoch als die Verhältniß AB:ab; und eben diese Verhältniß, welche zwey mal so hoch ist, als AB:ab, ist auch die Verhältniß der Figuren ABC:abc. Demnach ist die Verhältniß der gedachten Quadrate die auf AB und ab gesetzet werden können, der Verhältniß der Figuren ABC:abc gleich. Eben dieses ist auch von den Quadraten richtig, welche man auf BC und bc setzen kan. Ihre Verhältniß ist ebenfals der Verhältniß der Figuren gleich, welche wir eben angezeiget haben.

[*Fig.* 240.] §. 70. Zu einer noch deutlichern Einsicht können die Figuren der 240 Zeichnung dienen, deren Grundlinien sowol als ihre Höhen sich wie 5:3 gegen einander verhalten. Man siehet leicht, daß die Verhältniß dieser Figuren ABC und abc aus der Verhältniß 5:3 zwey mal ge-

nommen, zusammen gesetzt werde. Denn die dergestalt zusammen gesetzte Verhältniß ist 25:9. und die Figur ABC bestehet aus 25 Theilen von der Größe derjenigen, deren die Figur abc neune enthält. Man kan, wenn man will, sich das übrige alles durch dergleichen Zeichnungen selbst erläutern, und damit kommet man weiter, als wenn man bloß die bereits gezeichneten Figuren ansiehet.

[*Fig.* 241.] §. 71. Es ist also aus demjenigen, so wir bereits VIII, 13. bey der Abhandlung der zusammen gesetzten Verhältnisse gewiesen haben, nicht schwer, zwo gerade Linien zu schaffen, welche sich gegen einander verhalten wie zwey Quadrate. Es seyn die gegebenen Quadrate ABC, abc. Man mache AB : ab = ab : D, nach der Anweisung die dritte Proportionallinie zu zweyen gegebenen zu finden, welche VII, 13. da gewesen ist; so ist die Verhältniß AB : D aus der Verhältniß AB : ab zwey mal genommen zusammen gesetzt, VIII, 52. und also zwey mal so hoch als diese Verhältniß AB : ab. Sie ist demnach der Verhältniß des Quadrats ABC zu dem Quadrate abc gleich, welche ebenfals zwey mal so hoch ist, als die Verhältniß AB : ab.

§. 72. Wiederum findet man aus der Verhältniß zweyer Quadrate, welche durch gerade Linien ausgedrückt ist, AB : D, die Verhältniß der Seiten der Quadrate, wenn man nur zwischen den zwo geraden Linien, welche die Verhältniß der Quadrate ausdrücken AB und D die mittlere Proportionallinie suchet. Ist diese ab, so ist AB : ab die Verhältniß der Seiten der Quadrate, deren ersters sich zu dem zweyten verhält, wie AB : D, und wenn man zu AB und ab die Quadrate ABC, abc würklich beschreibet, so ist ABC : abc = AB : D.

§. 73. Wir schließen hieraus, daß, wenn vier Linien A, B, C, D proportional sind, so, daß man hat A : B = C : D, man bezeichnet aber das Quadrat der ersten dieser Linien durch A^q, das Quadrat der zwoten durch B^q und so ferner; auch diese Proportion richtig seyn werde $A^q : B^q = C^q : D^q$, mit einem Worte, daß die Quadrate, deren Seiten proportional sind, auch selbst proportional seyn werden. Denn da die Verhältniß $A^q : B^q$ zwey mal so hoch ist als die Verhältniß A : B, und die Verhältniß $C^q : D^q$ zweymal so hoch als die Verhältniß C : D, welche der erstern A : B gleich ist, so können die Verhältnisse derer Quadrate nicht verschieden seyn, weil durch die Zusammensetzung gleicher Verhältnisse immer gleiche Verhältnisse kommen.

§. 74. Und umgekehrt, wenn vier Quadrate proportional sind, $A^q : B^q = C^q : D^q$, so sind auch ihre Seiten proportional. Denn wenn man zu

A, B, C

A, B, C die vierte Proportionallinie suchte, welche wir E nennen wollen, und setzte A:B=C:E, so folget aus A:B=C:E nach dem Satze welchen wir eben angemerket haben, die Proportion der Quadrate $A^q:B^q=C^q:E^q$. Da also auch angenommen wird, daß die Proportion $A^q:B^q=C^q:D^q$ ihre Richtigkeit habe, so folget aus diesen beyden Proportionen, daß auch D^q dem E^q gleich sey, und also D=E. Man kan demnach in der Proportion die ohnfehlbar richtig ist A:B=C:E an die Stelle der E die D setzen, wodurch sie in die Proportion A:B=C:D verwandelt wird. Diese kan also immer aus der angenommenen Proportion $A^q:B^q=C^q:D^q$ hergeleitet werden.

[*Fig.* 238. 239.] §. 75. Auch lässet sich dieses gar leicht auf solche Figuren anwenden, welche sich gegen einander verhalten wie die Quadrate ihrer Seiten, dergleichen in der 238, 239 Zeichnung vorgestellet werden: und man siehet sogleich, daß man auf eben die Art zwo gerade Linien darstellen könne, welche sich verhalten wie ABC:abc, wie man zwo gerade Linien darstellet, die sich gegen einander wie zwey gegebene Quadrate verhalten. Ja man kan, was wir bey den Figuren ABC, abc gesehen haben, auch von vielen andern Figuren sagen, und überhaupt von allen, welche einander ähnlich sind, welches wir sogleich aus den Betrachtungen schließen werden, die uns noch bevorstehen.

Vergleichung solcher Figuren, die einander ähnlich sind.

[*Fig.* 242. 243.] §. 76. Die Parallelogramme ABC, abc, wie auch die Dreyecke ABC, abc, haben bey B und b gleiche Winkel. Uebrigens können sich die Seiten wie man wil gegen einander verhalten, denn es wird noch nicht gesetzt, daß diese Figuren ABC, abc einander ähnlich sind. Dazu wird außer der Gleichheit der Winkel B und b auch erfordert, daß die Seiten, welche diese Winkel einschließen, in den beyden Figuren ABC:abc einerley Verhältniß gegen einander haben, VII, 28. welches noch nicht angenommen wird. Dennoch kan bey diesem Umstand die Verhältniß ABC:abc aus der Verhältniß der Seiten, welche die gleiche Winkel B und b einschließen, zusammen gesetzt werden, nemlich aus diesen beyden AB:ab und BC:bc. Und dieses wird aus dem, so bereits gewiesen worden ist, folgendergestalt hergeleitet.

§. 77. Man stelle sich die Höhen der Figuren AD, ad vor, welche

Lini-

Linien auf BC, bc, perpendicular fallen, und bey D, d gerade Winkel machen. Dadurch werden die Dreyecke ABD, abd einander ähnlich. Denn aus der Gleichheit zweyer Winkel in zweyen Dreyecken folget allezeit, daß dieselben Dreyecke ähnlich sind, VII, 23. Nun ist in den erwehnten Dreyecken ABD, abd der Winkel B dem Winkel b gleich angenommen worden, außer dem aber ist D = d, weil diese Winkel gerade sind. Also sind auch die Seiten dieser Dreyecke, die zwischen den gleichen Winkeln liegen, proportional, und folgends hat man AD : ad = AB : ab, das ist, die Verhältniß der Höhen AD : ad ist der Verhältniß der Seiten AB : ab gleich, und eine dieser Verhältnisse lässet sich allezeit an die Stelle der anderen setzen. Nun ist kein Zweifel, daß auch bey den gegenwärtigen Bedingungen die Verhältniß der Figuren ABC : abc aus der Verhältniß der Grundlinien derselben BC : bc, und aus der Verhältniß ihrer Höhen AD : ad zusammen gesetzet sey, IX, 46. Da man aber an die Stelle der letzteren Verhältniß, die ihr gleiche Verhältniß AB : ab bringen kan, VIII, 16. so wird auch die Verhältniß ABC : abc aus den Verhältnissen BC : bc und AB : ab zusammen gesetzet.

[*Fig.* 244.] §. 78. Es sind die gegenwärtige Bedingungen bey allen ähnlichen Dreyecken anzutreffen: Denn es wird nicht nöthig seyn, daß wir künftighin von Vierecken insbesondere reden, weil wir uns vermittelst der Dreyecke zu ganz allgemeinen Sätzen erheben werden, welche von allen ähnlichen Figuren gelten. Sind die Dreyeck ABC, abc in der 244 Figur einander ähnlich, wie wir dieses annehmen, so ist der Winkel B dem Winkel b nothwendig gleich, weil ein jeder Winkel des Dreyeckes ABC einem Winkel des Dreyeckes abc gleich ist, und man diese gleiche Winkel, so wie wir fast immer thun, mit einerley Buchstaben bezeichnen kan. Also ist die Verhältniß ABC : abc aus der Verhältniß AB : ab, und aus der Verhältniß BC : bc zusammen gesetzet. Es sind aber auch diese Verhältnisse AB : ab und BC : bc einander gleich, sonst wären die Dreyecke nicht ähnlich. Man kan demnach in der Zusammensetzung dieser Verhältnisse eine vor die andere setzen, und sagen, die Verhältniß des Dreyeckes ABC zu dem Dreyeck abc sey aus den Verhältnissen AB : ab, und AB : ab, oder aus den Verhältnissen BC : bc und BC : bc zusammen gesetzt; das ist, die Verhältniß ABC : abc entstehe aus der Verhältniß der Seiten der Dreyecke, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, AB : ab, zweymal genommen, und sey folgends zweymal so hoch als die Verhältniß dieser Seiten. Denn man siehet leicht, daß die Seiten AB, ab von den übrigen, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, keinen Vorzug haben.

§. 79.

§. 79. Also verhält sich auch das Dreyeck ABC zu dem Dreyecke abc, wie das Quadrat von AB zu dem Quadrate von ab. Denn die Verhältniß dieser Quadrate ist ebenfals, zweymal so hoch als die Verhältniß AB: ab, IX, 69.

[*Fig.* 245.] §. 80. Nun lassen sich alle geradelinichte Figuren, die einander ähnlich sind, in ähnliche Dreyecke zertheilen, wenn man zwischen den Spitzen ihrer Winkel auf einerley Art gerade Linien ziehet, VII, 41. Hieraus kan man schließen, daß jede zwo ähnliche Figuren sich wie die Quadrate solcher geraden Linien verhalten müssen, welche in den beyden Figuren zwischen den Spitzen gleicher Winkel auf einerley Art liegen. Es seyn in den geradelinichten Figuren ABCDE, abcde, diejenigen Winkel einander gleich, welche mit einerley Buchstaben A und a, B und b, und so fort, bezeichnet sind. Man ziehe BE und be, wie auch BD und bd, so sind die Dreyecke ABE, abe, wie auch BED, bed und BCD, bcd einander ähnlich. Es ist demnach die Verhältniß AB: ab gleich der Verhältniß BE: be, und diese Verhältniß ist wieder gleich der Verhältniß BD: bd, welche endlich der Verhältniß BC: be gleich ist. Demnach sind auch die Verhältnisse der Quadrate dieser Linien einander alle gleich, IX, 73. nemlich

$BA^q : ba^q = BE^q : be^q = BD^q : bd^q = BC^q : bc^q$.

Nun aber ist IX, 79. $ABE : abe = BE^q : be^q$,

und $BED : bed = BD^q : bd^q$,

wie auch $BDC : bdc = BC^q : bc^q$.

Also sind die Verhältnisse der Dreyecke alle gleichen Verhältnissen gleich, weil die Verhältnisse der Quadrate, mit welchen sie verglichen werden können alle gleich sind. Demnach ist auch VI, 112. die Verhältniß der Summe ABE + BED + BDC zu der Summe abe + bed + bdc, das ist, die Verhältniß der Figur ABCDE zu der Figur abcde eben dieser Verhältniß $BE^q : be^q$, oder $BC^q : bc^q$ gleich, und dieses ist dasjenige, welches wir erweisen solten. Die Verhältniß $BE^q : be^q$, ist zweymal so hoch als die Verhältniß BE: be, IX, 69. Demnach ist auch die Verhältniß ABCDE: abcde zweymal so hoch, als eben die Verhältniß BE: be.

[*Fig.* 246.] §. 81. Reguläre Figuren verhalten sich auch gegen einander wie die Quadrate der Halbmesser der Cirkel, in welche oder um welche sie beschrieben sind, wenn sie einander ähnlich sind, das ist, wenn sie gleich viele Seiten haben. Denn das reguläre Fünfeck ABC verhält sich gewiß zu dem regulären Fünfecke abc, wie das Quadrat aus AB sich zu dem Quadrate aus ab verhält, und man hat $ABC : abc = AB^q : ab^q$. Weil aber auch die Dreyecke ABD, abd, welche man machet, indem man

von den Mittelpuncten der Fünfecke D, d die geraden Linien DA, DB, da, db an die Ecken A, B, a, b ziehet, einander ähnlich sind; so ist $AB^q : ab^q = DA^q : da^q$, IX, 73. Und weil, wenn man aus D, d die Linien DE, de auf die Seiten AB, ab perpendicular fallen lässet, auch die Dreyecke DAE, dae ähnlich werden, und man also sagen kan $DA^q : da^q = DE^q : de^q$, so folget, daß auch $ABC : abc = DA^q : da^q = DE^q : de^q$.

[Fig. 247.] §. 82. Der Satz ist auch von krumlinichten Figuren richtig, welche einander ähnlich sind. Doch wir haben nicht nöthig dieses von anderen Figuren dieser Art als bloß von Cirkeln und von Ausschnitten und Abschnitten derselben zu erweisen. Wir setzen, daß die gerade Linie BC dem halben Umkreis des um den Mittelpunct A beschriebenen Cirkels gleich sey, daß sie denselben in B berühre, daß man an den Berührungspunct den Radius AB gezogen, und aus diesen Linien das geradewinklichte Viereck AC zusammen gesetzet habe, welches dem Cirkel gleich seyn wird, IX, 36. Eben dieses, setzen wir, sey auch bey dem anderen Cirkel, der um a beschrieben ist, gemacht worden, und dadurch das Viereck abc entstanden, so diesem Cirkel gleich ist. Weil nun alle Halbmesser gegen ihre Umkreise und folgends auch gegen die Helften ihrer Umkreise, einerley Verhältniß haben, VII, 56. so ist auch $AB : BC = ab : bc$, und demnach sind die rechtwinklichte Vierecke ABC, und abc ähnlich, weil ihre Seiten in gleicher Verhältnisse gegen einander stehen. Folgends ist $ABC : abc = AB^q : ab^q$. Die Vierecke nemlich verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate der Halbmesser $AB : ab$, IX, 80. Da nun diese Vierecke ABC, abc den Cirkeln, an denen sie stehen, gleich sind, so verhält sich auch der Cirkel um A, zu dem Cirkel um a, wie das Quadrat von AB, zu dem Quadrate von ab. Weil aber auch die Halbmesser sich verhalten wie die ganzen Durchmesser, und folgends die Quadrate der Halbmesser wie die Quadrate der Durchmesser, IX, 73. so verhält sich auch der Cirkel um A zu dem Cirkel um a, wie das Quadrat des Durchmessers BD sich zu dem Quadrate des Durchmessers bd verhält.

[Fig. 248.] §. 83. Man siehet leicht, daß aus diesem Beweise auch fließe, daß der größere Cirkel sich zu dem kleinern verhalte, wie sich das Quadrat der geraden Linie BC, die dem halben Umkreise des größern Cirkels gleich ist, zu dem Quadrat der bc, oder des halben Umkreises des kleinern Cirkels verhält. Allein dieser Satz wäre ziemlich unnütze, weil die Größen der Umkreise der Cirkel geometrisch nicht können gegeben werden. Von größerm Nutzen ist es, wenn wir betrachten, daß dasjenige, so von ganzen Cirkeln gezeiget worden ist, sich auch auf solche Ausschnitte anwen-

den lasse, die an den Mittelpuncten gleiche Winkel haben, und welche demnach einander ähnlich sind. ABD und abd sollen dergleichen Ausschnitte vorstellen, und wir setzen, daß die geraden Linien BC, bc welche die Bogen in B, b berühren, dem Bogen gleich sind, BC dem BD und bc dem bd. So lässet sich hier alles wiederholen, so eben von den Cirkeln gesaget ist. Die rechtwinklichten Dreyecke ABC, abc sind einander ähnlich, weil AB: BC = ab: bc, also ist auch ABC: abc = AB^q: ab^q. Und weil das Dreyeck ABC dem Ausschnitte ABD, und das Dreyeck abc dem Ausschnitte abd gleich ist, so ist auch ABD: abd = AB^q: ab^q.

[*Fig.* 249.] §. 84. Wenn man in den ähnlichen Ausschnitten ABDC, abdc die Sehnen BC, bc ziehet, so werden auch die Abschnitte BDC, bdc einander ähnlich, und man kan sich vorstellen, daß alle ähnliche Abschnitte auf die Art entstanden sind, weil bey ähnlichen Abschnitten die Winkel an den Mittelpuncten A, a, allezeit gleich werden müssen, wenn man die Halbmesser AB, AC wie auch ab, ac an die äußersten Puncte der Bogen ziehet, VII, 60. Es werden aber dadurch auch die Dreyecke ABC, abc einander ähnlich, wie man leicht siehet. Demnach ist, dem zu Folge, so eben erwiesen worden, ABDC: abdc = AB^q: ab^q, aber auch ABC: abc = AB^q: ab^q. Man nehme die Dreyecke von den Ausschnitten weg, so bleiben die Abschnitte BDC, bdc. Weil aber die Verhältniß der Ausschnitte ABCD: abcd sowohl als die Verhältniß der Dreyecke ABC: abc der Verhältniß AB^q: ab^q gleich ist, so wird durch diesen Abzug die Verhältniß nicht geändert, VI, 107. Es ist demnach auch BDC: bdc = AB^q: ab^q. Man siehet leicht, daß AB^q: ab^q = BC^q: bc^q, und daß man also auch sagen könne, BDC: bdc = BC^q: bc^q, demnach verhalten sich die ähnlichen Abschnitte BCD, bcd wie die Quadrate der Halbmesser ihrer Cirkel AB^q: ab^q, oder wie die Quadrate ihrer Sehnen BC^q: bc^q.

Aehnliche Figuren zusammen zu setzen, und eine von der andern abzuziehen.

[*Fig.* 250.] §. 85. Dieses sind die Grundsätze, welche bey der Vergleichung und Zusammensetzung der Flächen gebrauchet werden, außer einigen wenigen andern, die theils aus denselben fließen, theils vor sich einzusehen sind, welche wir noch anfügen müssen, damit nichts übrig bleibe, so in diesen Dingen zu wissen nöthig ist. Aus den gewiesenen Sätzen allein fol-

folget eine Anweisung, wie eine Figur zu machen ist, welche einer gegebenen Figur ähnlich, und derselben und einer andern ihr ebenfals ähnlichen Figur zusammen genommen gleich sey. Es seyn die zwo Figuren ABC und DEF einander ähnlich; man soll eine dritte Figur machen, welche einer jeden dieser Figuren ABC, DEF ebenfals ähnlich sey, aber so groß als diese beyde Figuren zusammen genommen.

§. 86. Man siehet, daß man dazu nichts zu suchen habe, als eine Seite der Figur, welche zu verfertigen ist, welche eben so liegen soll, wie die Seite AB in der Figur ABC lieget. Das ist, wenn von Parallelogrammen die Rede ist, und AB ist die größere Seite des Parallelogrammum ABC, so hat man die größere Seite des Viereckes von dieser Art, welches zu verfertigen ist, zu suchen. Ueberhaupt aber ist eine solche Seite oder Querlinie zu finden, aus welcher die Verhältniß der Figur, welche zu verfertigen ist, zu der gegebenen Figur ABC oder DEF geschlossen werden kan. Es ist aus dem vorigen bekant, was dieses vor Linien sind. Bey Cirkeln oder Theilen der Cirkel sind es die Durchmesser, oder die Halbmesser, oder die Sehnen ähnlicher Bogen, und so weiter. Wir erinnern uns aber auch verhoffentlich, wie, wenn eine dergleichen Linie gegeben ist, man hernach eine Figur verfertigen müsse, welche der gegebenen Figur ähnlich ist. Denn dieses ist an seinem Orte VII, 50. gezeiget worden, und darf hier nicht wiederholet werden. Die Linie aber, welche man dazu gebrauchet, wird nachfolgendergestalt gefunden.

§. 87. Man nehme in der Figur DEF eine Seite EF oder eine Querlinie nach Belieben, und aus der Figur ABC nehme man diejenige Seite, welche in derselben eben so lieget wie EF in DEF. Diese ist die Seite AB. Man setze AB und EF dergestalt an einander, daß sie einen geraden Winkel geben, welches wir hier gethan, indem wir die FG auf die EF perpendicular und der AB gleich gemacht haben. Ist dieses geschehen, so ziehe man EG, diese ist die gesuchte Seite, und wenn man auf EG die Figur EGH setzet, welche der Figur ABC oder DEF ähnlich ist, und in welcher EG eben so lieget, wie AB in ABC, oder EF in DEF, so ist EGH so groß als ABC und DEF zusammen.

§. 88. Dieses wird nachfolgender maßen erwiesen. Es ist aus einem der Sätze, welche wir ohnlängst IX, 65. erwiesen haben, bekant, daß das Quadrat der Seite EG so groß sey als die beyden Quadrate der Seiten EF und FG zusammen; weil das Dreyeck EFG bey F einen rechten Winkel hat. Es ist aber auch daraus, daß die drey Figuren ABC, DEF und EGH ähnlich sind, zu schließen, daß sie sich gegen einander verhalten, wie die

Qua-

Quadrate der Seiten AB, EF und EG, IX, 80. Demnach ist $AB^q : EF^q = ABC : DEF$, und folgends wenn man die erstern Glieder der Verhältnisse zusammen nimmet, VI, 92. $AB^q : AB^q + EF^q = ABC : ABC + DEF$, oder weil $AB = FG$, so ist $AB^q : FG^q + EF^q = ABC : ABC + DEF$. Da nun aber, wie wir bereits erinnert haben, $FG^q + EF^q = EG^q$, so kan man an statt $FG^q + EF^q$ in der eben gegebenen Proportion EG^q schreiben, ohne dieselbe aufzuheben, und es ist also $AB^q : EG^q = ABC : ABC + DEF$. Weil aber auch die Figur ABC der Figur EGH ähnlich ist, so hat man auch $AB^q : EG^q = ABC : EGH$, und wenn man diese Proportion mit der letztern vergleichet, so findet sich, daß die drey erstern Glieder derselben einerley sind. Demnach können die vierten Glieder derselben nicht von verschiedener Größe seyn, sondern es ist $ABC + DEF = EGH$. Man hat also die der ABC ähnliche Figur EGH so groß gemacht, als $ABC + DEF$ zusammen, wie aufgegeben war.

§. 89. Es wäre überflüssig, wenn ich nunmehro zeigen wolte, wie diese allgemeine Auflösung auf die besondern Arten der Figuren anzuwenden sey, weil dieses gar etwas leichtes ist. Man siehet zum Exempel sogleich, daß, wenn man einen Cirkel machen will, welcher so groß ist als zween gegebene Cirkel, deren Durchmesser AB und EF sind, man ebenfals diese Linien, wie in der Figur geschehen ist, zusammen setzen müsse, so nemlich, daß der Winkel EFG gerade werde. Die größeste Seite des Dreyeckes EG, welche man nunmehro leicht ziehen kan, ist der Durchmesser des Cirkels, welcher den zweyen gegebenen Cirkeln, deren Durchmesser AB und EF sind, gleich ist, und eben so verfähret man in allen dergleichen Fällen. Man kan aber auch an statt der Durchmesser der Cirkel ihre Halbmesser nehmen, wie leicht zu sehen ist.

§. 90. Durch die Wiederholung dieser Arbeit machet man eine Figur, welche so vielen Figuren gleich ist, als gegeben seyn mögen, falls diese gegebene Figuren einander alle ähnlich sind. Es seyn zum Exempel vier Cirkel gegeben, die wir uns unter den Buchstaben A, B, C, D vorstellen wollen, und es sey ein Cirkel zu machen, welcher so groß ist als $A + B + C + D$. Wir haben nicht nöthig erachtet, dieselbe zu zeichnen, weil die Sache auch ohnedem verständlich gemacht werden kan. Denn es ist dabey nichts zu sagen, als daß man erstlich, wie eben gewiesen worden ist, einen Cirkel E machen müsse, welcher so groß sey $A + B$. Sodann aber müsse man einen Cirkel machen, welcher so groß sey als $E + C$, welchen wir F nennen wollen, und endlich den dritten G, der so groß sey als $F + D$, welches alles geschiehet, indem man immer bloß zween Cirkel in einen bringet. Weil nun

G=F+D, und F=E+C, so ist auch G=E+C+D, und weil wieder E=A+B, so ist eben der Cirkel G=A+B+C+D, welches zu machen war.

§. 91. Die Figur ABC ist der Unterschied der zwo ähnlichen Figuren DEF und EGH. Denn wenn man sie zu den kleinern dieser Figuren DEF setzet, so wird die Summe ABC+DEF der größern Figur EFG gleich, und dieses ist allezeit ein Kennzeichen des richtigen Unterschiedes. Wenn demnach die zwo ähnliche Figuren EGH und DEF gegeben sind, und man soll die Figur ABC finden, welche einer jeden der gegebenen ebenfals ähnlich, und ihrem Unterschiede gleich sey; so wird man dieses durch eben die Figur erhalten können, welche wir vor uns haben, nur muß die Zeichnung derselben anders angefangen werden. Denn man kan hier das rechtwinklichte Dreyeck EFG nicht von den Seiten EF und FG zu beschreiben anfangen, weil zwar EF, nicht aber FG = AB gegeben ist, sondern diese letztere Seite gesuchet wird. Man muß vielmehr dieses Dreyeck aus seiner größesten Seite EG und aus der Seite EF verfertigen. Dieses aber geschiehet nachfolgender maßen. Man beschreibe auf EG einen halben Cirkel EFG, und lege in denselben aus E die Sehne EF, welche der Seite der gegebenen Figur DEF, die wir vor dem IX, 87. genau beschrieben haben, gleich ist: so kan man FG ziehen, und diese FG ist die Seite der Figur ABC, welche den beyden Figuren EGH und DEF ähnlich, und ihrem Unterschiede gleich ist.

[*Fig.* 252.] §. 92. Wenn ein Cirkel von einem andern abzuziehen, und ein Cirkel zu finden ist, welcher dem Unterschiede gleich sey, so geschiehet dieses durch eine sehr einfache Zeichnung. Man beschreibet die zween Cirkel, deren einer von dem andern abzuziehen ist, um einen Mittelpunct A, ziehet sodann eine Linie BC, welche den kleinern Cirkel in B berühret, bis an den Umkreis des größern in C, so ist diese BC der Halbmesser des Cirkels, welcher dem Unterschiede der beyden gezeichneten Cirkel, und folgends dem Ringe, welcher übrig bleiben würde, wenn man den kleinern aus dem größern herausschnitte, gleich ist. Denn wenn man den Halbmesser AB an den Berührungspunct B ziehet, so ist der Winkel ABC gerade, V, 48. und ziehet man auch den Halbmesser des großen Cirkels AC, so hat das Dreyeck ABC bey B einen geraden Winkel. Es ist demnach der Cirkel des Halbmessers AB, zusamt dem Cirkel des Halbmessers *BC*, dem Cirkel des Halbmessers AC gleich. Demnach ist der Cirkel, welcher mit dem Halbmesser *BC* beschrieben wird, der Unterschied der beyden Cirkel, deren Halbmesser sind A*B* und AC, welches eben die beyden Cirkel sind, welche wir um den Mittelpunct A verzeichnet haben.

§. 93.

[*Fig.* 413.] §. 93. Soll aber ein halber Cirkel einem andern halben Cirkel zugesetzt, und also ein halber Cirkel gefunden werden, welcher zween gegebenen halben Cirkeln gleich ist; so ist zwar die Auflösung dieser Aufgabe von der allgemeinen in nichts verschieden; man komt aber durch die Betrachtung derselben auf einen Satz, welcher wol vor sich von keinen besondern Nutzen ist, aber doch viel schönes hat, und eine wichtige Lehre erläutert, weswegen ich ihn hier anfügen will. Die halben Cirkel, welche zusammen gesetzt werden sollen, sind ABC und CDE. Ihre Durchmesser AC und CD sind dergestalt an einander gefüget, daß sie den geraden Winkel ACE einschliessen. Also ist AE der Durchmesser des halben Cirkels, der beyden gegebenen ABC und CDE gleich ist. Beschreibet man nun diesen halben Cirkel wirklich, so gehet sein Umkreis durch die Spitze des rechten Winkels C. Daß dieses geschehen müsse, siehet man leicht. Zum Ueberfluß aber kan man erwegen, daß durch die drey Puncte A, C, E allerdings ein Cirkelbogen beschrieben werden könne, V, 29. und daß, wenn dieser Bogen nicht die Helfte des ganzen Umkreises wäre, der Winkel in dem Abschnitt ACE nicht gerade seyn könte, sondern spitzig oder stumpf seyn müste, V, 69. Dieser halbe Umkreis aber fällt allerdings mit einem jeden andern, der auf den Durchmesser A, E gesetzet werden kan, zusammen.

§. 94. Es ist also der halbe Cirkel ACE den beyden vorigen ABC und CDE zusammen genommen gleich. Betrachtet man aber die Zeichnung etwas genauer, so siehet man, daß die beyden Abschnitte AFC und CGE dem grösten halben Cirkel, und den zween kleinern, gemeinschaftlich sind. Denn der Abschnitt AFC ist zugleich ein Theil des halben Cirkels ACE und des halben Cirkels ABC: und der Abschnitt CGE gehöret ebenfalls sowohl zu den halben Cirkel ACE, als zu den CDE. Nimt man nun diese zween Abschnitte beyderseits weg, sowohl von der Summe der kleinern halben Cirkel, als auch von dem grösten: so wird gleiches von gleichen abgezogen; also muß auch gleiches übrig bleiben. Es bleiben aber von den kleinern halben Cirkeln die beyden Figuren ABCFA und CDEGC übrig, die ohngefehr die Gestalt eines gemahlten Mondes haben, und von dem grösten halben Cirkel bleibt das rechtwinklichte Dreyeck ACE zurück. Dieses Dreyeck also muß den beyden Mondförmigen Figuren zusammen genommen gleich seyn. Da diese Figuren krumlinicht sind, so gibt dieser Satz das leichteste Beyspiel, der Vergleichung einer krumlinichten Figur mit einer geradelinichten, und diese Vergleichung pflegt man eine Quadratur zu nennen, ob zwar die geradelinichte Figur eben kein Quadrat ist. Denn man kan sie allzeit, so wie gewiesen worden ist, leicht in ein Quadrat verwandeln.

§. 95.

§. 95. Dergleichen Mondförmige Figuren, deren Summe quadrirt werden kan, kan man auf unendliche Arten machen: aber es hat noch niemand zeigen können, wie eine geradelinichte Figur zu verzeichnen sey, welche einer jeden der auf die Art gebildeten krumlinichten Figuren insbesondere gleich wäre; außer in dem einzigen Falle, wenn die Bogen AFC und CGE beyde Quadranten sind. Denn in diesem Fall, welchen die 414 Zeichnung vorstellet, werden sowohl die halben Cirkel ABC, CDE, als die Abschnitte AFC, CGE und die Mondchen selbst, beyderseits einander gleich, und jedes wird die Helfte der ganzen Summe derselben. Da nun die Summe der Mondchen noch immer dem Dreyeck ACE gleich ist, welches in dem gegenwärtigen Falle gleiche Schenkel AC, CE, bekömt; so ist jedes Mondchen ABCF oder CDEG der Helfte dieses Dreyecks ACH oder *CHE* gleich. Und also lassen sich nach dieser Art zu schließen, nur solche Monde einzeln mit Dreyecken vergleichen, die von der Helfte eines Cirkelkreises ABC oder CDE, und von dem Viertheil eines andern AFC oder CGE, umschlossen werden: wiewohl durch andre Schlüsse eine Menge anderer Figuren dieser Art mit Dreyecken verglichen werden können.

[*Fig.* 253.] §. 96. Sind nun wieder zwo Figuren F und G gegeben, und man sol eine dritte Figur H machen, welche der ersten der gegebenen Figuren F ähnlich, und der zwoten G gleich sey, so muß man sich auf die Aufgabe gründen, vermittelst welcher zwischen zwo gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden ist. Es ist nemlich nichts zu suchen als eine Seite der Figur H, welche zu beschreiben ist, welche in dieser Figur zwischen zween Winkeln liege, die zween Winkeln der Figur F gleich seyn. Man nehme die Winkel a und b dieser Figur, zwischen welche die Seite ab lieget, und verwandele erstlich die Figur F in ein Dreyeck, wie IX, 22. gewiesen worden ist, und dieses Dreyeck verwandele man wieder in ein geradewinklichtes Viereck, in welchem eine Seite so groß sey als ab. Auch dieses ist gewiesen worden, IX, 60. man kan es aber auch gleich erhalten, indem man F in ein Dreyeck verwandelt. Denn man kan diese Arbeit so einrichten, daß die Seite ab unverändert bleibet. Wir setzen das Viereck *ABC* sey der Figur F gleich und *AB* = ab, so verwandele man nunmehro auch G in ein geradewinklichtes Viereck CD, welches mit dem vorigen einerley Höhe *BC* habe: so ist *ABC* : *CBD* = F : G, weil die ersteren Figuren den letzteren gleich sind. Weil aber die Vierecke *ABC*, *CBD* gleiche Höhen haben, so ist *ABC* : *CBD* = *AB* : *BD*, IX, 40. und folgends auch F : G = *AB* : *BD*.

§. 97. Nunmehro suche man zwischen *AB* und *BD* die mittlere Pro-

por-

portionallinie *BE*. Diese ist die gesuchte Seite, welche in der Figur H eben so liegen muß, wie a b in F lieget. Denn wenn man auf diese *BE* die Figur H dergestalt beschreibet, wie F an ab beschrieben ist; so ist F:H = AB^q : BE^q, IX, 80. weil *AB* = ab, und weil *AB*:*BE* = *BE*:*BD*, so ist auch AB^q : BE^q = *AB*:*BD*, VIII, 52. Denn die Verhältniß *AB*:*BD* ist so wohl aus der Verhältniß *AB*:*BE* zweymal genommen zusammen gesetzet, als die Verhältniß AB^q:BE^q. Wenn man also an statt AB^q:BE^q die Verhältniß *AB*:*BD* setzet, so wird F:H = *AB*:*BD*, oder *AB*:*BD* = F:H. Nun ist auch, wie wir gesehen haben, *AB*:*BD* = F:G, und die drey erstern Glieder dieser Proportionen sind einerley. Also ist G = H, und die Figur H, welche man der Figur F ähnlich gemacht hat, ist auch der G gleich, wie erfordert wurde. Dieser Satz dienet mit zur Oefnung des Verstandes: dörfte aber wohl in der Anwendung selten vorkommen.

Einige besondere Sätze und Aufgaben von den geradewinklichten Vierecken.

§. 98. Die nachfolgende Sätze sind der Grund verschiedener höherer Betrachtungen, und dienen zur Auflösung vieler Aufgaben, die von großen Nutzen sind. Man pfleget nemlich in der Anwendung sich der Flächen oder ebenen Figuren eben so zu bedienen, wie man sich der geraden Linien bedienet, bekante Größen von welcher Art man will, vorzustellen, aus denselben andere dergleichen Größen zu schließen, die man sich ebenfals unter dem Bilde solcher flachen Figuren vorstellet, und dadurch die Aufgaben und Fragen, welche vorgeleget werden, aufzulösen. Man pflegt zu dem Ende diese Figuren, so oft es sich thun läst, in geradewinklichte Vierecke oder Dreyecke zu verwandeln, und diese hernach zusammen zu setzen, von einander abzuziehen, oder die Verhältnisse derselben zu betrachten

§. 99. Damit aber dieses desto leichter geschehen könne, so bezeichnet man die geradewinklichte Vierecke auch öfters so, wie man die Producte in der Rechenkunst bezeichnet, und verknüpfet die Seiten derselben vermittelst des Zeichens ×. Es bedeutet also *AB* × *CD* in der Geometrie ein geradelinichtes Viereck, dessen Seiten sind AB und CD, oder kan es wenigstens bedeuten. Diese Zeichnung hat man deswegen beliebet, weil, wenn zwey dergleichen Vierecke gegeben sind, und die Seiten des ersten sind AB und CD, die Seiten des zweyten aber ab und cd, die Verhältniß der Vierecke, welche aus den Verhältnissen ihrer Seiten zusammen gesetzet

wird, nachfolgender maßen ausgedrückt wird AB × CD : ab × cd. Man entfernet sich also von dem, was einmal VIII, 42. angenommen worden ist, nicht weit, wenn man das geradewinklichte Viereck, dessen Seiten sind AB und BC, auch vor sich mit AB × BC bezeichnet.

[*Fig.* 254.] §. 100. Die Summe zweyer oder mehrerer solcher Vierecke, welche eine Höhe haben AB × BC + AB × CD ist dem einzigen geradelinichten Viereck ABD gleich, dessen Höhe die vorige AB ist, die Grundlinie BD aber = BC + CD, und man kan also allezeit setzen AB × BC + AB × CD = AB × (BC + CD), wobey die Klammern, in welche die Buchstaben eingeschlossen sind, so die Grundlinien bedeuten, anzeigen, daß man diese zusammen setzen, und ihre Summe zur neuen Grundlinie annehmen müsse. Die Sache selbst aber ist bloß aus der Figur klar. Denn man siehet, daß man alle geradewinklichte Vierecke von gleichen Höhen so an einander schieben kan, wie in der Figur geschehen ist. Und eben so leicht siehet man, daß der Unterschied der geradewinklichten Vierecke von gleicher Höhe AB × BD — AB × CD dem geradewinklichten Vierecke AB × (BD — CD) oder AB × BC, gleich sey. Die Figur weiset es deutlicher als viele Worte.

[*Fig.* 255.] §. 101. Wenn man aber die zwo Seiten eines Quadrats AB, AC in D und E auf einerley Art theilet, so nemlich, daß AD = AE und folgends DB = EC, und ziehet durch diese Theilungspuncte die Linien DF, EG mit den Seiten parallel, so wird das Quadrat in vier Theile getheilet, welche sind: 1.) ED, das Quadrat des ersten Theils der Seite AD. 2.) EF, ein geradewinklichtes Viereck, dessen Seiten die Theile der Seite des ganzen Quadrats AB sind. Nemlich CF ist = AD, und CE = DB. 3.) Noch ein dergleichen geradewinklichtes Viereck DG. Denn BG ist = AE = AD, und 4.) das Quadrat FG, dessen Seite dem zweyten Theil der AB, nemlich der DB, gleich ist. Wenn demnach die Seite eines Quadrats AB aus den zwey Theilen AD, DB bestehet, so bestehet das Quadrat derselben EB aus nachfolgenden vier Theilen $AD^2 + 2AD \times DB + DB^2$. Die Sache ist desto leichter einzusehen und zu behalten, weil ein eben dergleichen Satz von den Quadratzahlen gleich Anfangs III, 8. erwiesen worden ist.

[*Fig.* 256.] §. 102. Ist aber von AD das Quadrat DE gemacht worden, und man will von dieser AD einen Theil von beliebiger Größe BD wegnehmen, und das Quadrat des Ueberbleibsels AD — BD, oder AB, aus dem vorigen Quadrat DE, machen: so kan man nachfolgendergestalt verfahren. Man mache AC = AB, wodurch auch EC der DB gleich wird,

zie-

ziehe sodann BF und CG mit den Seiten des Quadrats DE parallel, verlängere aber auch CG bis CH=EC, und mache das Quadrat EH, welches dem Quadrat FG gleich seyn wird, dessen Seite der BD gleich ist. Es ist aber auch das rechtwinklichte Viereck HF dem rechtwinklichten Viereck FD gleich, also bleibt das gesuchte Quadrat CB, dessen Seite AB ist, übrig, wenn man von der Summe der Quadrate ED+EH die zwey Vierecke HF+FD, abziehet. Oder wenn man dieses auf die vorher gebrauchte Art ausdrücken wil, so muß man sagen, das Quadrat von AB oder von AD—BD bestehe aus den Theilen $AD^q+DB^q-2AD\times DB$, weil nemlich HF+FD so viel ist als $2AD\times BD$, wie aus der Figur klar ist. Wil man die vorige Ordnung behalten, so schreibe man $(AD-BD)^q=AD^q-2AD\times BD+DB^q$.

[*Fig.* 255.] §. 103. Man siehet auch hieraus, daß der Unterschied zweyer Quadrate, wie man sie auch annehmen wil, CB und ED, der Summe der zwey rechtwinklichten Vierecke CG+GD gleich sey. Die Höhen dieser zwey Vierecke sind gleich, weil EC=DB, und zwar ist diese Höhe DB der Unterschied der zwo Seiten der Quadrate, deren eines ED von dem andern CB abgezogen worden ist. Denn DB ist augenscheinlich =AB—AD. Die Grundlinie EG aber des Vierecks CG ist der Seite des größern Quadrats AB gleich, und die Grundlinie GB des Vierecks GD ist die Seite des kleinern Quadrats EA oder AD. Demnach kan man die Summe dieser beyden Vierecke CG+GD also ausdrücken $DB\times AB+DB\times AD$, oder IX, 105. $DB\times(AB+AD)$; woraus zu sehen ist, daß der Unterschied zweyer Quadrate, deren Seiten sind AB und AD, einem geradelinichten Viereck gleich sey, dessen Höhe ist DB, der Unterschied der Seiten der Quadrate AB—AD, und die Grundlinie AB+AD die Summe dieser Seiten, oder kurz, daß $AB^q-AD_q=(AB-AD)\times(AB+AD)$.

[*Fig.* 257.] §. 104. Vermittelst dieser Sätze können wir nunmehro einen dergleichen Satz, als vor die rechtwinklichte Dreyecke oben IX, 65. heraus gebracht worden ist, vor alle übrige Dreyecke finden. Es sey das Dreyeck ABC bey B rechtwinklicht, so haben wir gesehen, daß die Quadrate der Seiten AB und BC zusammen, dem Quadrate der Seite AC gleich seyn, welche dem Winkel B entgegen stehet. Wie ist es aber, wenn der Winkel B spitzig ist; und auf was Art kan man das Quadrat der AC aus den Quadraten der Seiten AB, BC machen, wenn der Winkel B stumpf ist? Man sichet leicht, daß, wenn B spitzig ist, das Quadrat von AC kleiner seyn werde als die beyden Quadrate von *AB* und *BC* zusammen. Denn *AB*, *BC* sind in Ansehung der AC nunmehro größer als da der

Winkel *B* gerade war. Ist aber der Winkel *B* gerade, so ist $AB^q + BC^q$ genau so groß als AC^q, also muß, wenn der Winkel *B* spitzig ist, $AB^q + BC^q$ größer seyn als AC^q. Eben so siehet man, daß wenn der Winkel *B* stumpf ist, die Summe der Quadrate $AB^q + BC^q$ kleiner seyn müsse als das Quadrat von AC, weil *AB* und *BC* in Ansehung der AC nunmehro kleiner sind, als da der Winkel *B* gerade war. Die Frage ist, was man in dem zweyten Fall der Summe $AB^q + BC^q$ zusetzen müsse, und was in dem ersten Fall von dieser Summe abzuziehen sey, damit sie dem Quadrat aus AC gleich werde.

[*Fig.* 258. 259. *F.* 258.] §. 105. Dieses einzusehen, ziehe man die Perpendicularlinie AD auf *BC*, welche *BC*, wenn der Winkel *B* stumpf ist, erst muß verlängert werden: so werden die beyden Dreyecke *ABD*, *ACD*, rechtwinklicht, und weil $AB^q = BD^q + AD^q$, IX, 65. so ist $AD^q = AB^q - BD^q$. Auf der andern Seite aber hat man $AC^q = AD^q + DC^q$, oder weil, wenn der Winkel *B* spitzig ist, $DC = BC - BD$, und also $DC^q = BC^q - 2BC \times BD + BD^q$, IX. 102. so wird, wenn man dieses an die Stelle des DC^q setzet $AC^q = AD^q + BC^q - 2BC \times BD + BD^q$, und wenn man auch vor AD^q setzet $AB^q - BD^q$, weil der Unterschied dieser beyden Quadrate jenem gleich ist, so wird $AC^q = AB^q - BD^q + BC^q - 2BC \times BD + BD^q$, das ist, $AC^q = AB^q + BC^q - 2BC \times BD$. Denn das übrige hebt sich auf, indem der Zusatz des BD^q durch den Abgang desselben vernichtet wird. Demnach ist die Summe der Quadrate der Seiten, welche den spitzigen Winkel *B* einschließen $AB^q + BD^q$, um das rechtwinklichte Viereck $2BC \times BD$ größer als das Quadrat der Seite AC, welche demselben Winkel *B* entgegen stehet, und dieses Viereck aus $2BC$ und *BD* muß von der Summe der gedachten Quadrate abgezogen werden, damit sie dem Quadrat AC^q gleich werde.

[*Fig.* 259.] §. 106. Ist aber der Winkel B stumpf, so bleibt das übrige, nemlich $AD^q = AB^q - BD^q$, und $AC^q = AD^q + DC^q$, allein DC ist hier $= BC + BD$, und folgends $DC^q = BC^q + 2BC \times DB + DB^q$, und wenn man das letztere wieder an die Stelle des erstern setzet, und vor AD^q schreibet $AB^q - BD^q$, so wird $AC^q = AB^q - BD^q + BC^q + 2BC \times DB + DB^q$; oder wenn man dasjenige, so sich selbst vernichtet $DB^q - DB^q$ wegläßt, so wird $AC^q = AB^q + BC^q + 2BC \times BD$. Die Summe der Vierecke $AB^q + BC^q$ ist also hier um das geradewinklichte Viereck $2BC \times DB$ kleiner als das Quadrat von AC: weil man dieses Viereck zu der gedachten Summe hinzu setzen muß, damit sie dem AC^q gleich werde.

[*Fig.* 260.] §. 107. Nun haben wir noch eine Aufgabe übrig, vermit-

vermittelst welcher eine Menge anderer Aufgaben aufgelöset werden können, und welche also einen gar großen Nutzen hat, ob zwar hier der Ort nicht ist, denselben zu zeigen. In der That ist diese Aufgabe bereits oben mit andern Worten, auf eine Art vorgetragen worden, die mir viel deutlicher, und bey der Anwendung viel bequemer scheinet, als der gegenwärtige Vortrag. Indessen habe ich denselben nicht wegstreichen wollen, theils weil dadurch ein paar Zeichnungen unnütze geworden wären, und theils weil er wenigstens zu einiger Erläuterung desjenigen dienen kan, so uns die Alten von dieser Sache hinterlassen haben; mit welchen die gegenwärtige zwar nicht völlig, aber doch vielmehr übereinkomt, als die vorige Auflösung, die V, von 82 bis 92 abgehandelt worden ist. Die Aufgabe bestehet in dem nachfolgenden: es ist eine Figur gegeben, von was Art sie seyn mag S und eine gerade Linie A*B*. Man sol ein gleichwinklichtes Viereck machen, welches der Figur S gleich ist, und dessen zwo Seiten zusammen genommen die A*B* geben; oder dessen kleinere Seite von der größern abgezogen, die A*B* überlässet. Gesetzt nemlich, es wäre das Viereck ADE der Figur S gleich, und DE so groß als D*B*, so wäre AD + DE = AD + DB = AB, und das Viereck AE wäre dasjenige, dessen Inhalt der Figur S gleich ist, und dessen zwo Seiten zusammen gesetzt der gegebenen Linie *AB*, gleich sind. Gesetzt wiederum daß Viereck AG wäre der Figur S gleich, und BF = FG, so wäre nunmehro AF − BF = AF − FG, das ist AB = AF − FG, und dieses Viereck AG sol man verfertigen, wenn befohlen wird ein Viereck zu machen, welches der Figur S gleich ist, und dessen Seiten um die gegebene Linie AB von einander verschieden sind.

§. 108. Man findet nach einer kleinen Betrachtung, daß wenn man das Viereck AE machen wil, man die gegebene Linie AB in dem Punct D so theilen müsse, daß das geradelinichte Viereck, dessen Seiten die Theile AD und DE = DB sind, der gegebenen Figur S gleich werde, und daß wenn das Viereck AG verfertiget werden sol, man an die gegebene AB eine Linie BF von der Größe ansetzen müsse, daß das rechtwinklichte Viereck aus der ganzen AF, oder AB + BF, und aus FG = BF, wieder der gegebenen Figur S gleich werde. Man könte eben diese Aufgabe noch anders ausdrucken. Doch wir lassen es hierbey bewenden: was wir gesagt, kan genug seyn den Leser zu erinnern, daß er Aufgaben, welche mit verschiedenen Worten vorgetragen werden, nicht gleich vor verschiedene halte.

[*Fig.* 261. 262.] §. 109. Um aber diese Aufgabe aufzulösen, kan man auf verschiedene Art verfahren. Nothwendig muß man erstlich die gegebene Figur S in ein gleichwinklichtes Viereck, oder in ein Quadrat ver-

wandeln. Wie dieses geschiehet, ist gewiesen worden. Wir haben gezeiget, wie eine jede Figur in ein Dreyeck, und wie jedes Dreyeck in ein rechtwinklichtes Viereck, und wie jedes Viereck in ein Quadrat zu verwandeln sey. Auch haben wir IX, 60. gezeiget, wie ein gegebenes Dreyeck oder rechtwinklichtes Viereck in ein anders rechtwinklichtes Viereck zu verwandeln ist, welches eine Seite von gegebener Länge habe. Wir bedienen uns des letztern; und wenn wir diese Aufgabe auflösen sollen, so machen wir erstlich ein geradewinklichtes Viereck, welches der gegebenen Figur S gleich ist, und dessen Seite die Länge AB hat. Das Viereck ABC der 261 Figur hat diese Eigenschaften. Es ist so groß als S, und AB ist so groß als die gegebene AB der 260 Figur: oder wir setzen wenigstens, daß dieses so sey, und eben dieses nehmen wir auch bey dem Viereck ABC in der 262 Figur an, und wir werden also künftighin allezeit das Viereck ABC an statt der Figur S nennen.

[*Fig.* 261.] §. 110. Wenn nun erstlich ein geradewinklichtes Viereck zu machen ist, dessen Inhalt so groß ist als ABC, und dessen zwo Seiten zusammen gesetzt, die Linie AB ausmachen: so theile man AB in H in zwey gleiche Theile, und ziehe HK der BC parallel, welche HK dadurch der BC gleich wird. Man nehme sodann den Ueberschuß der HB über die HK, und lege denselben aus K an AB auf diese oder jene Seite. Dieser Ueberschuß in seiner gehörigen Lage ist KD. Das Punct D nun, welches dergestalt gefunden wird, theilet die Linie AB wie verlanget wird. Das Viereck nemlich ADE, dessen Seite DE der DB gleich genommen worden ist, so, daß seine beyden Seiten AD + DE die AD + DB oder *AB* geben, ist auch dem Viereck ABC gleich, wie es die Aufgabe erfordert.

§. 111. Der Beweis hievon gründet sich darauf, daß das Dreyeck KHD bey H einen rechten Winkel hat, und folgends das Quadrat der grösten Seite derselben KD den Quadraten der übrigen Seiten KH und HD gleich ist, IX, 65. Denn es ist diese Seite KD = HB — BC, und folgends IX, 102. $KD^q = HB^q - 2HB \times BC + BC^q$. Demnach ist $KH^q + HD^q = KD^q = HB^q - 2HB \times BC + BC^q$. Nun ist $KH^q = BC^q$, weil KH = BC. Man ziehe diese gleiche Quadrate beyderseits ab, so wird $HD^q = HB^q - 2HB \times BC$. Ferner ist $2HB \times BC = AB \times BC$, weil die Seite 2HB der AB gleich ist. Man setze dieses Viereck zu den vorigen $HD^q = HB^q - 2HB \times BC$ beyderseits hinzu, so wird der Abgang des $2HB \times BC$ auf der einen Seite ersetzt, und man bekomt $HD^q + AB \times BC = HB^q$, und wenn man hier wieder zu beyden Seiten HD^q abziehet, so wird $AB \times BC = HB^q - HD^q$. Dieser Unterschied zweyer Quadrate nun ist wie allezeit dem rechtwinklichten Viereck

gleich,

gleich, dessen eine Seite die Summe der Seiten der Quadrate $HB+HD$, und die andere, deren Unterschied $HB-HD$ ist, IX, 103. Es ist aber $HB+HD=AH+HD=AD$, und $HB-HD$ ist $=DB$, welcher die DE gleich gemacht worden. Demnach ist $HB^q-HD^q=AD\times DE$, und folgends auch $AB\times BC=AD\times DE$, welches zu erweisen war.

[*Fig.* 262.] §. 112. Soll man aber an die AB eine Linie BD anstücken, welche so groß sey, daß, wenn man aus AD und $BD=DE$ das Viereck ADE machet, dieses wiederum dem gegebenen Viereck ABC gleich werde, so verfahre man im übrigen, wie vorher, nur nehme man hier KD so groß, als die Summe der beyden Seiten, deren Unterschied man vorhero hat nehmen müssen. Das ist, man theile wieder die gegebene AB mit H in zwey gleiche Theile, und ziehe HK mit der BC parallel, welche folgends auch dieser BC gleich seyn wird: sodann nehme man $KD=HB+BC$, und lege sie wie die Figur weiset, aus K an AB, so reichet sie bis in das Punct D, welches man suchte. Und wenn man dadurch BD gefunden hat, so ist das rechtwinklichte Viereck ADE, in welchem $DE=BD$ dasjenige so gesucht wird.

§. 113. Der Beweiß dieser Auflösung ist mit dem Beweis der vorigen fast einerley; wir werden uns also dabey nicht lange aufhalten dürfen. Es ist $KD^q=KH^q+HD^q$, und weil $KD=HB+BC$, so ist auch $KD^q=HB^q+2HB\times BC+BC^q$, IX, 101. folgends $KH^q+HD^q=HB^q+2HB\times BC+BC^q$. Wir haben bereits erinnert, daß hier wieder $KH=BC$, also ist auch $KH^q=BC^q$. Man ziehe diese gleiche Quadrate beyderseits ab, so wird $HD^q=HB^q+2HB\times BC$, und wenn man hier wieder zu beyden Seiten HB^q wegnimt, so bekomt man $HD^q-HB^q=2HB\times BC=AB\times BC$. Denn es ist $AB=2HB$, und kan also jenes vor dieses gesetzet werden. Der Unterschied der Quadrate HD^q-HB^q ist hier wieder dem rechtwinklichten Viereck aus $HD+HB=HD+AH$, das ist AD, und aus $HD-HB=BD=DE$, gleich. Und wenn man dieses Viereck $AD\times DE$ an die Stelle des gedachten Unterschiedes der Quadrate setzet, und also machet $AD\times DE=AB\times BC$, so sihet man die Gleichheit der Vierecke, welche solte erwiesen werden.

§. 114. Man hat bey dieser Auflösung nicht die geringste Einschränkung, welche sie zuweilen ohnmöglich machte. Denn $HB+BC$ oder $HB+KH$ ist allezeit größer als die Entfernung des Puncts K von B, weil zwo Seiten eines Dreyeckes zusammen allezeit größer sind als die dritte; man kan also $KD=KH+HB$ allezeit aus K an die verlängerte Seite AB legen, und das D fällt dadurch allezeit über B hinaus.

§. 115.

[*Fig.* 263.] §. 115. In der 261 Figur aber, da KD dem Unterschied der HB und HK gleich zu machen war, kan es kommen, daß, wenn man KD an AB legen soll, das Punct D genau in H falle. Dieses geschiehet, wenn HB zweymal so groß ist als BC, wie in der 263 Figur. Denn wenn man in diesem Falle KD = HB — BC suchet, so wird dieselbe KD = 2BC — BC = BC = KH. Es ist also in diesem Falle, wenn HB zweymal so groß ist als HK oder BC, und folgends AB viermal so groß als BC, selbst das Punct H der gesuchte Theilungspunct D. Und das geradewinklichte Viereck AHE aus AH und HB = AH, oder mit einem Wort, das Quadrat AHE, ist das gesuchte Viereck, welches dem ABC gleich ist. Wäre aber der Unterschied der Seiten HB und HK kleiner als HK, so würde KD nicht einmal die Linie AB erreichen, und folgends die Auflösung dieser Aufgabe ganz und gar ohnmöglich fallen.

[*Fig.* 264.] §. 116. Ist nun aber das gegebene Viereck ABC ein Quadrat, und man leget an die Seite desselben AB die Linie BD dergestalt, daß das Viereck ADE, in welchem BD = DE, dem Quadrat ABC gleich ist: so wird die Seite BC = AB von der EF in G dergestalt geschnitten, daß sich die ganze BC zu dem grösten Theil derselben BG so verhält, wie dieser größere Theil BG zu dem kleinern GC, welches die Alten haben wolten, wenn sie aufgaben: Rectam AB media & extrema ratione secare. Wir begnügen uns mit der Sache, ohne die Redensart zu übersetzen, und beweisen nachfolgender gestalt, daß unsere Anweisung zu diesem Schnitt richtig sey.

§. 117. Es ist das Viereck ADE dem Quadrat ABC gleich gemacht worden, und wenn man demnach beyderseits das gemeinschaftliche Viereck ABG abziehet, so bleibet BDE = FGC. Nun ist BDE ein Quadrat, weil man DE der BD gleich gemacht, und man kan vor BDE schreiben BG^q. Weil aber auch FG = BC, so ist FGC = BC × GC, und demnach BG^q = BC × GC, das ist, das Quadrat der Linie BG ist dem geradewinklichten Vierecke, dessen Seiten sind BC × GC gleich. Folgends ist die Seite des Quadrats die mittlere Proportionallinie zwischen den Seiten des Viereckes, IX, 61. und also BC : BG = BG : GC, wie zu erweisen war.

§. 118. Man kan merken, daß hier KD = KH + HB drey Helften der Seite BC betrage: denn HK ist der Seite BC gleich, und HB ist die Helfte derselben. Es ist aber KD allezeit KH + HB. Sonst haben wir bey diesem Schnitte nichts zu erinnern nöthig: denn man siehet vor sich leicht, welche Linien aus der Figur weg bleiben können, ohne daß dadurch die Verzeichnung derselben; und die Erfindung des Gesuchten, ohnmöglich werde.

§. 119.

§. 119. Daß aber diese Aufgaben mit denen, die oben V, 82, 92. vorgetragen und aufgelöset worden sind, überein kommen, ist leicht zu zeigen. Wir haben in denen gegenwärtigen Aufgaben gemacht AD×DE = AB×BC, so daß zugleich DE=DB. Die Linien AB, BC waren gegeben, und die beyden AD, DE sind gefunden worden. Aus der Gleichheit AD×DB=AB×BC, welche man erhält, wenn man in der vorigen an statt der DE die DB schreibet, folgt AB:AD=DB:BC, IX, 58. Es ist aber in der 261 Zeichnung AD+DB gleich der gegebenen AB, und in der 262 Zeichnung ist AD—DB der gegebenen AB gleich. Also sind hier zwischen die zwo gegebene Linien AB und BC eben sowohl zwo andere gesetzt worden, welche die Proportion voll machen, und deren Summe oder Unterschied eine bekante Größe hat, als dieses oben geschehen ist.

Zehenter Abschnitt.

Von der Lage gerader Linien und Flächen, in Ansehung anderer Flächen.

§. 1.

Bisher haben wir immer die Flächen als gegeben angenommen, und alle gerade und krumme Linien, welche wir betrachtet, wie auch alle Figuren in dergleichen Flächen beschrieben. Wir müssen nunmehro auch solche Linien betrachten, welche außer einer gegebenen Fläche gezogen sind, und uns die Lage dieser Linien, in Ansehung der Fläche, und die Eigenschaften, welche daraus folgen, nach und nach bekant machen. Wir müssen verschiedene Flächen bald auf diese bald auf jene Art an einander legen, und uns Begeiffe davon machen, was aus dieser oder jener Lage in Ansehung der Flächen selbst, oder in Ansehung der Linien, welche in denselben gezogen sind, folge. Diese Betrachtung ist nicht nur nützlich, sondern auch bey der Anwendung der Geometrie unentbehrlich, und es kan ohne derselben nichts von den Cörpern erwiesen werden, deren Betrachtung uns noch vorstehet. Sie ist an sich leicht, ja eine der leichtesten, welche wir gehabt haben, wenn man sich nur die Mühe giebet, die ersten Begriffe von diesen Dingen genau aus einander zu setzen.

§. 2. Die einzige Schwierigkeit dabey ist, daß man diese Begriffe durch Figuren nicht so vollkommen ausdrücken kan, als bisher geschehen ist, da die Figur dasjenige meist vollkommen vorstellen konte, so in dem Begrif enthalten war. Denn die Figuren werden auf einer einzigen Ebene verzeichnet, und sollen doch Linien und Oberflächen vorstellen, welche nicht alle in einer Ebene sind. Es lässet sich zwar diese Schwierigkeit heben, wenn man Papiere auf verschiedene Arten zusammen setzet, welche die Flächen vorstellen, die wir betrachten, und die geraden Linien, welche bey denselben liegen sollen, durch straf gezogene Faden oder steife und gerade Stücke Drats, anzeiget. Man thut auch im Anfang nicht übel, wenn man der Einbildungskraft durch diese und dergleichen Mittel zu Hülfe kömt. Doch

muß

muß man sie nicht allzusehr gebrauchen, und sich nach und nach an die Figuren gewöhnen, so unvollkommen auch diese die Sache vorstellen. Denn außer dem, daß man nicht immer einen Kram von Papieren, Brettchen und Stiften um sich haben kan: so ziehet man aus den Figuren, welche würklich ganz was anders vorstellen, als dasjenige, womit sich der Verstand beschäftiget, diesen wichtigen Nutzen, daß man denselben nach und nach von den sinnlichen Bildern abziehet, und sich eine Fertigkeit erwirbt, aus reinen Begriffen, bey welchen bloß der Verstand, und nicht die Einbildungskraft würket, richtig zu schließen.

Wie zwo Flächen einander schneiden.

[*Fig.* 265.] §. 3. Man nehme ein Stück Papier, von was Figur man will, und suche es dergestalt zusammen zu falzen, daß die zwey Theile desselben ABC, ABD, in zwo verschiedene ebene Flächen zu liegen kommen, und sich folgends nirgends krümmen. Man wird dieses nicht anders thun können, als wenn der Falz AB, welcher das Blat in die Theile, so in denen verschiedenen Flächen liegen, ABC und ABD zerschneidet, eine gerade Linie AB wird. Diese einfältige Erfahrung zeiget dasjenige, so wir zuerst von zwo Flächen betrachten werden, gar deutlich, und wird hier bloß angeführet, damit wir die ersten Begriffe in dieser Lehre desto weniger verwirren mögen.

§. 4. Man kan eine jede Fläche so weit ausdehnen als man will, eben wie dieses auch mit einer geraden Linie angehet; allein da die gerade Linie sich nur nach einer Strecke verlängern läst, so kan man eine Fläche sowol in die Länge als in die Breite weiter ausdehnen. Die Natur der Fläche erfordert es, daß, wenn man sie dergestalt vergrößert, man sie nach geraden Linien weiter und weiter ausstrecke, sonst bliebe sie nicht eine ebene Fläche. Außer dem aber wird man bey dieser Ausdehnung von nichts eingeschränkt, IV, 33. Aus dieser Ursach stellen wir uns hier, da wir bloß auf die Lage Acht haben, die Oberflächen ohne einige Gränzen der Länge und der Breite vor, eben wie wir uns die geraden Linien ohne Gränzen vorgestellet haben, als wir bloß von ihrer Lage handelten, IV, 43. Wir konten uns den Begrif einer Linie, welche auf einer andern perpendicular stehet, machen, ohne auf die Größe dieser Linien Acht zu haben; ja wir musten uns denselben so machen, weil die verschiedene Größe in dieser Lage nichts ändert. Eben so wenig aber ändert auch die Größe in der Lage der Flächen etwas, und darf also bey derselben in keine Betrachtung gezogen wer-

werden. Da man aber eine Fläche ohne Gränzen nicht zeichnen kan, sondern nur von allen Seiten eingeschlossene Figuren, eben wie man keine gerade Linien zeichnen kan, welche nicht ihren Anfang und Ende hat: so stellet man die Flächen hier meistentheils durch Vierecke vor, weil diese Figur vor andern geschickt ist, die Lage der Flächen deutlich vorzubilden.

[*Fig.* 266.] §. 5. Wenn wir nun die zwo Flächen, in welche wir die zwey Theile unsers gefalzten Päpiers gebracht haben, ABC, ABD durch AB in E und F fortführen, so entstehen zwo Flächen, welche einander in AB schneiden, CE und DF. Dergleichen Flächen haben wir zuerst zu betrachten. Man siehet vor allen Dingen leicht, daß der Schnitt AB ganz keine Breite haben könne, und dieses ist daraus klar, weil die Flächen selbst keine Dicke haben, sondern bloß in die Länge und Breite ausgedehnet sind. Daraus folget, daß, wenn man die Fläche CE von C anfänget, und gegen die FD nach und nach vergrößert, sie sich der Fläche FD beständig nähern werde, bis sie diese Fläche bey AB in einem oder mehreren Puncten erreichet; und daß, wenn dieses geschehen ist, und man die Fläche CE von den Puncten an, in welchen sie die Fläche DF erreichet hatte, weiter fort gegen E ausdehnet, sie die Fläche DF bey denselben Puncten sogleich wieder verlassen werde. Wäre dieses nicht, so müste die Fläche CE eine Weile in der Dicke der Fläche DF fortgehen können, welches aber ohnmöglich ist, weil die Fläche DF keine Dicke hat.

[*Fig.* 267.] §. 6. Dieses deutlicher einzusehen, darf man sich nur vorstellen, welchergestalt eine Fläche einen Cörper schneidet. Der Cörper sey AB, und die Fläche, welche ihn schneidet CD. Man stelle sich vor, daß man diese Fläche nach und nach von C an gegen den Cörper AB ausdehne. So bald sie nun den Cörper in EF erreichet, so bald fänget sie an, denselben zu schneiden; aber indem man sie noch weiter herunter führet, bleibet sie immer an dem Cörper, und fähret fort denselben zu schneiden, bis sie in GH komt, da sie den Cörper wieder verlässet. Es wird demnach der Schnitt EFGH von einer desto größeren Breite, je dicker der Cörper AB ist. Denn ist der Cörper sehr dünne, wie zum Exempel ein Blatt des feinesten Papieres, so ist der Schnitt schon kaum so breit, daß man diese Breite merken könte. Und weil der Schnitt bey noch dünneren Cörpern auch immer schmäler und schmäler wird, so siehet man, daß, wenn die Dicke gar verschwindet, das ist, wenn man sich an die Stelle des Cörpers eine Oberfläche vorstellet, auch die Breite des Schnittes gar verschwinden, und der Schnitt zu einer Länge ohne Breite, oder zu einer Linie, werden müsse.

§. 7.

[Fig. 266.] §. 7. Indem die Fläche CE die Fläche DF schneidet, so schneidet auch hinwiederum die Fläche DF die Fläche CE, und der Schnitt AB ist beyden Flächen gemeinschaftlich, daß demnach, da CE die DF in einer Linie schneidet, auch hinwiederum DF die CE in einer Linie schneiden muß; und zwar in eben derselben AB, in welcher sie selbst geschnitten wird.

§. 8. Man siehet leicht, daß, was wir eben erwogen haben, auch von gekrümten oder unebenen Oberflächen richtig sey, welche nemlich nach einer oder mehreren Seiten nach krummen Linien ausgedehnet sind; und daß überhaupt alle Oberflächen, sie mögen eben oder uneben seyn, wenn sie einander schneiden, einander in einer Linie schneiden. Da aber eine gekrümte Oberfläche eine andere, ebene oder unebene, auch in mehrern Linien schneiden kan; so schneiden zwo ebene Flächen einander nur in einer Linie, und niemals in mehreren. Man kan sich die Sache wieder an zusammen gefalzeten Papiere vorstellen. Es können die zwey Theile eines zusammen gefalzeten Blattes CB, BD einander, außer der AB, ohnmöglich noch einmal schneiden, so lange sie eben bleiben und man sie nicht beuget. Sie können nicht einmal in einem Puncte zusammen kommen, welches außer dem eben gedachten Schnitte oder Faltze AB gelegen wäre; es müßte denn seyn, daß man dieselbe ganz auf einander legen wolte. Dieses kan man geometrisch von allen Flächen zeigen, daß nemlich, wenn zwo Flächen einander schneiden, sie außer der Linie, in welcher sie einander schneiden, kein einiges anderes Punct gemeinschaftlich haben können. Haben aber zwo Flächen außer ihren gemeinschaftlichem Schnitte nicht einmal ein Punct gemeinschaftlich, so haben sie noch vielweniger eine Linie gemeinschaftlich, als in welcher unendlich viele gemeinschaftliche Puncte anzugeben wären.

[Fig. 268.] §. 9. Es wird sich aber diese an sich nicht schwere Sache folgendergestalt erweisen lassen. Es seyn ABC, ABD zwo Flächen, welche die Linie AB gemeinschaftlich haben, in welcher sie zusammen laufen, und einander schneiden würden, wenn man sie nach der Seite AB weiter ausstreckete. Will nun jemand behaupten, daß die Flächen außer dieser AB noch ein Punct E mit einander gemeinschaftlich haben, so kan man folgendergestalt zeigen, daß weder dieses E, noch ein anderes Punct, die angegebene Beschaffenheit haben könne. Man erwehle in AB ein Punct F wo man will. Dieses ist den beiden Flächen ABC, ABD gemeinschaftlich. Man ziehe die gerade Linie FE in der Fläche ABC, und in der Fläche ABD ziehe man die gerade Linie FGE, welches beydes sich thun lässet, IV, 34. Sind nun die Flächen von einander verschieden, so können auch die Linien

FE und FGE nicht in eines zusammen fallen, sondern sie müssen zwischen F und E wie bey G, von einander entfernet seyn. Also sind zwischen den zwey Puncten F und E zwey verschiedene gerade Linien gezogen worden. Wir wissen, daß dieses ohnmöglich seyn könne, IV, 25: also kan auch das Punct E nicht beiden Flächen ABC, ABD gemeinschaftlich seyn, oder die Flächen, welche in der Linie AB zusammen stoßen, können ohnmöglich einander noch in einem anderen Puncte E antreffen, sie müsten denn ganz und gar in eine zusammen fallen.

§. 10. Wir wissen also, daß zwo Flächen einander in einer Linie AB schneiden können, und außer derselben sonst nirgends: oder daß, nachdem sie einander dergestalt geschnitten haben, sie einander hernach außer dieser Linie AB nicht mehr erreichen können, man mag sie vergrößern wie man will. Aber was ist diese AB vor eine Linie? Ist sie gerade oder ist sie krum? Ist es möglich, daß zwo ebene Flächen einander nach einer krummen Linie schneiden können, oder schneiden sie einander immer in einer geraden Linie? Die Probe mit gefalzten Papiere, welche wir zur Erleuterung angegeben haben, würde uns die Antwort leicht an die Hand geben, wenn es erlaubt wäre, geometrische Beweise auf Erfahrungen zu gründen. Es ist aber auch aus dem, was wir bereits von dem Schnitte der Flächen wissen, leicht einzusehen, daß die Linie AB, in welcher zwo Flächen einander schneiden, allezeit gerade sey.

[*Fig.* 266.] §. 11. Denn man mag die Linie AB, in welcher zwo Flächen einander schneiden, sich im Anfange vorstellen wie man will, so kan man doch in derselben zwey Puncte A und B annehmen, welche beiden einander schneidenden Flächen gemeinschaftlich sind. Denn da die ganze Linie AB in beyden schneidenden Flächen zugleich liget, so kan es allerdings mit diesen zwey gemeinschaftlichen Puncten keine Schwierigkeit haben. Hat man nun diese beyde Puncte nach Belieben angenommen, so stelle man sich vor, daß sie vermittelst einer geraden Linie zusammen gezogen sind. Diese gerade Linie zwischen A, B muß sowohl in die eine CE, als in die andere DF, der einander schneidenden Flächen fallen. Denn die Puncte A und B sind sowohl in der einen als in der andern dieser Flächen CE, DF. Die gerade Linie aber, welche zwey Puncte einer Fläche mit einander verknüpfet, fället allezeit in eben dieselbige Fläche, sonst wäre die Fläche keine Fläche, weil eben daraus erkant wird, daß sie eine Fläche sey, wenn man zwischen jeden zwey Puncten derselben eine gerade Linie ziehen kan, welche ganz in dieselbe fället, IV, 34. Ist nun also die gerade Linie zwischen A und B in den beyden einander schneidenden Flächen CE, DF zugleich,

gleich, so schließet man ferner folgendergestalt: Außer der Linie AB, in welcher zwo Flächen einander schneiden, ist keine andere zu ziehen, welche in beyden Flächen zugleich wäre; die gerade Linie zwischen A und B ist in beyden Flächen CE, DF zugleich, derowegen ist diese gerade Linie zwischen A und B selbst die Linie AB, in welcher die Flächen einander schneiden. Es schneiden also zwo Flächen einander allezeit nach einer geraden Linie, die Flächen mögen gebildet seyn, wie sie wollen.

§. 12. Wenn man die Flächen, welche einander schneiden, gehörig vergrößert, so wird auch die gerade Linie AB, in welcher sie einander schneiden, verlängert, ja man kan, indem man diese Schneidungslinie AB verlängert, sogleich alle übrige Puncte angeben, welche die Flächen CE, FD, die einander schneiden, gemeinschaftlich haben werden, wenn man sie gehörig vergrößert. Denn kein einziges Punct, welches beyden Flächen gemeinschaftlich ist, fällt außer diese also verlängerte Schneidungslinie AB.

[*Fig.* 265.] §. 13. Man siehet leicht, daß man ohnmöglich zwey Puncte A, B angeben könne, durch welche man nicht eben sowol eine Fläche DB legen könte, als man zwischen dieselbe eine gerade Linie ziehen kan, welche gerade Linie allezeit in die Fläche ED fällt, die man durch die zwey Puncte A, B geleget hat. Allein da man durch zwey Puncte nur eine gerade Linie AB ziehen kan, so kan man im Gegentheil durch dieselbe so viele Flächen BD, BC legen als man will, welche einander alle in der geraden Linie AB schneiden werden: oder man kan BC um AB nach Belieben drehen. Eine Thür in ihren Angeln giebet ein deutliches Exempel davon, oder auch zusammen gefaltztes Papier. Jene kan man um ihre Angel nach Belieben auf und zuschlagen, und dieses lässet sich um seinen Falz ebenfals mehr oder weniger von einander beugen, wie man will.

Wie die Lage einer Fläche bestimmet wird.

[*Fig.* 269.] §. 14. Setzet man nun, daß in einer Fläche ABC zwey Puncte A und B und die gerade Linie AB feste sind, und beständig an ihrem Orte liegen bleiben, wie die zwey Angeln an einer Thür, und daß man die Fläche um diese Puncte, und folgends um die gerade Linie AB, welche man durch sie beyde gezogen hat, so lange herum drehe, bis sie ein anders Punct D erreichet, welches auser der geraden Linie AB lieget: so höret alle Bewegung dieser Fläche so bald auf, als sie dieses Punct erreichet hat, wenn man nemlich setzet, daß sie das Punct D nicht wieder verlassen, sondern beständig durch dasselbe hindurch gehen soll. Denn so bald man die Fläche noch

wei-

weiter um AB drehen wolte, würde sie das Punct D wieder verlassen. Es ist wieder eben so, wie mit einer Thür, welche man um ihre Angel so lange drehet, bis sie an ein festes Punct anstößet. Man kan sie sodann nicht weiter fort bewegen, und doch noch beständig durch dieses feste Punct durchgehen lassen. Man mag also drey Puncte nehmen wo man will, in einer geraden Linie oder außer derselben, so kan man jederzeit eine Fläche durch dieselbe legen: aber wenn diese drey Puncte nicht in einer geraden Linie sind, so wird die Lage der Fläche durch dieselben Puncte bestimmet, und es kan durch drey Puncte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, nicht mehr als eine einzige Fläche geleget werden, eben als wie durch zwey Puncte nicht mehr als eine gerade Linie gezogen werden kan. Wenn man durch drey nach Belieben angenommene Puncte mehr als eine Fläche legen wolte, so würden dieselben in eine einzige zusammen fallen.

[*Fig.* 270.] §. 15. Nun stelle man sich vor, die drey gegebenen Puncte seyn A, B und C, welche nicht in einer geraden Linie liegen, und lege an dieselbe eine Fläche, so nemlich, daß alle drey Puncte A, B, C in diese Fläche fallen; sodann ziehe man durch zwey dieser Puncte die gerade Linie AB, welche man nach Belieben verlängern kan. Dieselbe fällt ganz in eben die Fläche, welche durch A, B und C gehet, und kan nicht aus derselben fallen, weil sonst die Fläche nicht überall nach geraden Linien ausgedehnet wäre, wenn sie jemals von der AB abwiche. Eben so ist es mit der geraden Linie CB, welche die vorige in B schneidet. Sie fällt ganz in eben die Fläche, welche wir betrachten, die nemlich gleich Anfangs an A, B, C geleget worden ist, und man muß also sagen, daß, wenn zwo gerade Linien AB, CB einander schneiden, man allezeit eine Fläche so legen könne, daß diese gerade Linien, man mag sie verlängern wie man will, ganz in dieselbe fallen: oder daß man allezeit sich eine ebene Fläche vorstellen könne, welche durch diese Linien hindurch gehet.

§. 16. Ziehet man noch die dritte Linie AC, nachdem man das vorige gelassen, wie es war, so komt diese Linie AC in eben die Fläche zu liegen, in welcher die Puncte A, B, C liegen. Es liegen demnach die drey Seiten der Figur ABC sämtlich in eben der Fläche, und so ist es mit allen dreyseitigen Figuren. Denn man kan allezeit durch die drey Spitzen ihrer Winkel eine Fläche legen, in welche sodann ihre Seiten nothwendig fallen müssen. Oder, man mag drey Puncte A, B, C, nehmen wie man will, und dieselben mit den geraden Linien AB, BC, CA zusammen hängen, so bekommet man allezeit ein Dreyeck, wie es im Anfange IV, 86. erkläret,

und bisher betrachtet worden ist, nemlich eine ebene Figur, welche von drey geraden Linien beschlossen wird.

[*Fig.* 271.] §. 17. Mit den Vierecken ist es schon nicht nothwendig so; noch weniger mit dem Fünfeck, und den übrigen vieleckichten Figuren. Wenn man vier Puncte A, B, C, D nach Belieben leget wie man will, und sie vermittelst der geraden Linien AB, BC, CD, DA zusammen hänget, so wird die Figur ABCD nicht nothwendig eben, und man erhält also dadurch nicht allezeit solche Vierecke als wir im vorigen betrachtet haben: und eben so ist es mit allen Vielecken beschaffen. Wir wollen bey den Vierecken stehen bleiben, weil deren Betrachtung das vorige etwas erläutern kan. Wenn ABCD ein Viereck ist, dessen Seiten man mit Fleiß alle in eine Ebene geleget hat; und man ziehet eine Querlinie BD, so kan man hernach die Figur nach BD falzen, und das Dreyeck BAD gegen BCD neigen wie man will, als bis in aBD, da denn die Dreyecke aBD, BDC in zwo verschiedene Flächen fallen, aber keinesweges eine ebene Figur ausmachen werden, dergleichen ABCD war. Man schneide sich ein Viereck von Papier aus, und falze dasselbe wie gewiesen worden ist, so wird die Sache augenscheinlich.

§. 18. Das Parallelogrammum machet hier eine Ausnahme; nicht als ob nicht ein Viereck von dieser Art sich eben so falzen und beugen ließe, wie wir eben gewiesen haben; sondern weil es aufhöret ein Parallelogrammum zu seyn, so bald man es beuget. Denn dadurch höret nothwendig der Parallelstand der entgegen gesetzten Seiten auf, weil, nach dem ersten Begriffe, die Parallellinien nothwendig in einer Fläche liegen müssen, IV, 80. und wenn sie nicht so liegen, keine Parallellinien können genennet werden. Es sind nemlich die Parallellinien diejenigen, welche nicht zusammen laufen, man mag sie verlängern, wie man will, aber das ist nicht genug. Nicht alle gerade Linien, welche, wenn man sie verlängert, einander nicht erreichen, sind parallel. Dieses thun zwo Linien, deren eine man auf dem Tisch von Abend gegen Morgen, die andere aber auf dem Boden des Zimmers von Mittag nach Mitternacht gezogen hat, ebenfals nicht: sie sind aber deswegen nicht parallel, und die von Parallellinien erwiesene Eigenschaften können ihnen keinesweges zukommen.

[*Fig.* 272.] §. 19. Ist nun also ABCD ein Parallelogrammum, so liegen die Seiten AD und BC in einer Fläche, und weil die äußersten Puncte der Seiten AB und DC in eben der Fläche liegen, indem sie in die erst angezeigte Parallellinien AD, BC fallen; so kan es nicht anders seyn, es müssen auch diese Linien AB, DC ganz in eben die Fläche fallen, welche durch die Parallellinien AD, BC gehet. Denn eine gerade Linie fället niemals

mals in eine andere Fläche, als in diejenige, in welche zwey Puncte derselben fallen. Man könte diesen Satz mehr allgemein machen, und sagen, wenn zwo einander entgegen gesetzte Seiten eines Vierecks, wie hier AD, BC in einer Fläche liegen, so liegen alle Seiten desselben Vierecks in eben der Fläche. Der Beweis ist mit dem, welchen wir eben gegeben haben, einerley: allein diese Betrachtung ist von keinem sonderlichen Nutzen.

Gerade Linien, so einer Fläche parallel laufen.

§. 20. Dieses sind die Grundsätze der gegenwärtigen Abhandlung, und wir können nunmehro zu demjenigen übergehen, so wir hauptsächlich zu betrachten haben. Wir machen den Anfang mit solchen geraden Linien, welche einer gegebenen Fläche parallel liegen. Man sagt aber, daß eine gerade Linie einer Fläche parallel liege, wenn sie die Fläche niemals erreichet, man mag sie verlängern und die Fläche vergrößern wie man will. Mehr wird zu dem Begriffe dieser Lage nicht erfordert.

[*Fig.* 273.] §. 21. Und man kan sich die nachfolgende Anweisung vorstellen, eine gerade Linie nicht allein mit einer Fläche, sondern auch mit einer in derselben gegebenen geraden Linie parallel zu ziehen. Denn es muß auch diese letztere gegeben seyn, oder wenn sie nicht angegeben wäre, so müste man sie nach Belieben annehmen, weil, wie leicht einzusehen ist, gar verschiedene Linien mit jeder gegebenen Fläche parallel gezogen werden können, die alle durch ein einiges Punct gehen. Ja es muß noch drittens ein Punct, durch welches die Parallellinie soll gezogen werden, entweder zugleich bestimmet seyn, oder doch nach Belieben genommen werden. Hat man dieses alles, und ist die Fläche, welcher die Linie parallel laufen soll AB; die Linie aber in dieser Fläche, welcher die zu ziehende Linie parallel seyn soll, CD, und E das Punct außer der Fläche AB, durch welches die Parallellinie gehen soll: so lege man an CD eine neue Fläche ED, die zugleich durch das gegebene Punct E gehet, und ziehe in dieser Fläche, wie Anfangs IV, 176. gewiesen worden ist, die EF mit der CD parallel. Diese EF wird auch der Fläche AB parallel seyn.

§. 22. Man siehet, daß zu dem Beweise, daß EF mit der Ebene AB parallel sey, nichts erfordert werde, als daß man zeige, daß EF die Fläche AB niemals erreichen werde, und dieses kan man ohne Schwierigkeit einsehen. Weil EF mit der CD parallel läuft, so kan EF mit der CD niemals zusammen kommen. Nun schneiden die Flächen AB und ED einander in CD: also kan EF niemals in diese beyden Flächen gemeinschaftliche

Linie

Linie kommen. Wenn also EF die Fläche AB jemals erreichen solte, so müste es außer dem Schnitte CD geschehen. Man siehet aber leicht, daß dieses ohnmöglich ist. Denn weil die Linie EF beständig in der Fläche ED bleibet, und mit dieser in einem fortgehet: so muß da, wo die Linie EF die Fläche AB erreichet, auch selbst die Fläche ED die eben genante AB erreichen. Es ist aber nicht möglich, daß ED mit der AB außer der CD ein gemeinschaftliches Punct haben solte, X, 8. also kan auch ED die Fläche AB nicht außer der CD erreichen. Die Linie EF erreichet also die Fläche AB weder in der CD noch außer der CD, das ist, nirgends.

[*Fig.* 274.] §. 23. Wir wollen diesen Satz zum Behufe des Gedächtnisses kürzer also fassen: Wenn man mit einer Linie CD, so in einer Fläche AB gegeben ist, außer dieser Fläche eine Parallellinie EF ziehet; so ist diese Linie EF auch selbst der Fläche AB parallel. Selbst hieraus könte man das nächstfolgende ohne weitern Umschweif einsehen: wir wollen es aber gröserer Deutlichkeit halber besonders beweisen. Es wird gesetzt, daß man die EF mit der Fläche AB parallel gezogen, und sodann an EF eine andere Fläche geleget habe, welche die erstere AB in CD schneidet. Hieraus folget erstlich, daß EF der CD parallel sey. Dieses ist gar leicht erwiesen. Denn weil EF mit der Fläche AB parallel lieget, so kan sie mit der Fläche AB nicht zusammen laufen, und also auch nicht mit der Linie CD. Denn wenn EF die Linie CD erreichte, so erreichte sie nothwendig auch die Fläche AB, weil die Linie CD ganz in der AB lieget. Es liegen also in der Fläche ED zwo Linien EF und CD, welche nicht zusammen laufen. Dieses ist der Begrif von zwo Linien die einander parallel liegen, IV, 80. demnach ist die Linie EF der Linie CD parallel.

§. 24. Ferner wird gesetzt, daß, nachdem alles noch eben so gemachet worden, wie vorher, nachdem man nemlich EF mit der Fläche AB parallel gezogen, und an EF die Fläche ED geleget hat, welche die AB in CD schneidet, man noch eine andere Fläche EH ebensals an die EF geleget habe, welche die Fläche AB in GH schneidet. Es folget hieraus zweytens, daß dieser Schnitt GH dem vorigen CD parallel sey. Auch dieses ist aus eben den Gründen einzusehen, welche wir eben gebrauchet haben. Wir haben gesehen, daß CD mit EF parallel sey, und weil GH eben so entstanden ist, wie CD, so ist eben dieses auch von der GH zu sagen. Also kommet weder die eine noch die andere dieser zwo Linien CD, GH jemals mit der EF zusammen, wie weit man sie auch verlängern mag. Hieraus aber ist ferner zu schließen, daß sie einander auch selbst nicht erreichen können. Wir haben erst X, 23. gezeiget, wie dieses heraus zu brin-

gen sey, und erachten also nicht nöthig, es sogleich zu wiederholen, zumalen es als etwas sehr gemeines angesehen werden kan, daß zwo gerade Linien CD, GH, die in zwo einander in EF schneidenden Flächen ED, EH dergestalt gezogen sind, daß sie den Schnitt EF niemals erreichen, auch einander selbst nicht erreichen können. Es haben demnach die zwo Linien CD, HG das erste Kennzeichen der Parallellinien, daß sie nemlich einander niemals erreichen. Das andere ist sichtlich. Sie liegen beyde in der Fläche AB. Also sind diese Linien CD, HG nothwendig einander paralliel.

§. 25. Nunmehro kehre man die Sache um, und sehe sie von einer anderen Seite an. Man setze, daß man zuerst die Linie CD in der Fläche AB nach Belieben gezogen, sodann an CD die Fläche ED geleget, und in derselben die Linie EF der CD parallel gemacht habe, welche EF dadurch auch der Fläche AB parallel worden. Ferner setze man, daß man auch in der Ebene AB die Linie GH der vorigen CD parallel gemachet, und daß, nachdem dieses alles geschehen, man an EF die Fläche EH dergestalt geleget habe, daß sie durch das Punct G gehet: so wird diese Fläche EH die AB in keiner andern Linie als in der GH schneiden. Denn der Schnitt, wo man sich denselben auch vorstellen mag, ist, wie eben gezeiget worden, X, 24. mit der CD parallel; und weil man die Fläche EH an G geleget hat, so gehet diese der CD parallel laufende Linie durch G. Dieses aber thut die im Anfang gezogene GH und keine andere, IV, 187. Also ist der Schnitt selbst die GH, oder, die Fläche EH schneidet die Fläche AB in keiner andern Linie, die durch G ginge, als in derjenigen, die durch G der CD parallel läuft.

§. 26. Hierinnen lieget der nachfolgende Satz: wenn man einer Linie CD eine andere GH in einer gewissen Fläche AB parallel ziehet, und ziehet der ersten CD noch eine andere EF in einer andern Fläche DE parallel, so ist diese letztere EF auch der GH parallel. Dieser Satz sage ich lieget in den vorigen. Denn wenn man, wie allezeit geschehen kan, die Fläche EH an EF dergestalt leget, daß sie die AB in GH schneide; so ist aus dem gesageten klar, daß EF mit der GH parallel seyn müsse. Man kan diesen Satz auch kürzer so ausdrücken: Zwo gerade Linien EF und GH welche beyde einer dritten CD parallel laufen, sind selbst parallel, ob sie zwar in zwo verschiedenen Flächen liegen. Denn man hat nicht nöthig zu erwehnen, daß CD und GH beyde in einer Fläche AB liegen müssen, und EF und CD wieder nur in einer ED, weil dieses in dem ersten Begriffe der Parallellinien enthalten ist.

§. 27.

[Fig. 275.] §. 27. Nun können wir weiter, und zu einer andern Betrachtung übergehen, welche ebenfals Parallellinien zum Augenmerke hat, die nicht alle in einer Fläche liegen. Man ziehe zwo gerade Linien AB, CB nach Belieben, doch so, daß sie einander in B berühren, und einen Winkel ABC machen. Es liegen diese Linien beyde in einer Ebene, welche durch die drey Puncte A, B, C kan geleget werden, X, 15. Außer dieser Ebene ziehe man mit der AB die Linie ab, und mit der BC die Linie bc parallel, welche Linien ebenfals in einem Puncte b zusammen laufen, und einen Winkel abc machen werden. Denn es laufet die Fläche in welcher die zwo Linien AB, ab liegen, mit derjenigen, in welcher die andern zwo CB, cb liegen, nothwendig zusammen, und schneiden einander, wie man leicht siehet. Es kan erwiesen werden, daß diese zween Winkel ABC, abc gleich seyn: ja man siehet dieses fast von selbst. Wenn sie nicht gleich sind, so frage ich, welcher ist der größere? Gleichwie ab der AB parallel gezogen worden ist, so ist auch AB der ab parallel; und wiederum ist BC der bc nicht weniger parallel, als bc der BC, was hat also der eine Winkel vor dem andern vor einen Vorzug, welcher ihn größer machen könte?

§. 28. Doch wir haben uns niemals an dergleichen Beweisen begnügen lassen, welche noch immer einige Undeutlichkeit bey sich haben, und wir müssen auch hier ganz anders verfahren, wenn wir die Sache zu einer vollkommenen Gewisheit bringen wollen. Es ist dieses nicht schwer. Man mache die ab welche der AB parallel ist, auch derselben gleich, und ziehe die gerade Linien Aa, Bb; dadurch erhält man ein Parallelogrammum ABba, als welches jederzeit beschrieben wird, wenn man die äußersten Puncte A, a, wie auch B, b zweer gleichen Parallellinien AB, ab mit geraden Linien Aa, Bb zusammen ziehet, IV, 212. Es ist demnach wie in einem jeden Parallelogrammum Aa der Bb gleich und parallel. Eben dieses mache man auch mit CB und cb, man mache sie einander gleich, und ziehe ihre äußersten Puncte C, c mit der geraden Linie Cc zusammen, denn Bb hat man nicht nöthig zu ziehen, weil sie bereits gezogen ist. Das Viereck CBbc ist wieder ein Parallelogrammum, weil die erst angezogene Gründe auch hier statt finden. Demnach ist auch Cc der Bb gleich und parallel. Das ist, die beyden Linien Aa, Cc sind der Linie Bb gleich, und ob diese zwo Linien sind auch beyde der Linie Bb parallel. Aus dem ersten folget, daß sie auch einander gleich seyn, und aus dem zweyten daß sie auch einander parallel laufen werden, X, 26. Ziehet man nun also diese gleiche Parallellinien Aa und Cc wieder, vermittelst der geraden Linien AC und ac, zusammen, damit man das Viereck AacC erlange; so ist dieses Viereck wie-

wieder ein Parallelogrammum, und demnach AC der ac gleich. Da nun also AB=ab, BC=bc, und CA=ca, das ist, da in den Dreyecken ABC, abc, alle Seiten gleich sind, so sind auch die Winkel ABC und abc, welche zwischen gleichen Seiten liegen, einander gleich, welches zu erweisen war.

Gerade Linien, so auf einer Fläche perpendicular stehen.

[*Fig.* 276.] §. 29. Dieses war dasjenige, so wir von den Parallellinien, welche nicht alle in einer Fläche liegen, zu bemerken hatten. Wir gehen zu solchen geraden Linien über, welche auf den Flächen gerade, oder perpendicular stehen. Man sagt aber, daß eine gerade Linie AB auf einer Fläche CD gerade oder perpendicular stehe, wenn sie mit allen geraden Linien BE, BF, BG, rechte Winkel machet, die man in der Fläche CD durch das Punct B ziehen kan, in welchem sie die Fläche erreichet. Oder, das Kennzeichen, ob eine gerade Linie AB auf einer Fläche perpendicular stehe oder nicht, ist dieses. Man bemerket daß Punct B, in welchem die gerade Linie AB die Fläche berühret, und ziehet durch dasselbe in der Fläche nach Belieben die geraden Linien BE, BF, BG. Ist nun AB auf diese Linien alle perpendicular, keine ausgenommen, oder sind die Winkel ABE, ABF, ABG, und alle übrige die man dergestalt bekommet, alle gerade, so muß man sagen, daß AB auf die Fläche CD perpendicular sey: sonst, wenn einer oder der andere dieser Winkel nicht gerade wäre, stünde die Linie AB schief auf der Fläche CD.

§. 30. Es wäre in der Anwendung zu weitläuftig alle diese Winkel zu erforschen, und zu untersuchen ob sie gerade sind oder nicht. Man hat aber dieses nicht nöthig. Ein viel leichteres Kennzeichen, daß eine Linie auf einer Fläche perpendicular stehet, lieget in nachfolgendem Satze, welchen wir erweisen müssen. Wenn eine gerade Linie AB eine Fläche CD in B erreichet, und mit zwo geraden Linien BE und BF welche in dieser Fläche durch das Punct B nach Belieben gezogen sind, rechte Winkel machet ABF nemlich = ABE = R: so ist die Linie AB auch auf alle übrige gerade Linien, welche man in eben der Fläche CD durch B ziehen kan, perpendicular, und folgends auch auf die Fläche selbst. Daß man also, nach diesem Satze, nur zu untersuchen hat, ob die zween Winkel ABE, ABF gerade sind oder nicht, wenn man wissen wil, ob AB auf die Fläche perpendicular

dicular sey, und sich um alle übrige Linien nicht bekümmern darf; weil AB auf dieselbe, wenn der Satz richtig ist, nothwendig perpendicular seyn muß, wenn die zween Winkel ABE, ABF gerade sind.

[*Fig.* 277.] §. 31. Die Richtigkeit aber des Satzes kan man auf nachfolgende Art einsehen. AB ist sowol auf BE als auf BF perpendicular. Dieses wird zum Grunde gesetzt. Man verlängere diese Linien beyde durch B, bis Be=BE und Bf=BF, und ziehe die gerade Linien fe, FE. Die Dreyecke BEF, Bef werden dadurch gleich und ähnlich. Denn es sind sowol ihre Winkel EBF, eBf gleich, als auch die Seiten, welche sie einschließen; also sind ihre dritten Seiten EF, ef, wie auch die Winkel E, e und F, f einander ebenfals gleich. Nun ziehe man von einem in der AB nach Belieben angenommenen Puncte A eine gerade Linie nach F, und eine andere nach f, so bekommet man zwey Dreyecke ABF, ABf, welche bey B rechtwinklicht sind, und zwo gleiche Seiten haben, nemlich Bf=BF und BA =BA. Es sind also in diesen Dreyecken auch die übrigen Seiten gleich, AF=Af. Und ziehet man ferner auch die geraden Linien AE, Ae, so werden diese Linien aus eben dem Grunde, einander ebenfals gleich. Denn es ist auch hier ABE=ABe=R, und Be=BE, AB=AB. Wenn man sich also nunmehro die zwey Dreyecke Afe, AFE vorstellet, so siehet man, daß sie gleich und ähnlich seyn. Denn alle Seiten des einen, sind allen Seiten des andern gleich, fe=FE, Af=AF, und AE=Ae, wie erwiesen worden ist. Ja man könte dasselbe auch ohne weitläuftigem Beweise bloß daraus einsehen, weil bey Verfertigung dieser Dreyecke AEF und Aef man alles auf einer Seite eben so gemacht hat, wie auf der andern. Dieses alles ist demnach richtig, so bald man setzet, daß AB auf die beyden geraden Linien BE, BF zugleich perpendicular sey. Nun ist zu zeigen, daß hieraus fließe, daß eben diese AB auch auf einer jeden andern geraden Linie, welche in der Fläche CD durch B gezogen werden kan, perpendicular stehe. Man ziehe eine Linie nach Belieben durch B, nemlich gG, die sich beyderseits in den Linien FE, fe endiget, so siehet man leicht, daß die Theile derselben BG und Bg einander gleich fallen müssen. Und solte es nicht sogleich einzusehen seyn, so kan man durch die folgende Betrachtung sich davon überführen.

§. 32. Die Winkel gBe und GBE sind einander gleich, weil sie durch den Schnitt zwoer geraden Linien entstanden sind. Die Winkel GEB und geB sind Winkel der Dreyecke FEB, feB, von welchen wir gleich Anfangs gesehen haben, daß sie gleich sind, und die Seiten EB, eB sind einander mit Fleiße gleich gemacht worden; derowegen sind die Dreyecke gBe, GBE, in

welchen zween Winkel und eine Seite einander gleich sind, selbst gleich und ähnlich. Es ist also gB=GB, aber auch ge=GE, welches aus eben diesen fließet, und sogleich wird gebrauchet werden. Nemlich, man ziehe nunmehro die geraden Linien AG und Ag, so haben die zwey Dreyecke AEG und Aeg erstlich die Seite AE gleich der Seite Ae, zum zweyten die Seite EG gleich der Seite eg, und zum dritten den Winkel AEG gleich dem Winkel Aeg, als welches Winkel sind in den Dreyecken AEF, Aef, von welchen wir gesehen haben, daß sie gleich sind. Hieraus aber folget, daß in den Dreyecken AEG, Aeg, auch die Seiten AG, Ag einander gleich sind. Und dieses kan man wieder leicht vor sich einsehen, wenn man nur betrachtet, daß um die Linie Ag zu ziehen, man auf der einen Seite vollkommen so verfahren, und alles eben so gemacht habe, wie auf der andern Seite verfahren worden ist, die Linie AG zu erhalten, und daß also gar kein Grund sey, warum die eine AG größer oder kleiner seyn solte als die andere Ag.

§. 33. Ist nun also Ag=AG, wie auch gB=GB, welches wir vorhero gesehen haben; so sind, weil AB die dritte Seite in den Dreyecken ABG und ABg abgiebet, diese Dreyecke gleich und ähnlich: also sind auch die Winkel derselben bey B, nemlich AEG und ABg einander gleich, als welche in diesen Dreyecken zwischen gleichen Seiten liegen. Es fällt demnach die gerade Linie AB auf die Gg, welche man in der Ebene CD gezogen hat, dergestalt, daß sie mit derselben bey B zween gleiche Winkel machet. Also ist, nach den ersten Begriffen, AB auf Gg perpendicular, welches von dieser Linie zu erweisen war. Und weil man diese Linie Gg legen konte wie man wolte, so siehet man leicht, daß dieser Beweis zeige, daß eben die AB auf alle Linien, die in der Fläche CD durch B gezogen werden können, perpendicular sey. AB ist auf die Gg perpendicular, welche man in der Fläche CD durch B ziehen kan, wie man will. Was heißet dieses anders als AB ist auf eine jede gerade Linie perpendicular, die man in der Fläche CD durch B ziehen kan?

[*Fig.* 278.] §. 34. Dieser Beweiß ist etwas lang, wegen der vielen Dreyecke, deren eines man nach dem andern zu betrachten hat, aber im übrigen gar nicht schwer, weil er sich bloß auf die ersten und leichtesten Sätze gründet, welche nunmehro, nachdem sie so oft angewendet worden sind, ganz geläufig seyn müssen. Und in der That gewöhnet man sich endlich, dergleichen Beweise, so zu reden, in einem Blicke zu übersehen. Die Sache selbst aber noch etwas deutlicher zu machen, und sie dem Gedächtnisse einzuprägen, wollen wir ein Werkzeug beschreiben, mit welchem auf einmal eine Perpendiculärlinie auf eine jede gegebene Fläche zu setzen ist.

Denn

Denn ein gemeiner Winkelhacken ist dazu nicht hinlänglich. Man muß zween Winkelhacken ABC, ABD, bey welchen ABC, ABD die gerade Winkel sind, so zusammen setzen, daß ihre Schärfen AB in eines zusammen fallen, die anderen Seiten aber aus einander gehen, und einen Winkel DBC machen, der so groß seyn kan als man wil, doch mache man ihn lieber etwas groß als klein. Wenn man nun dieses Instrument dergestalt auf eine Fläche setzet, daß die Schärfen BD, BC beyde in dieselbe fallen, so ist AB auf diese Fläche perpendicular, weil AB sowohl auf der BD als auch auf die BC perpendicular stehet, und diese Linien in der Ebene liegen, auf welche man die Perpendicularlinie setzen sollen.

[*Fig.* 279.] §. 35. Man siehet hieraus, daß, wenn ein Punct in einer Ebene gegeben ist, man durch dasselbe nicht mehr als eine gerade Linie ziehen könne, welche auf derselben Ebene perpendicular stehe. Denn hat man durch das Punct B, so in der Ebene CD lieget, die Perpendicularlinie AB gezogen, wie allezeit geschehen kan: und man wil durch B noch eine andere gerade Linie BE ziehen, welche von der AB verschieden sey, so muß sie mit der AB bey B nothwendig einen Winkel machen, und sich demnach auf der einen oder der andern Seite nach der Ebene CD mehr neigen, als die Perpendicularlinie AB: woraus folget, daß die Winkel, welche BE mit den geraden Linien machet, die in der Ebene CD durch B gezogen werden können, ohnmöglich alle gerade seyn können. Man lege durch die beyden Linien AB, BE, die Fläche AF, welche die vorige CD in BF schneidet. Wenn nun sowohl AB als EB auf der CD perpendicular stehen, so sind die Winkel ABF und EBF, welche beyde in der Fläche AF liegen, beyde gerade, und folgends einander gleich, welches widersinnisch ist.

[*Fig.* 280.] §. 36. Auf eben die Art siehet man, daß sich die Ebene CD nicht um das Punct B auf diese oder jene Seite neigen lasse, ohne daß so gleich AB aufhöre auf dieselbe perpendicular zu seyn, oder daß, wenn AB auf CD perpendicular stehet, keine andere Fläche EF durch B könne geleget werden, auf welcher eben diese AB perpendicular stünde. Denn weil die Winkel, welche AB mit allen geraden Linien machet, die in der Fläche CD durch B gezogen sind, gerade sind, so ist es nicht möglich, daß auch die Winkel, welche eben die AB mit allen Linien einschließet, die in der Fläche EF durch B gehen, gerade seyn solten. Man lege durch AB die Fläche AG, welche die CD in BG und die EF in BH schneidet: Wäre nun AB sowohl auf CD als auch auf EF perpendicular; so müsten die Winkel ABH, ABG beyde gerade seyn, welches ohnmöglich ist, weil diese Winkel beyde in der Ebene AG liegen.

[*Fig.* 281.] §. 37. Es kan aber auch durch ein jedes Punct A außer der Fläche CD nur eine einzige Perpendicularlinie AB auf die Fläche CD gezogen werden. Denn wenn man setzen wolte, daß durch eben das Punct A noch eine andere Perpendicularlinie auf CD könne gezogen werden als AE; so müste folgen, daß ein Dreyeck zween gerade Winkel haben könne. Denn ziehet man BE in der Ebene CD; so ist der Winkel ABE, welchen die Perpendicularlinie AB mit der BE machet, nothwendig gerade. Wäre nun AE auch auf CD perpendicular, so wäre der Winkel AEB auch gerade, und es hätte also das Dreyeck ABE zween gerade Winkel B und E, welches nicht seyn kan.

[*Fig.* 276.] §. 38. Wir können nunmehro den Satz, welchen wir bisher betrachtet haben, verkehren, und sagen: wenn man in einer geraden Linie AB das Punct B nach Belieben annimmet, und durch B drey oder mehrere Linien BE, BF, BG ziehet, welche alle auf der AB perpendicular stehen, und mit derselben die rechten Winkel ABE, ABF, ABG einschließen; so werden diese Linien BE, BF, BG alle in die Ebene CD fallen, welche durch das Punct B dergestalt geleget werden kan, daß AB auf derselben perpendicular stehe. Wir müssen bey diesem Satze erst ein und anderes anmerken, ehe wir ihn beweisen. Wenn nemlich gesaget wird, es sollen BE, BF, BG alle durch das Punct B gehen, und doch auf die AB perpendicular seyn, so kan dieses nicht so verstanden werden, als ob diese Perpendicularlinien BE, BF, BG alle mit der AB in einerley Ebene liegen solten. In diesem Verstande ist die Sache ohnmöglich. Denn es ist bekant, daß in einer gegebenen Ebene nur eine gerade Linie auf einer andern perpendicular stehen könne, wenn zugleich das Punct bestimmet ist, durch welches sie gehen sol. Wenn man sich aber durch AB verschiedene Flächen geleget vorstellet, so kan in einer jeden eine Linie auf die AB perpendicular gezogen werden, welche durch B gehet, und dieses ist der einzige Verstand, welchen der Satz leidet. Ferner aber ist nicht nöthig zu beweisen, daß zwo dieser Perpendicularlinien BE, BF in einer Ebene liegen werden, auf welche AB perpendicular stehet. Denn dieses siehet man aus dem X, 15. gewiesenen gar leicht. Weil BE, BF in dem Puncte B zusammen laufen, so kan allerdings durch dieselbe eine Ebene CD geleget werden, und auf dieser Ebene muß AB perpendicular stehen, weil sie auf den zwo Linien BE, BF perpendicular stehet, die in der Ebene CD liegen, X, 30. Das einzige also, so wir zu beweisen haben, ist, daß auch die dritte Perpendicularlinie BG in eben die Ebene CD fallen werde. Allein, wenn dieses nicht wäre, so könte man doch auch durch BF und BG eine Ebene legen, auf welcher

AB perpendicular stehen würde, X, 30. Wäre nun diese Ebene von der CD, die durch EBF gehet, verschieden, so stünde die AB auf zwo verschiedenen Ebenen, welche beyde durch B gehen, perpendicular. Dieses ist nicht möglich X, 36; also kan die Ebene durch FBG von der Ebene CD nicht verschieden seyn, sondern GB fället in eben die Ebene CD, welche durch EBF gehet. Und eben so ist es mit der vierten, fünften und allen übrigen Linien, welche man durch B auf AB perpendicular ziehen kan.

[*Fig.* 282.] §. 39. Wenn AB auf der Ebene CD perpendicular stehet, und man beschreibet um das Punct B, auf welchem sie stehet, einen Cirkelkreis EFG; so ist ein jedes Punct der Perpendicularlinie A von allen Puncten des Umkreises EFG gleich weit entfernet. Denn wenn man in dem Umkreise die beyden Puncte E und F nach Belieben annimmet, und an dieselbe die Halbmesser BE, BF ziehet, und ferner AE und AF, so haben die zwey Dreyecke ABE, ABF, deren Winkel bey B gerade sind, zwo gleiche Seiten AB = AB und BE = BF. Also sind auch ihre übrigen Seiten gleich, AE nemlich = AF. Diese Seiten AE und AF aber sind die Entfernungen des Punctes A von den Puncten E und F des Umkreises.

§. 40. Dieses war dasjenige, so wir von den Lagen der geraden Linien gegen eine Fläche, welche insonderheit zu betrachten nöthig sind, zu bemerken hatten. Nun können wir die Lagen der Flächen gegen einander selbst einsehen, welche Erkäntniß aber uns wieder auf verschiedenes, so wir von den Lagen der geraden Linien gegen einander, und gegen die Flächen, an welchen sie liegen, noch nicht deutlich haben übersehen können, zurück führen wird.

Neigung einer Fläche gegen eine andere.

[*Fig.* 283.] §. 41. Zwo Flächen, welche einander in einer geraden Linie schneiden, haben eine gewisse Neigung gegen einander. Die Flächen sind ABC und CBD, die gerade Linie, in welcher sie einander schneiden ist BC. Diese **Neigung**, welche die Flächen gegen einander haben, welche man auch öfters den **Winkel** nennet, welchen sie einschließen, wird dergestalt ausgedrücket. Man ziehet in einer dieser Flächen EF auf CB perpendicular, und in der andern FG, ebenfals auf CB perpendicular, und zwar so, daß diese Perpendicularlinien in dem Puncte F zusammen stoßen, und einen Winkel EFG machen: dieser ist der Winkel, durch welchen man die Neigung der Flächen AB, BD gegen einander ausdrücket, und man hält EFG vor eben den Winkel, welchen die Flächen mit einander machen.

§. 42. Man siehet hiebey leicht ein, daß es einerley sey, wo man die Perpendicularlinien EF, FG ziehet, und daß die Größe des Winkels nicht anders wäre gefunden worden, wenn man an statt der EF, FG die Linien ef, fg auf die BC perpendicular gezogen hätte. Denn weil EF, ef beide in der Ebene AB auf die BC perpendicular sind, so sind sie einander parallel, und aus eben der Ursache ist auch fg der FG parallel. Da nun aber Parallellinien, wenn sie, wie hier EF und FG, wie auch ef und fg, zusammen laufen, jederzeit gleiche Winkel einschließen, X, 27. so sind auch die Winkel EFG und efg einander gleich. Es ist also eines, welchen von den Winkeln EFG oder efg man nehme, den Winkel, welchen die Flächen AB, BD mit einander einschließen, auszudrücken.

§. 43. Machen zwo Flächen einen geraden Winkel mit einander, oder ist der Winkel EFG, welchem die Neigung der Fläche ABC gegen die Fläche CBD gleich ist, ein gerader Winkel: so stehet die erstere Fläche auf der andern **gerade** oder **perpendicular**. Dieses ist die Redensart, womit der eben erwehnte Stand einer dieser Flächen an der andern ausgedrücket wird. Die 284 Zeichnung zeiget denselben, so gut es sich thun läßt, an: die Fläche AB ist auf die Fläche BD perpendicular, und der Winkel EFG ist gerade.

[*Fig.* 284.] §. 44. Es ist in diesem Falle, wenn AB auf der BD gerade stehet, eine gerade Linie, welche wie EF in der einen Fläche AB auf die Schneidungslinie BC perpendicular gezogen wird, nicht nur auf FG perpendicular, welche in der Ebene BD auf eben die BC perpendicular fällt, sondern auch auf eine jede andere gerade Linie, welche man in der Fläche BD nach dem Puncte F ziehen kan. Denn daß EF auf die GF perpendicular sey, siehet man daraus, weil, wenn dieses nicht wäre, die Fläche AB auf der Fläche BD nicht gerade stehen würde, wie doch angenommen wird. Es ist demnach EF auf zwo Linien FC und FG, welche beyde in der Fläche BD liegen, perpendicular, folgends ist sie auch selbst auf die Fläche BD perpendicular, X, 30. und machet mit allen geraden Linien, welche in dieser Fläche durch das Punct F gezogen werden können, gerade Winkel.

§. 45. Man siehet auch, daß, wenn eine gerade Linie EF auf der Fläche BD perpendicular stehet, und man leget durch diese Linie EF eine Fläche AB, wie man im übrigen will, diese Fläche AB auch gewiß auf die Fläche BD perpendicular zu stehen kommen werde. Denn wenn wieder BC die gerade Linie ist in welcher die beyden Flächen einander schneiden; so ist EF auf FC perpendicular, weil FC in der Fläche BD lieget, und EF auf allen

gera-

geraden Linien perpendicular stehet, welche in dieser Fläche BD durch das Punct F gezogen werden können. Aus eben der Ursache ist auch EF auf die FG perpendicular, welche man in eben der Fläche BD auf BC perpendicular gezogen, sich vorstellet: es ist demnach der Winkel EFG, welchen die zwo geraden Linien EF, FG einschließen, die auf der Schneidungslinie CB perpendicular stehen, gerade, und folgends AB auf CD perpendicular, X, 43.

[*Fig.* 285.] §. 46. Wiederum, wenn die Fläche AB auf der BD perpendicular stehet, und man will durch ein Punct des Durchschnittes der beyden Flächen CB, als F, eine gerade Linie auf BD perpendicular setzen: so kan diese Linie ohnmöglich außer der Fläche AB fallen. Denn wie wir X, 44. gesehen haben, so kan in der Fläche AB durch F eine gerade Linie EF gezogen werden, welche auf der Fläche BD perpendicular stehet. Wenn nun auch eine Perpendicularlinie auf BD möglich wäre, welche ebenfals durch F gienge, aber nicht in die Fläche AB fiele, FG zum Exempel, so giengen durch F zwo gerade Linien, welche beyde auf BD perpendicular stünden, nemlich die EF, welche in der Fläche AB gezogen worden ist, und die FG, von welcher man annimmet, daß sie nicht in dieselbe Fläche AB falle. Wir haben aber X, 35. gesehen, daß es ohnmöglich sey, daß durch ein Punct F zwo gerade Linien EF, GF gehen solten, welche beyde auf einer Fläche BD perpendicular stehen: also kan die beschriebene Perpendicularlinie nicht außer der Perpendicularfläche AB fallen.

[*Fig.* 286.] §. 47. Hieraus ist ferner zu schließen, daß, wenn man zwo Flächen dergestalt aufrichtet, daß sie beyde auf einer dritten Fläche perpendicular stehen, und einander in einer geraden Linie schneiden, diese gerade Linie auch selbst auf die Fläche, auf welcher jene perpendicular stehen, perpendicular seyn werde. Zwo Wände unserer Zimmer, welche mit einander einen Winkel machen, stehen auf dem Boden perpendicular, oder sollen doch wenigstens so stehen. Ist aber dieses, so ist auch die gerade Linie, in welcher sie einander berühren, auf den Boden perpendicular. Eben so ist es mit den beyden Flächen AB und CD, welche beyde auf der Fläche EF perpendicular stehen, und einander in der geraden Linie GH durchschneiden. Diese gerade Linie GH ist auf die Fläche EF perpendicular. Man siehet dieses ein, wenn man sich vorstellet, daß durch H eine gerade Linie zu ziehen sey, welche auf EF perpendicular stehe. Weil H in der Fläche CD angenommen worden ist, so muß diese Perpendicularlinie in die Fläche CD fallen, wie wir eben gesehen haben. Es lieget aber eben das Punct H auch in der Perpendicularfläche AB; also wird die Perpendicularlinie auch in diese Fläche AB fallen müssen, folgends ist dieselbe den beyden Flächen AB

und CD gemeinschaftlich. Nun aber haben die zwo Flächen AB und CD keine andere Linie gemeinschaftlich, als die gerade Linie GH, in welcher sie einander schneiden, X, 8. demnach ist selbst diese Linie die Perpendicularlinie, welche auf die Fläche EF durch das Punct H gezogen werden kan.

[*Fig.* 287.] §. 48. Wir haben bey dieser Materie von den Flächen und Linien, die auf einer andern Fläche perpendicular stehen, nur noch ein paar Sätze übrig. Wenn eine gerade Linie AB auf einer Fläche CD perpendicular stehet, und man hat mit dieser Linie AB eine andere EF parallel gezogen, so stehet auch diese auf der Fläche CD perpendicular. Denn weil die Linien AB, EF einander parallel laufen, so liegen sie nothwendig in einer Ebene: oder man kan eine Fläche so legen, daß sie durch die beyden Linien AB und EF gehet. Wir setzen dieses sey geschehen, und die Fläche, welche durch unsere Parallellinien gehet, sey ABFE, welche die Fläche CD in BF schneidet. So ist diese Fläche auf die CD perpendicular, weil sie durch die Perpendicularlinie AB gehet, X, 45. Es ist auch der Winkel ABF gerade, weil BF in der Fläche CD durch das Punct B gehet, und AB auf die Fläche CD perpendicular ist. Nun aber sind jederzeit die zween Winkel zwischen zwo Parallellinien, die von einer dritten geschnitten werden, zween geraden Winkeln gleich, IV, 191. also muß dieses auch von den beyden geraden Linien AB und EF richtig seyn, welche von der BF geschnitten werden. Da nun aber der Winkel B selbst ein gerader Winkel ist, so muß auch der bey F ein gerader Winkel seyn. Demnach ist die Linie EF in der Fläche AF, welche auf der Fläche CD perpendicular stehet, dergestalt gezogen, daß sie mit dem Durchschnitte der beyden Flächen BF einen geraden Winkel machet. Es ist also EF selbst auf die Fläche CD perpendicular, wie dieses von allen auf die Art gezogenen Linien erwiesen worden ist, X, 44.

[*Fig.* 288.] §. 49. Und wenn die geraden Linien AB, EF beyde auf einer Fläche CD perpendicular stehen, so sind sie parallel. Dieses ist der eben erwiesene Satz verkehrt gesetzt, und man kan ihn also vermittelst desselben ziemlich leicht einsehen. Wäre nemlich die EF, die sowohl als AB auf der Ebene CD perpendicular stehet, dieser AB nicht parallel, so könte man durch das Punct F eine andere Linie ziehen, welche der AB parallel wäre. Es sey diese Linie FG, so muß FG, vermöge des eben erwiesenen Satzes, auf CD perpendicular stehen. Da nun aber gesetzt wird, es stehe auch EF auf CD perpendicular; so gehen durch das Punct F zwo gerade Linien FE, FG, welche beyde auf die Fläche CD perpendicular sind. Dieses ist ohnmöglich, X, 35. also ist die von der FE verschiedene Linie FG nicht

der AB parallel. Weil man aber doch durch F eine Linie ziehen kan, welche der AB parallel ist, so muß die Perpendicularlinie EF selbst dieselbe seyn.

Flächen, deren eine der andern parallel lieget.

§. 50. Nun sind noch die **Parallelflächen** zu betrachten übrig. Diese liegen dergestalt, daß sie nicht zusammen laufen, man mag sie vergrößern wie man will, und nach welcher Seite man will. Es ist nicht nöthig, daß die Seiten der Flächen parallel liegen, wenn sie welche haben. Denn man siehet bey der Lage der Flächen niemals auf die Seiten derselben. Und derowegen hindert es nichts, wenn eine der Flächen die Figur eines Cirkels, und die andere die Figur eines Vierecks hat. Es kan der Cirkel dem Vierecke doch parallel seyn, ob man sich zwar nicht einmal vorstellen kan, auf was Art ein Theil des Umkreises des Cirkels einer Seite des Vierecks parallel laufen solle. Wenn man die Fläche des Cirkels sowol als die Fläche des Vierecks fortführen kan wie man will, ohne daß die eine die andere erreichet, so ist der Cirkel dem Vierecke parallel. Auf die Art ist die Oberfläche eines jeden Tischblattes, es mag dasselbe eckicht oder rund seyn, dem Boden des Zimmers, wie auch seiner Decke, parallel, oder solte es wenigstens seyn.

[*Fig.* 289.] §. 51. Eines der Kennzeichen nun, daß zwo Flächen AB und CD einander parallel liegen, ist, wenn die gerade Linie EF, welche auf einer derselben CD perpendicular stehet, auch auf die andere AB perpendicular fällt. Oder, wenn auf die Fläche CD eine gerade Linie EF, wo man will, perpendicular aufgerichtet ist, und eine andere Fläche AB ist dergestalt geleget, daß eben die gerade Linie EF auch auf AB perpendicular ist; so ist die letztere Fläche AB der erstern CD parallel. Es ist dieses leicht einzusehen. Man lege durch EF eine Fläche GH, welche auf beyden der gegebenen Flächen AB, CD perpendicular stehen wird, weil die EF, durch welche man sie geleget hat, auf beyde Flächen AB, CD perpendicular ist, X, 45. Gesetzt nun, diese Fläche GH schneide die eine der beyden Parallelflächen in Gl und die andere in KH, so sind diese Linien beyde auf EF perpendicular, denn sie liegen in den Flächen AB, CD, auf welchen EF perpendicular stehet, und gehen durch die Puncte E und F. Stehen aber diese beyde Linien auf EF perpendicular, so sind sie einander parallel und laufen nicht zusammen. Man siehet aber leicht, daß, wenn man die Fläche GH versetzet, man wieder andere Schneidungslinien bekomme, wie Gl und KH waren, welche einander parallel laufen und niemals zusammen kommen; ja man

sie-

siehet, daß von den Puncten E und F aus, nach allen Seiten dergleichen Linien liegen. Erreichen aber diese Linien, welche dergestalt von E und F aus, in den Ebenen AB und CD nach allen Seiten fortlaufen, und deren zwo jederzeit in einer gemeinschaftlichen Ebene GH befindlich sind, einander niemals, so können auch die Flächen einander niemals erreichen, man mag sie nach dieser oder jener Seite vergrößern wie man will. Folgends liegen die Flächen AB, CD einander parallel.

§. 52. Wäre EF auf die Fläche CD perpendicular, und folgends der Winkel EFK gerade, GEF aber wäre nicht gerade sondern spitzig; so würden die Linien FK, EG gewiß zusammen laufen, und mit ihnen auch die Flächen in welchen sie liegen CD und AB, IV, 214. Wenn also die EF, welche auf CD perpendicular stehet, nicht zugleich auf die AB perpendicular ist, so laufen die Flächen AB, CD gewiß irgendwo zusammen, und sind nicht parallel. Denn wenn die gerade Linie EF, welche auf der Fläche CD perpendicular stehet, nicht zugleich auf AB perpendicular ist, so muß sie nothwendig mit verschiedenen der geraden Linien, die in dieser Fläche AB durch E gezogen werden können, einen spitzigen Winkel machen. Derowegen kan mit der Fläche CD durch das gegebene Punct E keine andere Fläche parallel geleget werden als die einzige AB. Denn wenn man aus E die Perpendicularlinie EF auf CD fallen lässet, so kan man durch E nur eine einzige Fläche AB legen, auf welche EF perpendicular ist, X, 36. Diese AB also ist der CD parallel und keine andere.

§. 53. Und wenn zwo Flächen *AB*, CD parallel liegen, und man zieht zwischen denselben wo man wil eine Linie EF, welche auf einer der Parallelflächen CD perpendicular stehet, so muß sie auch auf die andere *AB* perpendicular seyn. Wäre dieses nicht, so wären die Flächen nicht parallel, sondern liefen irgendwo zusammen.

[*Fig.* 290.] §. 54. Hieraus siehet man sogleich, daß zwo Flächen *A* und *B* die einer dritten C parallel sind, auch einander selbst parallel seyn müssen. Denn wenn man auf C eine Perpendicularlinie setzet, und verlängert sie gehörig, so muß sie sowohl auf *B* als auf A perpendicular fallen, sonst wäre entweder A oder *B* der C nicht parallel. Ist aber eine gerade Linie sowohl auf A als auf B perpendicular, so sind auch die Flächen A und B einander parallel, X, 51.

[*Fig.* 291.] §. 55. Ein anderes Kennzeichen der Parallelflächen ist, wenn dieselbe wie AB, CD dergestalt liegen, daß in der einen AB zwo gerade Linien EF und FG gezogen werden können, welche in einem Puncte

F zusammen laufen, und in der andern CD zwo andere HI, IK welche ebenfals in einem Puncte I zusammen laufen, und den vorigen parallel sind, HI nemlich der FG und IK der EF. Ist dieses, so sind die Flächen AB, CD parallel. Oder anders, wenn zwo gerade Linien EF und IK parallel liegen, und dieselben zwo andere FG und HI berühren, welche einander ebenfals parallel sind: so sind die Flächen AB und CD, welche durch jede zwo dieser Linien gehen, die einander dergestalt berühren, parallel.

§. 56. Auch hievon hat der Beweis nicht viele Schwierigkeit. Wir wollen auf unsern ersten Satz zurückgehen, und zeigen, daß bey den gesetzten Bedingungen eine gerade Linie gezogen werden könne, welche sowol auf die eine als auf die andere der zwo Flächen AB, CD perpendicular ist; welches folgendergestalt eingesehen wird. Man stelle sich vor, daß aus dem Puncte F die Linie Fi auf CD falle, welche auf die Fläche AB perpendicular ist, und folgends mit den beyden Linien EF und FG gerade Winkel machet. Hat nun diese Fi die Fläche CD in i erreichet, so ziehe man durch i in der CD die Linie ik und ih mit IH parallel. Weil nun also ik der IK parallel lieget, aber auch gleich Anfangs angenommen worden, daß auch EF der IK parallel sey; das ist, weil beyde gerade Linien ik, EF der IK parallel laufen; so ist auch EF der ik parallel. Denn dieses ist von solchen Linien X, 26. überhaupt gezeiget worden. Da also die Parallellinien EF und ik von der geraden Linie Fi geschnitten werden, und EFi ein gerader Winkel ist, so ist auch der Winkel Fik gerade. Eben dieser Beweis findet auch bey den Linien FG und ih statt. Sie sind beyde der Linie HI und folgends einander parallel. Der Winkel GFi ist gerade, folgends auch der Winkel Fih. Es stehet demnach die gerade Linie Fi auf den beyden Linien ik und ih, welche in der Ebene CD liegen, perpendicular. Sie ist also auch auf diese Ebene CD selbst perpendicular, und weil man sie gleich Anfangs auf die Fläche AB perpendicular gesetzt hat, so ist sie auf beyden Flächen AB und CD perpendicular. Demnach sind die beyden Flächen AB, CD auf welchen die einzige Linie Fi perpendicular stehet, einander parallel, X, 51.

[*Fig.* 292.] §. 57. Sind nun nach diesen Gründen zwo Flächen AB und CD einander parallel geleget worden, und es schneidet sie beyde eine dritte Fläche EF, in den geraden Linien GH und Ik; so sind diese Schnitte einander parallel. Dieses kan ohne Schwierigkeit eingesehen werden. Die Kennzeichen der Parallellinien sind, daß sie in einer Fläche liegen, und doch niemals zusammen laufen, wie man sie auch verlängern mag. Beyde Kennzeichen haben die Schnitte GH und IK. Sie liegen beyde in der Ebene EF: und daß sie nicht zusammen laufen, siehet man da-

her, weil sie auch in den Ebenen AB und CD liegen, welche zusammen laufen müsten, wenn die Linien GH und IK zusammen laufen solten. Das letztere gehet nicht an, weil die Flächen AB und CD parallel sind, also können auch die Linien GH, IK nicht zusammen laufen.

§. 58. Es fließet hieraus sogleich, daß, wenn man zwischen zwo Parallelflächen AB, CD zwo gerade Linien GI, HK einander parallel leget; diese Linien, GI, HK auch einander gleich seyn werden. Denn man lege durch diese Parallellinien die Fläche EF, wie allezeit geschehen kan, und schneide vermittelst derselben die Parallelflächen AB, CD in GH und IK: so sind diese Schnitte, GH, IK einander parallel. Da man also gesetzt hat, es sey auch GI der HK parallel, so ist das Viereck GK ein Parallelogrammum, und es sind in demselben die einander entgegen gesetzten Seiten gleich, GI = HK, welches wir erweisen solten. Man siehet aber zugleich, daß auch GH der IK gleich sey.

[*Fig.* 293.] §. 59. Ferner ist aus eben dem Satze nachfolgendes zu schließen: wenn zwo Flächen AB, CD einander in BC schneiden, und man schneidet sie nochmals durch zwo andere Flächen EFG und HIK, die einander parallel laufen, in FE, FG, und HI, IK; so sind die Winkel EFG, und HIK einander gleich. Denn weil die Fläche AB die beyden Parallelflächen EFG, HIK in EF und HI schneidet, so sind die Schnitte EF, HI parallel: und weil eben die Parallelflächen EFG, HIK auch von der Fläche CD geschnitten werden, so sind auch die Schnitte FG und IK parallel. Es werden demnach die Winkel EFG und HIK von solchen Linien eingeschlossen, deren zwo und zwo einander parallel liegen: und wir haben oben X, 27. gesehen, daß dergleichen Winkel jederzeit einander gleich sind.

[*Fig.* 294.] §. 60. Noch einen einzigen Satz müssen wir bey dieser Sache zum Behufe des folgenden merken, wie denn diese ganze Betrachtung, welche wir von den Flächen und ihren Lagen angestellet haben, vors erste hauptsächlich dazu dienen sol, daß wir dasjenige, so von den Cörpern zu sagen seyn wird, deutlicher einsehen können. Wir stellen uns drey Flächen vor, welche einander parallel liegen, AB, CD und EF; deren Entfernung von einander so groß oder so klein seyn mag, als man wil. Wir ziehen zwo gerade Linien GI und KM zwischen den äußersten dieser Flächen AB und EF, welche von der mittleren CD in H und L geschnitten werden. Es ist im übrigen frey diese Linien zu ziehen wie man wil, und es wird nicht erfordert, daß sie beyde in einer Fläche liegen. Wenn dieses alles geschehen

hen ist, so sind die Theile der Linien, welche zwischen den Flächen auf einerley Art liegen, einander proportional, und man hat GH:HI=KL:LM.

§. 61. Denn wenn man eine dritte Linie KI von dem obersten Puncte der einen Linie K nach dem untersten Puncte der zweyten I ziehet, und das Punct, in welchem diese dritte Linie KI die mittelste Fläche CD durchstichet, mit N bezeichnet, auch ferner in der obersten Fläche AB die GK ziehet; so liegen X, 16. die drey Seiten des Dreyeckes KGI in einer Ebene, welche die Fläche CD in HN durchschneidet, und die Fläche AB in GK. Weil nun die Flächen AB und CD parallel sind, so sind die Schnitte GK und HN ebenfals parallel, X, 57. und es ist in dem Dreyecke KGI mit der Seite GK die gerade Linie HN parallel gezogen. Es ist demnach die Proportion GH:HI=KN:NI, richtig. Denn man kan bey allen Dreyecken dergestalt schließen, VII, 12. Ziehet man aber auch IM in der Fläche EF, und bemerket die Linie NL, in welcher die Fläche des Dreyeckes KIM die Fläche CD schneidet: so ist bey dem Dreyecke KIM alle dasjenige richtig, so eben von dem Dreyecke GIK gewiesen worden ist. Demnach haben wir hier KL:LM=KN:NI. Vergleichet man aber diese Proportion mit der vorigen GH:HI=KN:NI, so siehet man, daß in der ersten die Verhältniß GH:HI, und in der zwoten die Verhältniß KL:LM der Verhältniß KN:NI gleich gesetzt wird, welche zwo Verhältnisse demnach einander selbst gleich seyn müssen. Also ist die Proportion GH:HI=KL:LM richtig, und diese ist eben diejenige, welche in dem Satze angegeben ist, und zu erweisen war.

§. 62. In diesem Satz lieget derjenige, welchen wir bey der Betrachtung der Proportionen der geraden Linien zum Grunde geleget haben VII, 7. und fließet aus demselben gar leicht. Denn wenn die Theile der geraden Linien, die zwischen Parallelflächen liegen, einerley Verhältniß gegen einander haben, so muß dieses allerdings auch richtig seyn, wenn man an statt der Flächen, Parallellinien annimmet.

Eilfter Abschnitt.

Von den Cörpern und ihren Oberflächen.

Allgemeine Begriffe.

§. 1.

Wir sind also nunmehro bis an die Betrachtung solcher Größen, welche nicht nur in die Länge und Breite, sondern auch in die Tiefe ausgedehnet sind, gekommen. Dergleichen sind alle natürliche Cörper, welche wir vor uns haben. Allein diese Cörper haben außer der erwehnten Ausdehnung noch eine Menge anderer Eigenschaften, welche ein Naturkündiger zu untersuchen hat, die aber vor die Geometrie nicht gehören. Dergleichen sind das Gewicht der Cörper, ihr Vermögen sich zu bewegen, andere Cörper anzustoßen, oder ihnen zu widerstehen, und was dergleichen Dinge mehr sind; bey welchen allen man zwar ebenfals auf die Größe sehen kan, wie bey der Ausdehnung; und welche deswegen, wie die Linien und Oberflächen, und die Ausdehnung der Cörper selbst, mit einander verglichen werden können. Aber alle diese Eigenschaften gehören hieher nicht, und man betrachtet in der Geometrie einen Cörper nicht weiter als in so ferne er ein ausgedehntes Wesen ist. Das übrige alles so bey demselben vorkomt, wird hier in Gedanken von ihm abgesondert.

§. 2. Die Ausdehnung eines Cörpers ist mit der Ausdehnung des Raumes, welchen er füllet, in allen Stücken einerley, das ist, sowol in Ansehung der Größe, als auch in Ansehung der Figur: und der Begrif des einen ist von dem Begriffe des andern nicht verschieden. Eben deswegen, weil der Cörper einen Raum von dieser oder jenen Größe, und von dieser oder jenen Figur, füllet, schreibet man ihm diese Größe und diese Figur zu. Er würde größer seyn, wenn er einen größern Raum füllete; und eine andere Gestalt haben, wenn er einen Raum von einer andern Figur füllete. Eine Kugel ist deswegen eine Kugel, weil sie einen von allen Seiten gleich gerundeten Raum füllet; und würde keine Kugel seyn, wenn sie einen eckichten Raum einnähme. Allein da ein Cörper, außer seiner Ausdehnung und Figur, noch viele andere Eigenschaften hat, welche sich nicht auf die bloße

Ausdehnung gründen: so begreifen wir bey dem Raume, welchen der Cörper einnimt, außer der Ausdehnung und demjenigen, so sich unmittelbar auf dieselbe gründet, sonst gar nichts. Wir können also, wie bereits erinnert worden ist, sagen, daß diejenigen Größen, welche von allen Seiten ausgedehnet sind, und welche wir noch zu betrachten haben, nichts anders seyn, als der Raum, welchen die Cörper einnehmen.

§. 3. Ob wir zwar also uns der gewöhnlichen Redensarten bedienen, und die nach allen Seiten, und also in die Länge, Breite und Tiefe ausgedehnte Größen, **Cörper** nennen werden: so wird doch unter dieser Redensart nichts anders als dieser Raum, zu verstehen seyn. Oder will man ja Cörper nehmen, so wird man auf die bloße Ausdehnung derselben Acht haben, und die übrigen Eigenschaften alle eben sowol von den Cörpern absondern müssen, als ob sie zu den Cörpern gar nicht gehörten. Was bleibet aber nach dieser Absonderung übrig, als wieder der bloße Raum, den die Cörper füllen?

§. 4. Alle Cörper sind in Oberflächen eingeschlossen, und diese sind entweder eben oder gekrümmet, IV, 33. Die ebenen Oberflächen sind nach ihrer Figur und Größe genugsam betrachtet worden: wohl aber wird noch ein und anders von der Lage derselben, bey verschiedenen Cörpern, anzumerken seyn. Was aber die gekrümmeten Oberflächen anlanget, so stehet deren Betrachtung uns noch ganz vor: wie auch die Betrachtung einiger Linien, welche in diesen Oberflächen können gezogen werden.

§. 5. Es sind der Cörper selbst unendlich viele, und unter denselben sind die meisten in gekrümmete Oberflächen eingeschlossen. Von noch viel mehreren Arten sind die Linien, welche in diesen Oberflächen gezogen werden können. Wir werden uns also hier gar sehr einschränken müssen, wenn wir unsers Zweckes nicht verfehlen wollen, nur die ersten Anfangsgründe, und unter denselben die nöthigsten und nützlichsten beyzubringen. Dieses wird geschehen, wenn wir keine andere Oberflächen betrachten, als die sich auf die Beschreibung des Cirkels und der geraden Linie gründen; und keine Cörper als diejenigen, welche in dergleichen Oberflächen eingeschlossen sind. Dadurch werden der Cörper, welche wir zu betrachten haben, sehr wenige, und wir werden sehen, daß dieselbe, nach ihren Haupteigenschaften, sich alle in drey Classen bringen lassen.

§. 6. Wir wollen von der Größe der Cörper anfangen, und zeigen, wie die Cörper, welche nach und nach deutlich beschrieben werden sollen, unter allen Umständen und denen verschiedenen Einschränkungen derselben mit einander zu vergleichen sind. Der Grundsatz, dessen wir uns dabey be-

dienen werden, ist eben derjenige, dessen wir uns bey der Vergleichung der ebenen Figuren bedienet haben, IX, 4. nur muß derselbe nunmehro so ausgedrücket werden, daß er sich auch für die Cörper schicket.

[Fig. 295.] §. 7. Es sind AB und CD zwo ebene Flächen, die einander parallel liegen, und zwischen denselben stehen zween Cörper EF, GH dergestalt, daß sie beyde von der Fläche AB bis an die CD reichen, und sich in diesen Flächen mit Puncten, Linien oder ebenen Flächen endigen. Sonst kan man diese Cörper annehmen von was Figur man will, rund oder nach Belieben eckicht. Wir setzen, daß diese Cörper EF und GH beyde, vermittelst einer dritten Fläche, welche man den Flächen AB und CD parallel geführet hat, zugleich geschnitten werden, und daß durch diesen Schnitt in den beyden Cörpern die Figuren iK und LM zum Vorschein gekommen sind. Sind nun diese Figuren IK, LM einander gleich, und ist dieses beständig so, man mag die Cörper mit einer Fläche, die der AB pararallel lieget, schneiden wie man will: so sage ich, es seyn die beyden Cörper EF und GH einander gleich, eben wie dieses von den ebenen Figuren, aus eben dergleichen Kennzeichen, geschlossen worden ist.

§. 8. Es ist hierbey zu bemerken, daß eben nicht erfordert wird, daß die Schnitte IK, LM, oder eigentlicher zu sprechen, die Figuren IK, LM, welche durch den Schnitt hervor kommen, einander auch ähnlich seyn. Wenn sie nur einander gleich sind, so mag die eine rund, die andere eckicht seyn, oder sie mögen sonst einander unähnlich seyn wie sie wollen; die Cörper sind bey den gesetzten Bedingungen dennoch gleich. Auch wird nicht erfordert, daß alle Schnitte des einen Cörpers EF einander gleich seyn sollen; ja es wird nicht einmal erfordert, daß die verschiedenen Schnitte dieses Cörpers EF einander ähnlich seyn. Die oberen Schnitte dieses Cörpers EF können rund seyn, und die unteren eckicht. Es können die oberen klein seyn, und die unteren groß. Wenn nur ein jeder Schnitt, wie IK, dem Schnitte LM gleich ist, welcher LM von der AB oder CD eben so weit als IK abstehet, und sowohl als IK diesen Flächen parallel lieget, so sind die Cörper EF und GH einander gleich.

§. 9. Da wir diesen Satz als einen eigentlichen Grundsatz angeben, so ist nicht nöthig, etwas zu dem Beweise desselben anzubringen. Es wäre kein Grundsatz, wenn er Beweis bedürfte. Zur Erläuterung desselben kan aber alles dasjenige dienen, so wir bey der vorigen Anwendung desselben IX, 6. gesaget haben. Welcher von den beyden Cörpern EF, GH ist der größere, und welcher ist der kleinere, wenn sie unähnlich sind, und worinnen lieget der Grund ihrer Ungleichheit? Wenn man die Entfernung der Flä-

che AB von der Fläche CD vor die Höhe der Cörper annimmet, wie man allerdings thun kan, so sind diese Cörper in die Höhe oder Tiefe gleich ausgedehnet, weil sie beyde von einer dieser ebenen Flächen AB bis an die andere CD reichen. Ihre Ausdehnungen in die Längen und Breiten aber, in einem jeden Abstande von der Fläche AB, messen die Figuren, dergleichen IK und LM sind. Denn diese Ausdehnungen müssen der Fläche AB parallel genommen werden, und die eben erwehneten Figuren IK, LM liegen der AB parallel. Sind nun diese Figuren aller Orten einander gleich, so sind auch die Cörper EF, GH aller Orten in die Längen und Breiten gleich ausgedehnet. Es ist nemlich EF bey IK in die Länge und Breite, oder mit einem Worte, der AB parallel, eben so weit ausgedehnet als GH bey LM nach eben diesen Strecken, oder der AB parallel, ausgedehnet ist, und so ist es überall. Wie kan also einer dieser Cörper EF, GH größer seyn als der andere?

Erste Art der Cörper.

[*Fig.* 296. 297.] §. 10. Wir werden diesen Satz am allerleichtesten auf die erste Art unserer Cörper anwenden können, von welchem wir vor allen Dingen nunmehro einen deutlichen Begrif geben müssen. Man beschreibe eine geradelinichte und ebene Figur ABCDE, von wie viel Seiten man wil, gänzlich, nach Belieben. An die Spitze eines der Winkel dieser Figur A setze man eine gerade Linie von beliebiger Länge AF, so daß sie nicht in die Ebene falle, in welcher die Figur ABCDE lieget, sondern auf dieser Ebene, nach Belieben, gerade oder schief stehe. Durch B, die Spitze des zweyten Winkels der Figur ABCDE, ziehe man die gerade Linie BG der vorigen AF parallel, und eben dieses mache man bey der Spitze C des dritten Winkels, wie auch bey allen übrigen. Diese gerade Linien AF, BG, CH, DI, EK, werden einander alle parallel liegen, weil eine jede der zuerst gezogenen AF parallel lieget, X. 26. Man kan sich also durch AF, BG eine ebene Fläche vorstellen, wie auch durch BG und CH eine andere, welche mit der vorigen in BG zusammen laufen wird, und durch CH und DI die dritte, welche die zwote in CH schneidet, und so rings herum. Diese Flächen sind oben nicht geschlossen. Denn wir haben die Längen der Linien AF, BG, CH noch nicht bestimmet, und also noch viel weniger die Flächen FABG, GBCH und die übrigen, bey F, G, H geschlossen. Dieses aber nunmehro zu thun, und zugleich den Cörper, welchen wir beschreiben wollen, von allen Seiten einzuschließen, lege man durch

das

das in der AF nach Belieben angenommene Punct a eine andere ebene Fläche der Figur ABCDE parallel, welche von allen Seiten an die Flächen anstoße, in welchen die Parallellinien AF, BG, wie auch BG, CH und sofort, liegen: so ist der Cörper ABCDE e a b c d gehörig eingeschränket.

§. 11. Die Oberflächen aber, welche ihn einschließen, sind nachfolgende: Erstlich, die nach Belieben angenommene geradelinichte Figur ABCDE, welche wir die eine **Grundfläche** nennen wollen, weil sie der ebenen Fläche abcde gleich und ähnlich ist, welche dannenhero mit Recht die zwote Grundfläche kan genennet werden. Daß dieses sey, schließet man also: man hat die Ebene abcde der ABCDE parallel geleget, und diese beyden Flächen werden in AB, ab von der Fläche geschnitten, in welcher die Parallellinien AF, BG liegen: also sind auch die Linien ab, AB einander parallel, X, 57. Weil aber auch Aa, Bb einander parallel liegen, so ist Ab ein Parallelogrammum, und ab der AB gleich. Auf eben die Art wird geschlossen, daß auch bc der BC parallel liege, daß BC ein Parallelogrammum, und bc der BC gleich sey, und eben dieses ist rings herum richtig. Der CD ist die cd parallel und gleich, der DE die de, und der EA die ea. Hieraus aber folget, daß auch der Winkel abc dem Winkel ABC gleich sey, und der Winkel bcd dem Winkel BCD. Denn die Winkel, deren Seiten einander parallel sind, sind allezeit gleich, es mögen diese Seiten übrigens liegen wie sie wollen, X, 27: und aus eben dem Grunde ist bcd = BCD und cde = CDE, und so ferner. Demnach sind die Winkel der Figur abcde den Winkeln der Figur ABCDE gleich, wie sie auf einander folgen; und die Seiten dieser beyden Figuren, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, sind einander ebenfals gleich. Also sind die Figuren gleich und ähnlich. Und aus eben diesem Beweise folget noch, daß die Cörper der ersten Art, außer den Grundflächen, um und um in Parallelogramme Ab, Bc, Cd &c. eingeschlossen seyn, deren an der Zahl so viele sind, als viele Seiten die Grundfläche ABCDE hat. Diese Parallelogramme heißen die **Seiten** des Cörpers. Der dergestalt beschriebene Cörper selbst aber wird ein **Prisma** genennet.

§. 12. Wir haben die Beschreibung dieses ersten Cörpers deswegen etwas weitläuftig gemachet, damit zugleich klar werden möge, daß derselbe möglich sey, welches nicht bey einer jeden Beschreibung so leicht einzusehen ist, sondern öfters erst muß erwiesen werden. Nunmehro können wir ein Prisma kürzer beschreiben, indem wir sagen, ein Prisma sey ein Cörper, welcher von zwo ebenen und geradelinichten Figuren, die einander parallel liegen, ABCDE, abcde, und von Parallelogrammen, beschlossen wird.

Denn

Denn daß das übrige alles aus diesen Gründen fließe, ist aus der weitläuftigeren Beschreibung leicht einzusehen.

§. 13. Da das Punct a, durch welches man die Fläche abcde geleget hat, nach Belieben angenommen worden ist, XI, 10. so folget, daß, wenn man anderswo in der Linie AF ein Punct genommen, und durch dasselbe eine Fläche so geleget hätte, wie abcde durch a geleget worden ist; die Figur dieser Fläche ebenfals der ABCDE gleich und ähnlich geworden wäre. Es hindert nichts, daß dieses nicht auch nunmehro geschehen könte, nachdem man, vermittelst der abcde, das Prisma geschlossen hat. Es wird aber durch eine dergleichen Fläche, wenn sie durch ein Punct zwischen A und a durchgehet, das Prisma geschnitten: und man muß demnach schließen, daß, wenn man ein Prisma dergestalt schneidet, daß der Schnitt der Grundfläche ABCDE parallel wird, dieser Schnitt auch der Grundfläche gleich und ähnlich seyn werde.

§. 14. Die Linien Aa, Bb, Cc, Dd, Ee sind einander alle gleich, weil die Seiten des Prisma Parallelogramme sind; und also Aa = Bb = Cc und so fort, aber die Winkel der Parallelogrammen Ab, Bc, Cd sind einander nicht nothwendig gleich, und zwar sind diese Parallelogramme niemals alle gleichwinklicht, wenn die Linien Aa, Bb, Cc auf der Grundfläche AD schiefstehen, wie man leicht siehet. Stehet aber Aa auf der Grundfläche AD perpendicular, so stehen auch alle übrige dergleichen Linien Bb, Cc, Dd, Ee auf den Grundflächen AD, ad perpendicular, weil sie einander parallel sind, X, 48. und der Winkel aAB ist gerade, wie auch die Winkel bBC, cCD und so fort. Demnach sind in diesem Falle die Vierecke Ab, Bc, Cd alle geradewinklicht, IV, 205. und haben noch darzu einerley Höhe. Ein dergleichen Prisma in welchem Aa auf der Fläche AD gerade stehet, wird ein **gerades Prisma** genant, die übrigen alle sind schief und heißen **schiefe Prismen**. Die 297 Zeichnung stellet ein gerades, und die 296 ein schiefes Prisma vor.

§. 15. Dieses ist die erste Eintheilung dieser Cörper in gerade und schiefe. Eine andere Eintheilung gründet sich auf die Zahl der Seiten der Grundfläche, welche allezeit mit der Zahl der Seiten des Prisma einerley ist. Man nennet aus dieser Betrachtung die Prismata dreyseitig, vierseitig, vielseitig. Die Bedeutung ist selbst aus dem Namen klar.

§. 16. In einem Prisma von vier Seiten können die Grundflächen Parallelogramme seyn. Da nun die Seiten eines jeden Prisma ebenfals Parallelogramme sind, so ist ein dergleichen Cörper in sechs Parallelogramme eingeschlossen. Denn der Seiten sind viere; und die zwo Grundflä-

chen dazu geben sechs Parallelogramme. Ein Prisma von dieser Art heißet ein **Parallelepipedum**. Es kan dasselbe gerade oder schief seyn wie ein jedes anderes Prisma. Die 298 Zeichnung stellet ein gerades Parallelepipedum vor, denn mit dem schiefen werden wir nichts zu schaffen haben.

§. 17. In einem jeden Parallelepipedum sind jede zwo Seiten, die einander entgegen gesetzt sind, einander gleich und parallel. Dieses ist von den Grundflächen ABCD, EFGH nicht nöthig zu erweisen, weil es in dem Begriffe eines jeden Prisma liegt. Daß aber auch die Seite ABFE der Seite DCGH gleich und parallel sey, schließet man folgendergestalt: AC ist ein Parallelogrammum, folgends ist AB der DC gleich und parallel. Nun ist auch AE der DH gleich und parallel, denn dieses ist von einem jeden Prisma richtig. Also ist der Winkel BAE dem Winkel CDH gleich, X, 27. und folgends das Parallelogrammum BE gleich dem Parallelogrammum CH, weil in denselben die gleichen Winkel BAE, CDH von gleichen Seiten eingeschlossen werden. Ueber dieses sind die Flächen, in welchen diese Seiten BE, CH liegen, einander auch parallel, weil die eine durch die zwo geraden Linien AB, AE gehet, die in A zusammen stoßen, und den geraden Linien DC, DH parallel sind, die in der Fläche CH liegen, X, 55. Ist nun AC ein rechtwinklichtes Viereck und der Cörper EC gerade, so sind alle Parallelogramme, welche ihn einschließen geradewinklicht. Denn die Seiten eines jeden geraden Prisma sind rechtwinklichte Vierecke, XI, 14.

§. 18. Man kan also bey einem jeden Parallelepipedum diejenigen einander entgegen gesetzten Seiten als die Grundflächen betrachten, welche man dazu annehmen wil, und hernach diesen Cörper als ein Prisma ansehen; welches bey einem Prisma von einer andern Art nicht angehet. Denn wenn man die Vierecke AH und BG vor die Grundflächen annimmet, so sind dieselben gleich und ähnlich, und der Cörper AG ist übrigens in die Parallelogramme AF, EG, HC, AC eingeschlossen. Dieses aber sind die allgemeinen Kennzeichen eines jeden Prisma, XI, 12. Und sind die sechs Seiten des Parallelepipedum geradewinklicht, so ist dasselbe allezeit ein gerades Prisma, man mag unter den sechs Seiten desselben vor die Grundflächen annehmen, welche man wil.

[*Fig.* 299.] §. 19. Ist nun in einem solchen geraden Parallelepipedum, als wir eben beschrieben haben, die Grundfläche AB nicht allein ein geradewinklichtes Viereck, sondern auch ein Quadrat, und ist über dieses die Seite BC der Seite des Quadrats AD gleich, so wird es in sechs gleiche Quadrate eingeschlossen. Denn da bey einem jeden Prisma die zwo

Grund-

Grundflächen einander gleich und ähnlich sind, so muß auch hier die der AB entgegen gesetzte Grundfläche ein der AB gleiches Quadrat seyn. Und daß die Seiten, welche den Cörper rings herum einschließen bey der gesetzten Bedingung, daß BC so groß sey als BD=AD, nicht nur gradewinklichte Vierecke, sondern auch Quadrate und einander gleich sind; siehet man bloß aus der Figur gar leicht. Ein solcher Cörper heißet ein **Würfel** oder ein **Cubus**. Und diese sind die Arten der Prismen, welche mit besondern Namen beleget werden.

[*Fig.* 300. 301.] §. 20. Es sind aber dieses die Cörper noch nicht alle, welche unter die erste Classe derjenigen, die wir uns zu betrachten vorgesetzt haben, gehören. Man stelle sich zween Cirkel vor, AB und CD, die einander gleich sind, und parallel liegen: ihre Mittelpuncte sind E und F. Man ziehe diese Mittelpuncte vermittelst der geraden Linie EF zusammen, und stelle sich vor, daß an dem Umkreise der Cirkel AB, CD eine gekrümmete Oberfläche rings herum dergestalt anliege, daß, wenn man durch ein Punct derselben, wo man dieses annehmen wil, als A, eine gerade Linie AC, der EF parallel ziehet, dieselbe ganz in die gekrümmete Oberfläche ABDC falle, so hat man den Begrif einer **Walze** oder eines **Cylinders** ABDC. Dieses ist der Cörper welchen wir noch mit dem Prisma unter eine Classe bringen müssen.

§. 21. Denn es kommet der Cylinder mit dem Prisma in allen Stücken überein, außer daß bey dem Prisma die Grundflächen eine geradelinichte Figur, und bey dem Cylinder ein Cirkel ist. Die einander entgegen gesetzte Grundflächen sind auch hier gleich. Es kan aber auch hier eine Linie AC, welche der EF parallel laufet, gerade oder schief auf den Grundflächen AB, CD stehen, weil man die Cirkel AB, CD, übrigens legen kan, wie man wil, wenn nur ihre Flächen einander parallel bleiben. Es kan also ein Cylinder ebenfals gerade oder schief seyn. Er ist schief, wenn EF auf den Grundflächen AB, CD schief stehet, wie in der 300 Zeichnung, und gerade, wenn diese EF, auf die Grundfläche perpendicular ist, wie in der 301. Und endlich sind alle gerade Linien, die wie AC, DB zwischen den Grundflächen der Cylinder der EF parallel gezogen werden, hier ebenfals gleich, weil diese Gleichheit bloß daraus folget, daß die Grundflächen AB, CD einander parallel liegen, X, 58. Man pfleget die gerade Linie EF, welche zwischen den Mittelpuncten der Grundcirkel AB, CD lieget, die **Axe des Cylinders** zu nennen.

[*Fig.* 302.] §. 22. Daß aber auch ein Cylinder von einer jeden Fläche, welche der Grundfläche desselben parallel lieget, dergestalt geschnit-

ten werde, daß die Figur, die durch den Schnitt hervor gebracht wird, der Grundfläche gleich und ähnlich wird, wie dieses ebenfals von dem Prisma gezeiget worden ist, XI, 13. siehet man nachfolgendergestalt. Gesetzt, der Cylinder AD sey vermittelst einer der AB parallel laufenden Fläche geschnitten, und der Schnitt sey GH, so ist zu erweisen, daß GH ein Cirkel, und dem AB gleich sey. Man nehme in dem Umkreise des Cirkels AB das Punct I nach Belieben, und ziehe den Halbmesser EI; durch I ziehe man eine gerade Linie IK der EF parallel, welche ganz in der gekrümmeten Oberfläche des Cylinders liegen wird: XI, 20. folgends gehet diese Linie durch K in den Umkr is des Cirkels CD, und FK ist ein Radius dieses Cirkels CD. Das Viereck EK aber ist ein Parallelogrammum, weil die einander entgegen gesetzten Seiten desselben parallel sind, und dieses Parallelogrammum schneidet die Ebene GH nach einer geraden Linie, welche mit LM bezeichnet ist. Das Punct M dieser LM lieget in dem Umkreise des Schnittes GH, wel es in der geraden Linie IK lieget, die ganz in die gekrümmete Oberfläche des Cylinders fällt; und L lieget in der Axe EF. Es ist aber LM der EI parallel, weil die Flächen GH und AB parallel sind, welche beyde von der Fläche EK geschnitten werden, X, 57. und weil EK ein Parallelogrammum ist, so ist auch LM dem Radius EI des Cirkels AB gleich. Das Punct L bleibet beständig einerley, man mag das Punct I in dem Umkreise AB genommen haben, wo man wil, weil dadurch EF nicht verändert wird. Nachdem man aber I da oder dort in dem Umkreise AB annimmet, fället auch M in ein anderes Punct des Umkreises GH; aber beständig ist eine jede LM so groß, als der Radius des Cirkels AB. Also sind alle Puncte des Umkreises des Schnittes GH von dem Puncte L gleich weit entfernet: dieser Schnitt GH ist demnach ein Cirkel, und weil sein Radius LM der EI gleich ist, so ist auch dieser Cirkel GH dem AB gleich.

§. 23. Wegen diesen gemeinschaftlichen Eigenschaften nun bringen wir alle bisher erklärete Cörper unter eine Classe, und wir werden sie, die Weitläuftigkeit desto mehr zu vermeiden, künftighin **Cörper der ersten Art** nennen, und also unter den Cörpern der ersten Art alle Arten der Prismen und der Cylinder begreifen. Es haben diese Cörper eine große Gemeinschaft mit den Parallelogrammen, und die meisten Sätze, welche bey der Vergleichung der Parallelogrammen gewiesen worden, sind von demselben richtig, wie wir gleich sehen werden.

§. 24. Die Höhe eines Cörpers von dieser ersten Art ist die Entfernung der einander entgegen gesetzten Grundflächen desselben: das ist, die gerade Linie zwischen diesen Grundflächen, welche auf demselben perpendi-

cular

cular stehet. Man siehet leicht, daß nichts daran gelegen sey, wo man diese Perpendicularlinie ziehe, weil alle gerade Linien, die zwischen Parallelflächen liegen, und auf eine derselben perpendicular stehen, einander gleich sind, X. 58. Es ist auch dieses hier eben so wie bey dem Parallelogram; nur hat man hier Grundflächen, und bey den Parallelogrammen Grundlinien.

Wie ein Cörper der ersten Art mit einem andern solchen Cörper verglichen wird.

[*Fig.* 303.] §. 25. Wenn nun zween Cörper der *ersten Art AB* und CD gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben; so sind sie einander gleich, sie mögen im übrigen beschaffen seyn wie sie wollen. Denn weil die Cörper einerley Höhe haben, so kan man sie beyde zwischen zwo Parallelflächen dergestalt setzen, daß die Grundflächen der Cörper in diese Flächen fallen. Wir setzen, es sey dieses geschehen, und die Parallelflächen seyn AE, FG. Man schneide nunmehro die Cörper beyde vermittelst der Ebene HI, welche den vorigen AE, FG ebenfals parallel ist, wo man will. Wenn nun dadurch die Schnitte HK, LM zum Vorschein kommen, so ist HK der Grundfläche FB, und LM der ND gleich, XI, 13. da nun diese Grundflächen FB, ND einander gleich sind, so sind auch die Schnitte HK, LM gleich. Dieses aber, daß dergleichen Schnitte, als HK, LM sind, einander beständig gleich fallen, war das Kennzeichen, aus welchem auf die Gleichheit der Cörper beständig geschlossen werden kan, XI, 7. Man wird derohalben in dem gegenwärtigen Falle eben den Schluß machen, und sagen müssen, die Cörper der ersten Art AB, CD, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind einander gleich.

§. 26. Man siehet auch leicht ein, daß die Theile AK und CM, wie auch HB und LD, in welche die Cörper AB, CD vermittelst der Ebene HI zerschnitten worden, einander gleich sind. Denn sie haben ebenfals gleiche Grundflächen und gleiche Höhen. Uebrigens werden wir unsere Beweise von dieser Art Cörper künftig nur auf diejenigen besondern Arten derselben einschränken können, welche man sich am leichtesten vorstellen kan, nemlich auf die geraden Prismen und Cylinder, und die Beweise werden doch von allen Cörpern dieser Art, welche eben so große Grundflächen und Höhen haben, richtig seyn, so lange wir bey den Cörpern nichts als ihre Größe betrachten werden. Denn man kan an die Stelle eines jeden Cörpers von dieser Art einen andern setzen, welcher eine eben so große Grundfläche und

Höhe hat als jener, ohne daß dadurch in der körperlichen Größe etwas verändert werde.

[Fig. 304.] §. 27. Wenn zween Cörper der ersten Art AB und CD gleiche Grundflächen haben, so verhalten sie sich wie ihre Höhen, das ist, wenn AE die Höhe des Cörpers AB ist, und CF ist die Höhe des Cörpers CD, so ist AB:CD=AE:CF. Denn, nachdem man die beyden Cörper auf eine Ebene ED gesetzet hat, so führe man die Oberfläche des kleinern AG fort, und schneide dadurch den größern Cörper in HI. Weil nun die Cörper AB und HD gleiche Grundflächen und gleiche Höhe haben, so sind sie einander gleich, und man kan an statt des AB den Cörper HD nehmen, gleichwie man an statt der Höhe AE die Höhe HF nennen kan. Nun theile man die Höhe CF in eine beliebige Zahl gleicher Theile, und stelle sich vor, daß durch alle Theilungspuncte der Linie CF ebene Flächen der FD parallel geleget seyn, welche folgends auch der HI parallel seyn werden: so wird dadurch der Cörper CD in eine Zahl gleicher Theile zerschnitten, welche so groß ist als die Zahl der gleichen Theile in der geraden Linie CF. Auch liegen immer zwischen H und F so viele Theilungspuncte als viele theilende Flächen zwischen HI und FD liegen, man mag dergleichen Theilchen in der CF so viele gemacht haben als man will, und es mag eines der Puncte, durch welche CF dergestalt getheilet wird, in die Fläche AI fallen oder nicht.

§. 28. Wir sind also wieder an dem allgemeinen Kennzeichen der Proportion, VI, 73. welches wir bereits zu verschiedenen malen angewendet haben. Denn wenn man die Zahl der gleichen Theilchen in der Höhe CF sich unter m vorstellet, und nennet eine jede andere Zahl solcher Theile n, so ist $\frac{1}{m}$CF eines der Theilchen, in welche man die CF getheilet hat, und $\frac{1}{m}$CD ist eines der Theilchen, in welche der Cörper CD zerschnitten worden ist; $\frac{n}{m}$CF aber bedeutet eine jede Zahl der Theile der CF, und $\frac{n}{m}$CD bedeutet eben die Zahl der Theile des Cörpers CD. Bey der Theilung, welche die Figur vorstellet, ist $m=6$, und $\frac{n}{m}$ kan $\frac{1}{6}$ oder $\frac{2}{6}$ oder $\frac{3}{6}$, und so fort, bedeuten. Nun siehet man aus der Figur und demjenigen, so bereits gesagt worden ist, daß bey einer jeden Bedeutung, die man dem m und n geben kan, wenn $\frac{n}{m}$CF größer ist als HF, auch $\frac{n}{m}$CD größer seyn werde als HD: und wenn $\frac{n}{m}$CF der HF gleich ist, auch $\frac{n}{m}$CD dem HD gleich seyn werde: wie auch, daß, wenn $\frac{n}{m}$CF kleiner ist als HF, zugleich $\frac{n}{m}$CD kleiner seyn

werde

w rde als HD. Folgends verhält sich allerdings wie HF zur CF, so der Cörper HD zu dem Cörper CD. Oder, wenn man gleiches vor gleiches setzet, so hat man AE:CF=AB:CD, und umgekehret CF:AE=CD:AB, welches zu erweisen war.

§. 29. Ein Leser, welcher sich das bisher abgehandelte wohl bekant gemacht, und sich dadurch an dergleichen Schlüsse gewöhnet hat; wird ohnfehlbar dieses in einem Blicke übersehen, zumalen der Satz selbst fast von Natur bekant ist. Wenn die Grundflächen der beyden Cörper AB und CD nicht allein gleich, sondern auch ähnlich sind, und die Cörper AB und CD sind gerade; die Höhe aber des Cörpers CD ist zwey, drey, viermal so groß als die Höhe des Cörpers AB; so ist leicht einzusehen, daß auch der Cörper CD zwey, drey, viermal so groß seyn werde als der Cörper AB; und daß in diesem Falle überhaupt AE zur CF sich verhalten werde, wie sich der Cörper AB zu dem Cörper CD verhält. Dieses ist auch den Handwerkern bekant, und niemand zweifelt, ob, wenn man von einem Balken, der als ein Prisma angesehen werden kan, ein Prismatisches Stück abschneidet, dessen Länge $\frac{3}{5}$ der Länge des ganzen Balkens beträgt, auch dieses abgeschnittene Stück $\frac{3}{5}$ des ganzen Balkens, dem cörperlichen Inhalte nach, betragen werde. Daß aber eben dieses richtig sey, wenn die Cörper der ersten Art, welche wir betrachten, schief, und ihre Grundflächen nicht ähnlich sind, siehet man daraus, weil weder die Schiefe noch die Figur der Grundflächen in der Größe der Cörper etwas ändert, wenn nur die Größe ihrer Höhen und ihrer Grundflächen beybehalten wird, XI, 25.

§. 30. Man kan auch hier auf die Erzeugung der Cörper HD und CD zurücke gehen, und aus derselben die Proportion schließen, die wir herausgebracht haben. Denn gesetzt, es bewege sich die Fläche FD dergestalt aufwärts, daß, indem das Punct F in der geraden Linie FC fortgehet; die Seiten der Figur FD, nachdem diese in HI gekommen ist, und sonst überall, den Seiten der FD parallel bleiben: so werden die Cörper HD, CD, und ihre Höhen FH, FC durch ein gleichförmiges Wachsthum erzeuget, weil, indem die Höhen um gleiche Theile anwachsen, auch nothwendig denen Cörpern gleiche Theile zugesetzt werden, man mag sich diese Theile so groß oder so klein vorstellen als man will. Und durch dieses Wachsthum entstehet die Linie HF mit dem Cörper HD, und die Linie CF mit dem Cörper CD zugleich. Es entstehen aber auch HD und HF, wie auch CD und CF zugleich. Also verhält sich allerdings HF zur CF, wie sich HD zu CD verhält, VI, 78.

[*Fig.* 305.] §. 31. Hieraus aber ist nun ohne Weitläuftigkeit zu schlie-

schließen, daß jede zween Cörper der ersten Art, welche gleiche Höhen haben, sich gegen einander, wie ihre Grundflächen verhalten werden, und daß folgends, wenn man zween Cörper dieser Art hat, von was Beschaffenheit sie im übrigen seyn mögen ABC, DEF, welche gleiche Höhen haben, aber verschiedene Grundflächen AB, DE, man nur diese Grundflächen nach der Regel, welche wir zur Vergleichung der geradelinichten Figuren IX. angegeben haben, mit einander vergleichen dürfe, wenn man die Cörper ABC, DEF mit einander vergleichen will. Denn wie sich AB zu der DE verhält, so verhält sich auch der Cörper ABC zum DEF.

[*Fig.* 305. 306.] §. 32. Dieses einzusehen, verwandele man AB in ein geradewinklichtes Viereck ab, und der Figur DE mache man ein anders geradewinklichtes Viereck de gleich, welches mit dem vorigen ab einerley Höhe habe, so, daß diese Vierecke ab und de beyde zwischen die Parallellinien ae, GH können gesetzet werden. Es ist IX, 60. gewiesen worden, wie dieses zu thun sey. Hier aber ist es genug, daß man sich diese Verwandelung in Gedanken vorstelle, nachdem man eingesehen hat, daß sie möglich sey. Man setze auf ab das gerade Parallelepipedum abc, dessen Höhe bc der Höhe BC gleich sey, und auf de setze man das gerade Parallelepipedum def, von eben der Höhe. Weil nun ab = AB und bc = BC, so sind auch die Cörper abc, ABC einander gleich, XI. 25. Und weil de = DE, und über dieses die Cörper def, DEF gleiche Höhen haben, so hat es mit diesen Cörpern eben die Bewantniß.

§. 33. Nun siehet man ferner leicht, daß die geradewinklichten Vierecke bI, Hf einander gleich sind; denn ihre Seiten sind gleich, wie ohne Weitläuftigkeit aus dem so gesaget worden ist folget. Und wenn man also diese Vierecke bI, Hf als die Grundflächen der Cörper abc, def ansiehet, so haben diese Cörper gleiche Grundflächen, und ihre Höhen sind Gb, dH. Demnach ist nach dem Satze XI, 28. welchen wir eben bewiesen haben abc: def = Gb: dH. Diese gerade Linien Gb, dH aber sind die Grundlinien der geradewinklichten Vierecke ab, de, welche zwischen den Parallelen ac, GH stehen, und also gleiche Höhen haben. Diese Vierecke verhalten sich wie ihre Grundlinien, und die Verhältniß Gb: dH ist der Verhältniß ab: de gleich, IX, 40. Man kan also diese vor jene in der bereits bemerkten Proportion abc: def = Gb: dH, setzen; wodurch diese Proportion in die nachstehende verwandelt wird: abc: def = ab: de. Nun schreibe man ABC anstatt abc; und an statt def setze man DEF; vor ab nehme man AB, und vor de die DE; denn wir haben gezeiget, daß diese Größen gleich seyn: so wird durch diese Verwechselung in der Proportion nichts geändert. Es

kom-

kommet aber dadurch die Proportion ABC : DEF = AB : DE, deren Richtigkeit wir erweisen solten.

§. 34. Also wissen wir nunmehro, wie die Cörper der ersten Art zu vergleichen seyn, wenn sie gleiche Grundflächen haben, wir wissen auch, wie man verfahren müsse, wenn ihre Höhen einander gleich sind. Wie ist es aber, wenn sowohl die Grundflächen als auch die Höhen solcher Cörper ungleich sind, und auf was Art hat man in dem Falle bey der Vergleichung der Cörper zu verfahren? Wem die Beweise, die wir von denen Parallelogrammen gegeben haben, noch im Gedächtniß schweben, der siehet sogleich, daß sich dieselben auch hier anwenden lassen, und man kan daraus ohne Weitläuftigkeit schließen, daß bey der Vergleichung zweyer Cörper der ersten Art, man, wie bey der Vergleichung der Parallelogrammen, verfahren, und sowohl auf die Verhältniß der Grundflächen, als auch auf die Verhältniß der Höhen, werde Acht haben müssen, weil durch die Zusammensetzung dieser zwo Verhältnisse die Verhältniß der Cörper heraus gebracht wird.

[*Fig.* 307.] §. 35. Es seyn die zween Cörper der ersten Art ABC, abc mit einander zu vergleichen. Die Grundfläche des ersten sey AB und seine Höhe BC, die Grundfläche aber des zweyten sey ab und die Höhe desselben bc. Man stelle sich den dritten Cörper von eben der Art vor DEF, dessen Grundfläche DE so groß sey, als die Grundfläche des zweyten ab, und dessen Höhe EF der Höhe des ersten Cörpers BC gleich sey. Weil nun die Cörper ABC und DEF gleiche Höhen, und die Cörper DEF, abc gleiche Grundflächen haben, so sind die nachstehende zwo Proportionen richtig,

ABC : DEF = AB : DE = AB : ab, XI, 31.

DEF : abc = EF : bc = BC : bc, XI, 27.

woraus man siehet, daß die Verhältniß der Cörper ABC : abc aus den zwo Verhältnissen AB : ab und BC : bc zusammen gesetzt sey, deren erstere die Verhältniß der Grundflächen dieser Cörper ist, und die zwote die Verhältniß ihrer Höhen.

§. 36. Wenn man also die Grundfläche des ersten Cörpers ABC sich unter B vorstellet, und die Grundfläche des zweyten abc unter b, die Höhe aber des ersteren unter A, und die Höhe des zweyten unter a; den ersteren Cörper ABC aber selbst C nennet, und c den zweyten abc bedeuten lässet; so kan man den gegenwärtigen Satz, daß nemlich die Verhältniß C : c aus den zwo Verhältnissen B : b und A : a zusammen gesetzt sey, folgendergestalt kurz ausdrücken: C : c = B × A : b × a.

§. 37. Man siehet hieraus sogleich, daß, wenn bey zween Cörpern

der ersten Art sich die Grundflächen verhalten, wie die Höhen verkehrt gesetzt, das ist, wenn $B:b=a:A$, diese Cörper gleich seyn müssen. Denn in diesem Falle sind die Glieder der Verhältniß, welche aus den zwo Verhältnissen $B:b$ und $A:a$ zusammen gesetzt wird, einander nothwendig gleich, das ist, es ist bey der gesetzten Bedingung $A\times B=a\times b$, VIII, 46. Also können auch in der Proportion $C:c=A\times B:a\times b$ die ersten Glieder C, c keine verschiedene Größen haben. Wäre dieses, so könte bey der Gleichheit der letzteren Glieder die Proportion ohnmöglich bestehen.

§. 38. Und wenn Cörper von dieser ersten Art einander gleich sind, so kan man auch umgekehret schließen, daß ihre Grundflächen sich verhalten werden wie ihre Höhen, wenn man diese verkehrt setzet: oder, daß die Grundfläche des ersteren Cörpers sich zu der Grundfläche des zweyten verhalten werde, wie sich die Höhe des zweyten zu der Höhe des ersten verhält. Denn wenn in der allgemeinen Proportion $C:c=B\times A:b\times a$, die ersten zwey Glieder, welche die Cörper bedeuten, gleich sind $C=c$, so müssen auch die zwey letztern Glieder gleich seyn $B\times A=b\times a$ Die Verhältniß $B\times A:b\times a$ aber ist aus den zwoen $B:b$ und $A:a$ zusammen gesetzet, und wenn die Glieder einer Verhältniß, die aus zwo andern zusammen gesetzet ist, einander gleich sind, so sind allezeit die Verhältnisse gleich, welche man zusammen gesetzt hat, wenn man nur die Glieder der einen dieser Verhältnisse versetzet, VIII, 48. Folgends ist hier $B:b=a:A$. Oder wenn man sich diesen Satz unter den Zeichen vorgestellet, die wir hier gebrauchen, so kan man nur kurz sagen, wenn $B\times A=b\times a$, so ist allezeit $B:b=a:A$, und diese ist die Proportion, welche erwiesen werden solte.

Einige besondere Sätze zur Vergleichung der Cörper der ersten Art.

[*Fig.* 308.] §. 39. Sind die Cörper, welche man mit einander vergleichet, beide geradewinklichte Parallelepipeda: so bleibet die allgemeine Proportion $C:c=B\times A:b\times a$. Es ist aber hier die Verhältniß $B:b$, das ist, $AC:ac$ aus den zwo Verhältnissen $AB:ab$ und $BC:bc$ zusammen gesetzet, und also $B:b=AB\times BC:ab\times bc$. Denn dieses ist überhaupt von allen geradewinklichten Vierecken richtig, IX, 47. Wenn man nun auch die Verhältniß $A:a$ durch die Buchstaben der Figur ausdrücket, und also in der Verhältniß $B\times A:b\times a$ vor $B:b$ schreibet $AB\times BC:ab\times bc$, und vor $A:a$ setzet $CD:cd$, so wird $C:c=AB\times BC\times CD:ab\times bc\times cd$; woraus man

man siehet, daß die Verhältniß zweyer geradewinklichten Parallelepipeden ABCD : abcd aus der Verhältniß ihrer Längen AB : ab, ihrer Breiten BC : bc und ihrer Tiefen CD : cd zusammen gesetzet sey. Wer diese drey Verhältnisse übersiehet, übersiehet auch die Verhältniß des Cörpers ABCD zu dem Cörper abcd.

[*Fig.* 309.] §. 40. Alle Würfel stehen mit unter den Cörpern, von welchen wir gegenwärtig reden: also ist die Verhältniß jeder zween Würfel aus der Verhältniß ihrer Längen, ihrer Breiten und ihrer Tiefen zusammen gesetzet. Allein bey den Würfeln sind diese Verhältnisse nicht verschieden. Denn weil AB = BC = CD, und ab = bc = cd, so ist auch die Verhältniß AB : ab der Verhältniß BC : bc, wie auch der Verhältniß CD : cd gleich. Und wenn man AB oder BC oder CD die Seite des Würfels nennet, und mit L bezeichnet, und ab = bc = cd mit l, so kan die Verhältniß L : l an statt einer jeden der Verhältnisse gebrauchet werden, aus welchen die Verhältniß des Würfels ABCD zu dem Würfel abcd zusammen gesetzet ist. Daraus siehet man, daß die Verhältniß ABCD : abcd aus der Verhältniß der Seiten L : l, dreymal gesetzet, bestehe, oder daß ABCD : abcd = L×L×L : l×l×l. Es ist also die Verhältniß der Würfel dreymal so hoch, als die Verhältniß ihrer Seiten.

[*F.* 310.] §. 41. Noch müssen wir einen anderen Umstand bey den Grundflächen der Cörper der ersten Art in Betrachtung ziehen, wenn nemlich diese ähnlich sind. Auch dieses kan dasjenige, so im allgemeinen Verstande erwiesen worden ist, nicht aufheben, sondern, wenn noch C den Cörper ABCD, B seine Grundfläche ABC, A aber dessen Höhe CD bedeutet; und c, b, a in Ansehung des Cörpers abcd eben die Bedeutung haben, so ist auch hier C : c = B×A : b×a. Da aber hier die Grundflächen AC, ac einander ähnlich seyn, so kan man die Verhältniß derselben B : b leichter als sonst finden. Gesetzt nemlich, AB, ab sind solche Seiten der Grundflächen, welche in Ansehung der gleichen Winkel auf einerley Art liegen, so ist die Verhältniß dieser Grundflächen zweymal so hoch, als die Verhältniß AB : ab, oder die Verhältniß B : b ist der Verhältniß des Quadrats aus AB zu dem Quadrate aus ab gleich, IX, 80. Und wenn man demnach, wie auch sonst geschehen ist, diese Quadrate durch AB^q, ab^q anzeiget, so kan man an die Stelle der Verhältniß B : b die Verhältniß $AB^q : ab^q$ setzen. Dadurch wird $C : c = AB^q \times A : ab^q \times a$; woraus man siehet, daß, wenn zween Cörper der ersten Art ähnliche Grundflächen haben, ihre Verhältniß aus der Verhältniß der Quadrate solcher Linien, welche in ihren Grund-

flächen auf einerley Art liegen, und aus der Verhältniß ihrer Höhen, zusammen gesetzet sey.

[*Fig.* 311.] §. 42. Unter diesem Satze stehen alle Cylinder, sie mögen gerade oder schief seyn. Denn da die Grundflächen dieser Cörper Cirkel sind, so sind sie nothwendig einander ähnlich. Vor die geraden Linien aber, welche in den Grundflächen auf einerley Art zu ziehen sind, kan man hier die Durchmesser oder die Halbmesser nehmen, IX, 82. Es ist also die Verhältniß der Walze ABC zu der Walze abc, deren Grundcirkel die Durchmesser AB, ab haben, und deren Höhen sind BC, bc, aus den Verhältnissen AB^q:ab^q und BC:bc zusammen gesetzt. Die Walzen sind gleich, wenn die gedachten Quadrate sich umgekehret wie die Höhen verhalten, XI, 37. oder wenn die Proportion AB^q:ab^q = bc:BC richtig ist; und wenn die Walzen einander gleich sind, so ist diese Proportion richtig, XI, 38.

[*Fig.* 312.] §. 43. Wenn nun außer dem, daß die Grundflächen einander ähnlich sind, sich auch die Höhen der Cörper verhalten wie solche Linien, welche in den Grundflächen zwischen gleichen Winkeln, oder sonst auf einerley Art, liegen; so ist die Verhältniß der Cörper aus der Verhältniß eben dieser Linien, oder aus der Verhältniß der Höhen, dreymal genommen zusammen gesetzt. Denn daß, wenn die Grundflächen ABC, abc einander ähnlich sind, die Verhältniß der Cörper der ersten Art, ABCD:abcd, aus der Verhältniß AB^q:ab^q, und aus der Verhältniß CD:cd zusammen gesetzt sey, wenn AB und ab in den Grundflächen auf einerley Art liegen, haben wir eben gesehen. Nun ist die Verhältniß AB^q:ab^q aus der Verhältniß AB:ab zweymal genommen zusammen gesetzt, und da wir hier setzen, daß die Verhältniß CD:cd der Verhältniß AB:ab gleich sey, so kan diese Verhältniß AB:ab an statt der vorigen CD:cd in der Zusammensetzung gebrauchet werden. Nimmet man nun dieses an, so siehet man, daß die Verhältniß der Cörper ABCD:abcd heraus gebracht werde, wenn man die Verhältniß AB:ab oder eine jede andere die ihr gleich ist, als CD:cd dreymal zusammen setzet. Es ist also bey diesem Umstand die Verhältniß der Cörper dreymal so hoch, als die Verhältniß AB:ab oder CD:cd.

[*Fig.* 313.] §. 44. So ist es bey allen Cylindern, deren Höhen sich wie die Durchmesser ihrer Grundflächen verhalten, zum Exempel bey solchen, deren Höhen eben so groß sind als die Durchmesser der Grundflächen, oder zwey, drey, viermal so groß, oder so groß als die halben Durchmesser, und so ferner. ABC und abc in der 313 Zeichnung stellen zween

dergleichen Cylinder vor. Die Verhältniß ABC: abc ist aus der Verhältniß AB: ab zweymal genommen, und aus der Verhältniß BC: bc zusammen gesetzt. Wenn nun die Verhältniß BC : bc der Verhältniß AB : ab gleich ist, und man also an die Stelle der einen die andern setzen kan, so siehet man leicht, daß eben die Verhältniß ABC: abc auch durch eine dreyfache Zusammensetzung der Verhältniß AB: ab entstehen könne.

§. 45. Wenn nun bey allen Bedingungen, welche von den Cörpern der 312 und 313 Zeichnung angenommen worden sind, man sich zween Würfel vorstellet, deren Seiten, den Seiten AB, ab dieser Cörper gleich sind; so ist sowol die Verhältniß der Cörper als auch die Verhältniß der Würfel dreymal so hoch als die Verhältniß AB: ab, und folgends die Verhältniß der Cörper der Verhältniß der Würfel gleich. Also müssen bey diesen Bedingungen (daß nemlich die Grundflächen zweyer Cörper der ersten Art einander ähnlich sind, und daß die Höhen derselben sich verhalten wie zwo gerade Linien, die in den beyden ähnlichen Grundflächen auf einerley Art liegen) diese Cörper sich allezeit wie die Würfel verhalten, deren Seiten die gedachte Linien sind, welche in den Grundflächen der Cörper auf einerley Art liegen. Man siehet leicht, daß man an die Stelle dieser Linien auch jede andere nehmen könne, welche eben die Verhältniß gegen einander haben.

[*Fig.* 314.] §. 46. Ich erachte dasjenige, so bishero von den Eigenschaften dieser Cörper gezeiget worden ist, vor hinlänglich. Es kommen wenige Aufgaben bey den Cörpern vor, welche in der Anwendung von sonderlichem Nutzen wären. Ich will also den Leser mit denselben nicht aufhalten, sondern nur eine einzige bey bringen, welche aus unserer Betrachtung unmittelbar fließet, wie man nemlich auf eine gegebene Grundfläche AB einen Cörper der ersten Art setzen könne, welcher einem gegebenen Cörper abc von eben dieser Art gleich sey. Dieses zu verrichten suche man erstlich IX, 50. zwo gerade Linien D, d, deren erstere D sich zu der zweyten d verhält, wie die Grundfläche AB zur Grundfläche ab, so kan man die Verhältniß D: d an statt der Verhältniß der Grundflächen AB: ab gebrauchen. Ist nun bc die Höhe des gegebenen Cörpers ac; so mache man VII, 13. D: d = bc: Q, diese Q ist die gesuchte Höhe des Cörpers, und wenn man DC der Q gleichnimt, und den Cörper ABC von dieser Höhe verfertiget, so wird derselbe allerdings dem Cörper abc gleich. Denn weil B: d = bc: BC, so verhalten sich die Grundflächen dieser Cörper wie ihre Höhen verkehrt gesetzt. Dieses kan hinlänglich seyn zu zeigen, wie in andern dergleichen Fällen zu verfahren sey, wenn dergleichen in der Ausübung vorkommen sol-

ten. Wir können uns also nunmehro zu den Cörpern der zweyten Art wenden.

Cörper der zweyten Art.

[*Fig.* 315.] §. 47. Man nehme eine Ebene und geradelinichte Figur von so viel Seiten als man will ABCDE, und außer der Ebene, in welcher diese Figur lieget, nehme man das Punct F nach Belieben. Man ziehe von F die geraden Linien FA, FB, FC und so weiter an alle Ecken der Figur, welche die Dreyecke FAB, FBC, FCD, und so weiter, einschließen werden. Der Cörper nun, welcher auf der erst gezeichneten Figur ABCDE stehet, und um und um von den Dreyecken eingeschlossen wird, die mit ihren Spitzen oben bey F zusammen stoßen, heißet eine Pyramide.

§. 48. Und zwar heißet die Figur ABCDE die Grundfläche der Pyramide, und die Dreyecke FAB, FBC, FCD und so fort, sind die Seiten derselben. Dieser Seiten der Pyramide sind allezeit an der Zahl so viele, als viele Seiten die Grundfläche hat, weil auf einer jeden Seite der Grundfläche eine Seite der Pyramide stehet. Es kan demnach eine Pyramide nicht weniger als drey Seiten haben, weil die Grundfläche derselben nicht weniger als drey Seiten haben kan, hingegen kan sie über drey Seiten deren so viele haben, als man will.

[*Fig.* 316.] §. 49. Wenn man eine Pyramide vermittelst einer Ebene schneidet, welche der Grundfläche ABCDE parallel laufet, so ist, wie bey den Cörpern der ersten Art, der Schnitt der Grundfläche ähnlich, aber kleiner als diese. Es sey abcde die Figur eines dergleichen Schnittes. Weil nun die Ebene, in welche er lieget, der Grundfläche ABCDE parallel lieget, und diese zwo ebene Flächen von dem Dreyecke FAB geschnitten werden, so ist auch ab der AB parallel, X, 57. Auf eben die Art schließet man, daß bc der BC, und cd der DC parallel liege und so rings herum. Da nun der Winkel, welchen zwo gerade Linien einschließen, dem Winkel, welcher zwischen zwo andern geraden Linien lieget, die der vorigen parallel sind, allezeit gleich ist, X, 27. so ist auch abc = ABC, und bcd = BCD, und so rings herum. Es sind aber auch jede zwo Seiten, die in der Figur abcde eben so liegen, wie zwo Seiten in der Figur ABCDE liegen, diesen Seiten proportional, und man hat zum Exempel ab : AB = bc : BC = cd : CD, und so wieder rings herum. Dieses schließen wir daraus, weil in dem Dreyecke FAB die ab mit AB parallel lieget, und in dem Dreyecke FBC die bc mit der BC. Aus dieser Ursache ist die Verhältniß ab : AB der Verhältniß Fb :

FB gleich, VII, 12. und diese wiederum der Verhältniß bc: BC. Demnach ist auch die erste Verhältniß ab: AB der letzten bc: BC gleich. Sind aber, wie erwiesen worden ist, die Winkel der Figur abcde den Winkeln der Figur ABCDE gleich, wie sie auf einander folgen, und sind die Seiten, welche in diesen Fiauren, die gleichen Winkel einschließen, proportional, so sind allerdings die Figuren einander ähnlich, VII, 1.

[*Fig.* 317. 318.] §. 50. Die Pyramide ist der erste der Cörper, welche wir in die zweyte Abtheilung bringen. Der andere ist der **Conus** oder der so genante **Kegel**. Diesen begreifet man folgendergestalt. An statt der eckichten Fiaur wird hier ein Cirkel ABC beschrieben, und außer der Ebene, in welcher er lieget, wird, wo man will, ein Punct D angenommen, sodann aber an das Punct D und an den Umkreis des Cirkels ABC eine Oberfläche DABCA dergestalt angeleget, daß die geraden Linien DA, DB, DC, welche man von D an den Umkreis ABC ziehen kan, alle in diese Oberfläche fallen. Der Cörper, welcher auf dem Cirkel ABC stehet, und rings herum von der gekrümmeten Oberfläche DABCA eingeschlossen wird, ist der Kegel.

§ 51. Ein jeder Kegel hat eine Axe, wie ein Cylinder. Diese ist die gerade Linie, welche von der Spitze desselben D nach dem Mittelpuncte E des Cirkels ABC gehet, der die Grundfläche des Kegels abgiebet. Diese Axe kan auf der Grundfläche gerade oder schief stehen. Stehet DE auf der Grundfläche ABC schief, wie in der 317 Zeichnung, so saget man, der Kegel sey schief. Stehet aber die Axe auf der Grundfläche ABC gerade oder perpendicular, wie in der 318 Zeichnung; so nennet man den Kegel einen **geraden Kegel**

§. 52. In einem geraden Kegel sind alle Linien, welche wie DA, DB, DC von dessen Spitze an dem Umkreis der Grundfläche ABC gezogen werden können, von einerley Länge. Dieses siehet man sogleich daraus, weil alle Puncte der Linie DE, welche durch den Mittelpunct des Cirkels ABC gehet, und auf dessen Fläche perpendicular ist, von den Puncten des Umkreises dieses Cirkels gleich weit entfernet sind, X, 39. Denn es ist D ein Punct der geraden Linie DE und DA, DB, DC sind dessen Entfernungen von dem Umkreise. Eine dergleichen Linie DA oder DB wird die **Seite** des geraden Kegels genant.

§. 53. Man siehet aus diesen Begriffen, daß der Kegel mit der Pyramide so weit in allen Stücken überein komt, außer daß bey der Pyramide die Grundfläche eckicht, und bey dem Kegel Cirkelrund ist. Es komt aber auch der Kegel mit der Pyramide darinnen überein, daß alle Schnitte, welche man in demselben mit der Grundfläche parallel machet, Cirkel, und fol-

folgends der Grundfläche ähnlich sind. Es ist nicht schwer auch dieses einzusehen. Man könte es unmittelbar aus demjenigen schließen, so bey den Pyramiden gezeiget worden ist; doch wird alles deutlicher, wenn wir den Beweis davon ins besondere geben.

[*Fig.* 319.] §. 54. Es sey die Figur des Schnittes des Kegels ABCD, welcher mit der Grundfläche ABC parallel gehet, abc. Es soll erwiesen werden, daß dieser ein Cirkel sey. Man ziehe die Axe des Kegels DE. Diese wird den Schnitt irgendwo durchstechen. Es sey dieses Punct e. Man ziehe auch von D eine gerade Linie nach einen beliebigen Punct des Umkreises der Grundfläche B. Diese DB wird ganz in der Oberfläche des Kegels zu liegen kommen, XI, 50. und demnach den Umkreis des Schnittes abc irgendwo schneiden. Es sey das Punct, in welchem dieses geschichet, b. Man ziehe EB, welche der Halbmesser der Grundfläche seyn wird. Weil nun die Fläche, in welcher das Dreyeck DEB lieget, die Ebene des Schnittes abc in eb, und die Grundfläche in EB, schneidet, und die Ebene abc der Grundfläche ABC parallel ist, so sind auch die Linien EB, eb parallel, X, 57. und man hat DE:De=EB:eb, VII, 12. Stellet man sich nun vor, daß man ein Punct wie B anderswo in dem Umkreise ABC angenommen habe, so kan diese Proportion von diesem Puncte auf eben die Art erwiesen werden, und wenn dieses andere Punct C ist, und man ziehet DC und EC, und bemerket die ec, in welcher die Fläche des Dreyeckes DEC die Ebene des Schnittes abc schneidet, so ist auch DE:De=EC:ec. Da nun in dieser und der vorigen Proportion die zwey erstern Glieder vollkommen einerley, und die dritten, als Halbmesser der Grundflächen ABC, gleich sind; so ist auch eb = ec: das ist, alle Puncte des Umkreises abc sind von dem Punete e gleich weit entfernet. Es ist demnach abc ein Cirkel, und e ist sein Mittelpunct.

§. 55. Diese spitzigen Cörper nun, die Pyramiden nemlich und die Kegel, nennen wir Cörper der zweyten Art. Ihre Höhe ist allezeit die gerade Linie, welche aus der Spitze derselben D gerade oder perpendicular auf die Grundfläche ABC fällt; denn diese Perpendicularlinie ist die Entfernung der Ebene, so der Grundfläche parallel lauft, zwischen welche und die Grundfläche der Cörper gesetzt werden kan, von dieser Grundfläche. Bey geraden Kegeln ist die Höhe der ganzen Länge der Axe gleich.

Wie

Wie die Cörper der zweyten Art mit einander verglichen werden.

§. 56. Die Sätze, welche zur Vergleichung der Cörper dieser Art dienen, sind mit denjenigen, welche wir vor die Cörper der ersten Art angegeben haben, einerley; gleichwie auch die Regeln von der Vergleichung der Dreyecke mit denjenigen überein kommen, vermittelst welcher man die Parallelogramme vergleichet. Und diese Regeln werden sich leicht zeigen lassen, wenn wir erstlich einen Umstand darthun, bey welchen die Cörper der zweyten Art einander gleich sind; sodann aber weisen, wie dieser Art Cörper mit den Cörpern der ersten Art zu vergleichen sind.

[F. 320.] §. 57. Es sind aber die Cörper der zweyten Art, wie die Cörper der ersten, einander gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben. Es seyn bey den zween Cörpern der zweyten Art ABCD, EFG, die Grundfläche BD gleich der Grundfläche FG, und die Cörper seyn von gleicher Höhe; so daß, wenn man sie beyde auf die Ebene BH setzet, ihre Spitzen A, E in die Ebene AE fallen, welche mit der Ebene BH parallel lieget. So kan erwiesen werden, daß, wenn man die beyden Cörper ABCD, EFG vermittelst einer dritten Fläche IK schneidet, welche den beyden vorigen BH, AE ebenfals parallel lieget: die Schnitte IL, MN einander gleich seyn werden, woraus denn die Gleichheit der Cörper, nach unserm Grundsatze, gar leicht folgen wird.

§. 58. Denn wenn einer dieser Cörper ein Kegel ist, so ziehe man seine Axe EO, und bemerke dadurch den Mittelpunct des Schnittes P. Man zeichne auch die Halbmesser FO, MP, in welchen die Ebene eines nach Belieben angenommenen Dreyeckes EFO die beyden Flächen FG und MN schneidet. Wir haben bereits gesehen, daß IL der BD und MN der FG ähnlich sey: folgends verhalten sich diese Figuren gegen einander, wie die Quadrate solcher geraden Linien, die in denselben auf einerley Art liegen, IX, 80. Und man hat demnach $IL:BD = IQ^q:BC^q$, und $MN:FG = MP^q:FO^q$. Nun aber ist $IQ:BC = AI:AB$, und $MP:FO = EM:EF$. Die letzteren Verhältnisse aber sind einander gleich, $AI:AB = EM:EF$, X, 60. Denn die zwo geraden Linien AB, EF liegen zwischen den Parallelflächen AE, BH, und werden von der dritten Fläche IK, welche den vorigen ebenfals parallel ist, in I und M geschnitten. Also sind die Verhältnisse IQ:BC und MP:FO, welche den gleichen Verhältnissen AI:AB und EM:EF gleich sind, ebenfals gleich, nemlich IQ:BC = MP:FO. Folgends

sind auch IX, 73. die Quadrate dieser Linien proportional, und man hat $IQ^q : BC^q = MP^q : FO^q$. Nimmet man dieses mit den zwo Portionen, die gleich Anfangs gewiesen worden sind, $IL : BD = IQ^q : BC^q$ und $MN : FG = MP^q : FO^q$ zusammen, so siehet man, daß die zwo erstern Verhältnisse dieser Proportionen IL : BD, und MN : FG gleichen Verhältnissen gleich sind, sie sind also einander auch selbst gleich, und man hat IL : BD = MN : FG, oder wenn man die mittleren Glieder verwechselt, VI, 117. IL : MN = BD : FG. Da nun also die Figur BD der Figur FG gleich ist, so muß auch die Figur IL der Figur MN gleich seyn, wie zu erweisen war.

§. 59. Da man nun also jede zween Cörper der andern Art, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, zwischen zwo Parallelflächen AB und BH setzen, und hernach wo man will, vermittelst einer dritten Fläche IK, welche den beyden vorigen parallel läuft, dergestalt schneiden kan, daß die Schnitte IL, MN, einander gleich werden: so haben diese Cörper das allgemeine Kennzeichen der Gleichheit der Cörper, XI, 7. und sind also einander wirklich gleich.

§. 60. Wir werden demnach wieder nur einen oder den andern Cörper dieser Art, an statt aller übrigen, brauchen können. Und dasjenige, so wir zum Exempel von einer dreyseitigen Pyramide, in Ansehung ihrer Größe, sogleich erweisen werden, wird von der Größe aller Cörper der zweyten Art richtig seyn, deren Grundfläche der Grundfläche der Pyramide, und deren Höhe der Höhe der Pyramide gleich ist. Denn man kan einen jeden Cörper der zweyten Art in eine solche Pyramide verwandeln. Doch wir wollen bey diesem Beweise etwas umständlicher verfahren. Der Satz, welcher zu erweisen ist, ist nachfolgender.

[*Fig.* 321. 322.] §. 61. Wenn ein Cörper der zweyten Art ABC eine Grundfläche BC hat, die so groß ist als die Grundfläche DE des Cörpers der ersten Art DF, und die Höhen dieser Cörper sind einander ebenfals gleich; so ist der Cörper der zweyten Art ABC der dritte Theil des Cörpers der ersten Art DEF, wie auch im übrigen die Figur dieser Cörper beschaffen seyn mag. Denn man mache IX, 22. ein Dreyeck GHI der Grundfläche DE gleich, und setze auf dasselbe den Cörper der ersten Art GHIKLM, dessen Höhe so groß sey, als EF oder die Höhe des Cörpers ABC. Wir stellen uns diesen Cörper als gerade vor, so, daß GK, LH und MI auf die Grundflächen GHI, KLM perpendicular fallen; und der Winkel GHI kan, wenn man wil, und wenn man darinne eine große Deutlichkeit zu finden vermeinet, ebenfals gerade angenommen werden. Uebrigens haben wir den Cörper dergestalt gezeichnet, als ob er auf einer

sei-

seiner Seiten läge, weil uns diese Zeichnung etwas deutlicher vorkommet als wenn man ihn aufrecht stellet. Dieser Cörper GHIKLM wird dem Cörper DEF gleich seyn. Man ziehe die Queerlinie KH und KI, in den Seiten desselben, GL, GM, welche mit der HI das Dreyeck KHI bilden werden, dessen Fläche von dem Cörper der ersten Art, den wir betrachten, die dreyseitige Pyramide KHGI abschneidet, welche mit dem Cörper GHIL einerley Grundfläche und einerley Höhe hat. Denn wenn man sich GHI, als die Grundfläche des Cörpers KGHI, vorstellet, so wird dieser Cörper um und um von den Dreyecken KGH, KHI, KIG eingeschlossen, deren Spitzen in K zusammen laufen. Es ist also dieser Cörper KGHI eine Pyramide, und die Höhe derselben ist die Linie KG, welche auf der Grundfläche GHI perpendicular stehet. Da nun eben diese KG auch die Höhe des Cörpers GHIL ist, so ist allerdings die Grundfläche GHI, und die Höhe GK der Pyramide KGHI mit der Grundfläche und der Höhe des Prisma GHIL, einerley.

§. 62. Das übrige Stück KHIML ist ebenfals eine Pyramide, deren Grundfläche das Parallelogrammum LHIM ist; welche wir aber nicht ins besondere zu betrachten haben. Wir ziehen vielmehr die Queerlinie dieses Viereckes HM, wodurch dasselbe in zwey gleiche Dreyecke LHM, HIM getheilet wird. Wenn man sich nun auch das Dreyeck KHM vorstellet, so siehet man, daß auf einem jeden der Dreyecke LHM, HIM eine Pyramide stehe, und daß die Spitzen dieser Pyramiden oben in K zusammen stoßen. Denn auf dem Dreyecke HIM stehet die Pyramide KHIM, deren Seiten die Dreyecke KHM, KHI, KIM abgeben, und auf dem Dreyecke LHM stehet die Pyramide KHLM, deren Seiten sind KHL, KHM und KLM. Diese zwo Pyramiden sind gleich, weil sie gleiche Grundflächen HIM und LHM haben, und, da sie mit ihren Spitzen in K zusammen stoßen, auch von gleicher Höhe sind, XI, 59. Es kan aber auch die letztere dieser Pyramiden KHML anders betrachtet werden. Man kan KLM vor ihre Grundfläche halten, so werden KHL, LHM und KHM ihre Seiten, und die Höhe wird die HL, welche auf der Grundfläche KLM perpendicular stehet. Nimmet man dieses an, so siehet man, daß auch diese Pyramide HLKM mit dem Prisma GHIL einerley Grundfläche KLM, und einerley Höhe HL habe. Also ist sie derjenigen Pyramide, die wir zu allererst betrachtet haben, KHGI, gleich: weil diese ebenfals die Grundfläche GHI das Prisma zu ihrer Grundfläche, und die Höhe des Prisma GK = HL zu ihrer Höhe hatte.

§. 63. Nimmet man nun dieses alles zusammen, so siehet man, daß

durch alle die Flächen, vermittelst welcher wir das Prisma GHIKLM geschnitten haben, dasselbe in drey gleiche Pyramiden KGHI, KLHM und KHIM zertheilet worden. Denn es ist KHIM=KHML, und KHML=KGHI, wie erwiesen worden ist, folgends auch KHIM=KGHI. Also ist eine jede dieser Pyramiden KGHI der dritte Theil von dem Prisma GHIL. Nun ist die Pyramide KGHI dem Cörper der zweyten Art ABC gleich, weil GHI=DE=BC, und GK=FE, diese Höhe FE aber der Höhe der Pyramide ABC gleich ist; das Prisma GHIL aber ist dem Cörper DEF gleich gemachet worden; also ist auch ABC der dritte Theil des Cörpers DEF.

[*Fig.* 323.] §. 64. Wenn man demnach auf AB, die Grundfläche eines Cörpers der zweyten Art ABC, einen Cörper der ersten Art ABD setzet, dessen Höhe der dritte Theil ist der Höhe des Cörpers der zweyten Art, so ist dieser Cörper ABD dem Cörper ABC gleich. Denn verhöhet man diesen Cörper ABD, bis seine obere Oberfläche EF durch C, die Spitze des Cörpers CAB gehet, und er folgends einerley Höhe mit diesem Cörper erhält; so ist so wohl ABD als ABC der dritte Theil des Cörpers ABFE, und demnach ABD dem Cörper ABC gleich, weil die dritten Theile von einerley Cörper ABFE nicht von verschiedenen Größen seyn können.

[*Fig.* 324.] §. 65. Und hieraus siehet man nun, daß man bey der Vergleichung der Cörper dieser Art keine andere Regeln gebrauche, als diejenigen, welche oben vor die Cörper der ersten Art gegeben worden sind Denn man kan sie allezeit in Cörper der ersten Art leicht verwandeln. Es seyn die zween Cörper der andern Art ABCD, abcd mit einander zu vergleichen. Wir setzen, daß auf die Art, die wir eben gewiesen haben, der Cörper der ersten Art BCDE dem ABCD, und bcde dem abcd, gleich gemachet worden sey; und daß B die Grundfläche BCD, A die Höhe des Cörpers ABCD, und C den Cörper ABCD oder BCDE selbst, bedeute, folgends $\frac{1}{3}$A der DE gleich sey. Ferner stellen wir uns unter c den Cörper abcd oder bcde vor; unter b die Grundfläche desselben bcd, und unter a die Höhe des Cörpers abd, so, daß wieder de dem dritten Theile dieser a gleich wird: so ist aus dem gezeigeten richtig, daß $C:c=\frac{1}{3}A\times B:\frac{1}{3}a\times b$, wenn man C den Cörper BCDE, und c den Cörper bcde bedeuten lässet. Denn die Verhältniß dieser Cörper ist allerdings aus der Verhältniß ihrer Grundflächen und ihrer Höhen zusammen gesetzt, XI, 34. Man multiplicire die zwey letztern Glieder der Proportion durch 3, so wird $C, c=A\times B:a\times b$, VI, 114. und man siehet, daß die Verhältniß der Cörper ABCD: abcd ebenfals aus der Verhältniß ihrer Grundflächen B:b, und aus der

Ver-

Verhältniß ihrer Höhen A:a zusammen gesetzet sey, weil C, c, auch diese Cörper bedeuten können.

§. 66. Hieraus nun können wir eben dergleichen Sätze ziehen, als oben von den Cörpern der ersten Art erwiesen worden sind. Es sey erstlich B=b, und man stelle sich zween Cörper der andern Art vor, welche gleiche Grundflächen, aber verschiedene Höhen haben. Weil nun hier die Verhältniß B:b, deren Glieder gleich sind, in der Zusammensetzung keine Würkung hat, und also gänzlich weg bleiben kan, VIII, 40; so wird nunmehro C:c=A:a, das ist, zween Cörper der zweyten Art, welche gleiche Grundflächen haben, verhalten sich gegen einander wie ihre Höhen.

§. 67. Es sey B der b ungleich, aber A=a; so wird auf eben die Art aus der allgemeinen Proportion die nachfolgende C:c=B:b heraus gebracht, welche angiebet, daß zween Cörper der anderen Art, welche gleiche Höhen haben, sich gegen einander wie ihre Grundflächen verhalten.

§. 68. Es sey B:b=a:A, oder man stelle sich zween Cörper der anderen Art vor, deren Grundflächen sich verhalten, wie ihre Höhen verkehrt gesetzet, so wird B×A=b×a, das ist, die Glieder der Verhältniß B×A:b×a werden einander gleich, VIII, 46. Da nun also diese Verhältniß der Verhältniß C:c gleich ist, so ist auch in diesem Falle C=c, das ist, die Cörper sind einander selbst gleich.

§. 69. Und wenn C=c, so ist B×A=b×a, folgends B:b=a:A, VIII, 48. das ist, wenn zween Cörper der zweyten Art einander gleich sind, so verhalten sich ihre Grundflächen wie ihre Höhen verkehrt gesetzt.

§. 70. Sind die Grundflächen solcher Cörper einander ähnlich, wie denn alle Grundflächen der Kegel einander ähnlich seyn müssen, weil sie Cirkel sind: und bedeuten L, l solche Linien, welche in den beiden Grundflächen auf einerley Art liegen, so ist B:b=L^q:l^q; und es wird aus der allgemeinen Proportion C:c=B×A:b×a nunmehro C:c=L^q×A:l^q×a. Also wird die Verhältniß dieser Cörper aus der Verhältniß der Quadrate L^q:l^q, und aus der Verhältniß der Höhen der Cörper A:a zusammen gesetzet.

§. 71. Ist nun bey ähnlichen Grundflächen auch A:a=L:l; so kan man die letztere Verhältniß in der Zusammensetzung an statt der ersteren gebrauchen. Es wird also die Verhältniß C:c in diesem Falle aus der Verhältniß L^q:l^q, und aus der Verhältniß L:l zusammen gesetzet. Da die Verhältniß L^q:l^q kommet, wenn man die Verhältniß L:l zweymal zusammen setzet, so entstehet die Verhältniß der Cörper C:c durch eine dreyfache Zusammensetzung der Verhältniß L:l. Und da die Verhältniß zweyer

Würfel, deren Seiten sich verhalten wie L zu 1, ebenfals durch die dreyfache Zusammensetzung der Verhältniß L:1 gefunden wird, so folget, daß bey diesen Bedingungen die Cörper C, c sich verhalten wie die Würfel, deren Seiten die Verhältniß L:1 haben.

§. 72. Ueberleget man diese Beweise, die wir von den Cörpern der ersten und andern Art gegeben haben, etwas genauer; so wird man finden, daß sie auch vor viel mehr andere Arten von Cörpern gelten, als diejenige sind, die bey dem Anfange dieser Abhandlung beschrieben worden sind. Beyder Arten Cörper können auch andere Grundflächen haben, als geradelinichte Figuren oder Cirkel. Es können die Grundflächen in krumme Linien eingeschlossen seyn, die keine Cirkel sind: es können auch die Umkreise dieser Grundflächen, aus geraden und krummen Linien, zugleich bestehen. Die Cörper selbst aber können auf dergleichen Grundflächen ohngefehr in Form einer gewundenen Säule stehen; und bey dem allen kan es doch mit den Durchschnitten derselben eben die Beschaffenheit haben, welche bey den Cörpern gezeiget worden ist, die wir betrachtet haben. Von dergleichen Cörpern sind die Sätze von der Größe der Cörper der ersten und andern Art, die hier abgehandelt worden sind, ebenfals richtig. Doch diese und dergleichen Betrachtungen fallen demjenigen gar leicht bey, welcher die gegebenen Beweise vollkommen eingesehen hat. Es ist also nicht nöthig, daß wir uns bey Cörpern dieser Art, die ohnedem in der Anwendung selten vorkommen, aufhalten.

Cörper der dritten Art.

[F. 325.] §. 73. Was nun die Cörper der dritten Art anlanget, so pfleget man von denselben gemeiniglich in den Anfangsgründen die einzige Kugel zu betrachten. Es wird aber eine Kugel ein solcher Cörper genennet, welcher von einer einzigen gekrümmeten Oberfläche beschlossen wird, deren Puncte alle von einem gewissen Puncte, innerhalb der Kugel, gleich weit entfernet sind. Es stellet ABC einen dergleichen Cörper vor. Das gegebene Punct innerhalb derselben ist D. Aber die Puncte B, E und G sollen in der gekrümmeten Oberfläche liegen. Wir setzen, daß die gerade Linie DE der geraden Linie DB gleich sey: und daß dieses beständig so zutreffe, wo man auch die Puncte B und E in der Oberfläche annehmen will, so wird DB = DE der Radius oder der Halbmesser der Kugel genennet, und D ihr Mittelpunct. Verlängert man aber den Radius durch den Mittelpunct D, bis wieder an die Oberfläche in G, so ist BG ein Durchmesser der Kugel.

Man

Man siehet, daß bey einer Kugel alle Durchmesser einander gleich seyn werden, weil alle Halbmesser gleich sind.

§. 74. Wir könten uns hier ebenfals mit der Abhandlung der einzigen Kugel begnügen lassen: allein da die Beweise, vermittelst welcher Archimedes eine Kugel mit einem Cylinder verglichen hat; deren wir uns hier bedienen werden, weil sie unmittelbar aus unserm Grundsatze fließen, sich nicht nur auf die Kugeln, sondern auch auf viele andere Cörper erstrecken, welche keine Kugeln sind: so halte ich davor, es werde dem Leser nicht unangenehm seyn, wenn wir diese Lehre etwas erweitern; zumalen die Beweise dadurch nicht schwerer, sondern vielmehr in einigen Fällen leichter werden. Doch werden wir bey dem allen doch nicht alle Cörper betrachten können, welche unter den Sätzen begriffen sind, die hier erwiesen werden sollen: wie wir denn auch nicht alle Cörper abhandeln konten, welche eben so mit einander verglichen werden, als die Cörper der ersten und zweyten Art. Indessen hoffe ich, es werde dasjenige, so gezeiget werden wird, hinlänglich seyn, von den übrigen Cörpern allen, welche unter diesen Beweisen begriffen sind, zu urtheilen.

[*Fig* 326. 327.] §. 75. Man nehme eine ebene Figur, deren Ecken alle von einem gegebenen Puncte gleich weit entfernet sind. Ein gleichschenklichtes Dreyeck ABC ist unter diesen die einfacheste. Bey demselben ist die Ecke A so weit als B von C entfernet. Die übrigen Figuren von dieser Art ABDE sind aus gleichschenklichten Dreyecken ACB, BCD, DCE, ECA zusammen gesetzt, deren an der Zahl so viele seyn können als man will. Die Seiten dieser Dreyecke CA, CB, CD, CE, sind alle gleich, aber die Winkel an den Spitzen derselben bey C können so groß seyn als man will. Folgends sind auch die Seiten der Figur AB, BD, DE, EA, nicht nothwendig gleich. Doch kan auch dieses seyn, und wenn man es annimmet, so wird die Figur ABDE regulär. Diese Figur ABC oder ABDE giebet die Grundfläche des Cörpers ab, welchen wir hier zusammen setzen wollen.

§. 76. Man setze auf diese Grundfläche und an das Punct derselben C die gerade Linie CF perpendiculär, und mache sie so groß als AC=BC. Man beschreibe um C als den Mittelpunct, in der Ebene FCA, den Quadranten FA; und in der Ebene FCB beschreibe man, um eben den Mittelpunct C, den Quadranten FB: eben so verfahre man bey allen übrigen Ecken D und E, wenn die Grundfläche mehr als zwo Ecken hat, die außer C fallen. An die zween Quadranten FA, FB krümme man eine Oberfläche dergestalt, daß alle Linien ab, welche in derselben so gezogen werden können, daß sie zu-

zugleich ganz in eine Ebene fallen, welche der ACB parallel lieget, gerade Linien werden. Und eben so verfahre man rings herum, wenn die Grundfläche mehr als zwo von der C verschiedene Ecken hat. So ist der Cörper, welcher auf der Grundfläche ABC stehet, und in die Quadranten FAC, FBC und die gekrümmete Oberfläche FAB eingeschlossen ist, oder derjenige, welchen wir in der 327 Figur, aus dergleichen Cörpern FCBA, FCDB, FCED und so fort, zusammen gesetzt haben, ein **Cörper der dritten Art**, welcher noch keinen besondern Namen bekommen hat.

§. 77. Schneidet man einen solchen Cörper, dessen Grundfläche ein gleichschenklichtes Dreyeck ist FCBA, durch ein beliebig angenommenes Punct a mit der Grundfläche ABC parallel, so wird der Schnitt abc der Grundfläche ABC ähnlich. Denn die Seite ab lieget in der gekrümmeten Oberfläche FAB, und zugleich in der schneidenden Fläche, und ist demnach eine gerade Linie, XI, 76. Es sind aber auch ac, bc gerade Linien, und folgends ist abc ein geradelinichtes Dreyeck. Weil FC auf der Fläche ABC perpendicular stehet, und die Fläche acb der ACB parallel lieget; so stehet eben diese FC auch auf der acb perpendieular, X, 51. und folgends sind ac, bc in den gleichen Quadranten FCA, FCB in einerley Entfernung von dem Mittelpuncte C, auf den Halbmesser CF perpendicular. Also sind diese Linien ac, bc einander gleich, V, 36. und das Dreyeck acb ist gleichschenklicht. Und weil auch dessen Winkel acb dem Winkel ACB gleich ist, wie man leicht siehet, X, 59. so sind diese Dreyecke acb, ACB einander ähnlich, VII, 28. Ist nun die Grundfläche ABDE aus verschiedenen gleichschenklichten Dreyecken zusammen gesetzt, so ist acb dem ACB ähnlich, bcd dem BCD, dce dem DCE und so fort; also sind die Figuren abde, ABDE aus ähnlichen Dreyecken auf einerley Art zusammen gesetzt; sie sind demnach einander ebenfals ähnlich, VII, 44.

[*Fig.* 328.] §. 78. Nimmet man an die Stelle des gleichschenklichten Dreyeckes einen Ausschnitt eines Cirkels ABC zur Grundfläche, und verfähret im übrigen wie vorhero, so bekommet man einen Ausschnitt einer Kugel. Nemlich man muß wieder an den Mittelpunct C die gerade Linie FC auf die Ebene, in welcher der Ausschnitt ACB lieget, perpendicular setzen, und um C die zween Quadranten FA, FB beschreiben; sodann aber an diese Quadranten FA, FB, und an den Bogen AB eine gekrümmete Oberfläche FAB anbringen, welche überall gleich weit von dem Puncte C entfernet sey. Der Cörper, welcher auf der Grundfläche ACB stehet, und übrigens von den Quadranten FAC, FBC, und von der gekrümmeten Oberfläche

fläche FAB beschlossen wird, ist der Ausschnitt der Kugel, welchen wir verfertigen wolten.

§. 79. Auch hier ist ein jeder Schnitt abc der Grundfläche ABC ähnlich, welcher derselben parallel lieget. Denn daß ac der bc gleich sey, siehet man aus dem bereits XI, 77. gegebenen Beweise. Nimmet man aber in der krummen Linie ab, welche den Schnitt acb an der dritten Seite schließet, ein Punct d nach Belieben, und leget durch FC und dieses Punct d die Fläche FDC, welche eben dadurch auf die Grundfläche ACB perpendicular wird, X, 45. so erhält diese Fläche FDC, indem sie den Cörper schneidet, ebenfals die Figur eines Quadranten, und dc wird der ac oder bc gleich. Also sind alle Puncte der krummen Linie adb von dem Puncte c gleich weit entfernet, und adb ist ein Cirkelbogen, die Figur cadb aber ein Ausschnitt eines Cirkels, und dem Ausschnitte ACB ähnlich, weil der Winkel acb dem Winkel ACB gleich ist.

[*Fig.* 329.] §. 80. Nimmet man an die Stelle des Ausschnittes einen ganzen Cirkel ABDE zur Grundfläche, und machet übrigens alles wie vorhin, so bekommet man eine halbe Kugel ABFDE. Denn daß die Oberfläche ABFDE die Eigenschaften der Oberfläche einer Kugel habe, lieget selbst in dem Begriffe, XI, 78. folgends ist der Cörper ABFDE ein Theil einer Kugel. Daß er aber eben die Helfte einer Kugel sey, kan man daraus schließen, weil, wenn man an den Cirkel ABDE einen andern Cörper von der Figur und Größe des ABFDE ansetzet, die Kugel ganz wird, wie man gar leicht siehet. Man siehet auch dieses leicht, daß aus dem vorigen Beweise fließe, daß ein jeder Schnitt dieser halben Kugel, abde welcher vermittelst einer ebenen Fläche geschiehet, die der Grundfläche ABDE parallel lieget, einen Cirkel gebe, dessen Mittelpunct c in die Linie CF fällt.

§. 81. Es haben also die Cörper der dritten Art dieses mit den Cörpern der ersten und zweyten Art gemeinschaftlich, daß, wenn man sie mit einer Ebene schneidet, welche der Grundfläche parallel lieget, die Figur des Schnittes der Grundfläche ähnlich wird. Auch kommen alle Cörper der dritten Art darinne mit einander überein, daß, wenn man sie durch FC, und durch eine Ecke der Grundfläche, (wenn nemlich die Grundfläche Ecken hat, sonst aber, wenn sie außen Cirkelrund ist, durch ein beliebiges Punct des Umkreises B) schneidet, der Schnitt FCB ein Quadrante wird: und hierdurch wird diese Art Cörper, von den Cörpern der ersten und zweyten Art unterschieden. Es folget aber hieraus, daß dasjenige, so wir aus der angezeigten Figur des Perpendicularschnittes FBC, und aus der Aehnlichkeit der Schnitte abc oder abde, welche der Grundfläche parallel geschehen, mit

der Grundfläche, herführen werden, von allen Cörpern der dritten Art richtig seyn werde; ob wir zwar bey unsern Beweisen nur die einfachesten dieser Cörper vorstellen wollen.

Vergleichung der Cörper der dritten Art mit den Cörpern der ersten.

[*Fig.* 330.] §. 82. Es sey das Dreyeck ABC gleichschenklicht, und in demselben AC=BC; FABC aber sey ein Cörper der dritten Art. Man setze auf die Grundfläche desselben das gerade Prisma ABCFGH, dessen obere Grundfläche GHF der untern ABC gleich seyn wird. An diese Grundfläche FGH setze man die dreyseitige Pyramide FGHC, deren Spitze unterwärts gekehret ist, und sich in C, dem Mittelpuncte der Quadranten FA, FB, endiget: so haben die zween Cörper, das Prisma ABCFGH, und die Pyramide FGHC, einerley Grundflächen FGH, und einerley Höhen FC, folgends ist die Pyramide der dritte Theil des Prisma, XI, 61. So hoch aber einer dieser Cörper ist, so hoch ist auch der Cörper der dritten Art FABC, denn seine Höhe ist ebenfals FC.

§. 83. Nun schneide man diese drey Cörper, das Prisma, die Pyramide und den Cörper der dritten Art, wie sie da stehen, mit einer Fläche IKL, die den Grundflächen ABC, FGH parallel lauft; und die Figur dieses Schnittes in dem Prisma sey IKL, die Figur des Schnittes in dem Cörper der dritten Art, MNL, und die Figur des Schnittes der Pyramide OPL: so wird durch diesen Schnitt von dem Prisma, das Prisma IKLFGH abgeschnitten; von dem Cörper der dritten Art aber der Theil FMNL, und von der Pyramide wird das Stück FGHPLO abgesondert. Man kan darthun, daß jederzeit FMNL so groß sey, als der Unterscheid der beyden Stücke IKLFGH und FGHPLO. Und weil der Unterscheid IKLFGH=FGHPLO dem Cörper IKPOGH gleich ist, wie man aus der Figur siehet, so wird eben dieser Satz ausgedrücket, wenn man saget; daß jederzeit FMNL dem Cörper IKPOGH gleich sey. Dieses ist dasjenige, so wir gegenwärtig auf eine Art beweisen wollen, aus welcher zu sehen seyn wird, daß eben dasselbe von allen Cörpern der ersten, andern und dritten Art, welche auf einer gemeinschaftlichen Grundfläche stehen, und einerley Höhe haben, richtig sey. Aus dieser Ursache wollen wir uns bey diesem Beweise allgemeiner Redensarten bedienen, welche denselben eben nicht auf

die

die besondere Figur einschränken, die wir vor uns haben, sondern von allen übrigen zugleich gelten können.

§. 84. Die Figur des Schnittes des Cörpers der ersten Art IKL ist der Grundfläche desselben ABC oder GHF gleich und ähnlich. Von der Figur des Schnittes des Cörpers der dritten Art MNL ist ebenfals bewiesen worden, daß sie der Grundfläche ABC ähnlich sey, und wir wissen auch, daß die Figur des Schnittes des Cörpers der zweyten Art POL, der Grundfläche desselben HGF, und folgends auch der ABC ähnlich ist. Also sind die drey Schnitte IKL, MNL, OPL einander ähnlich, weil ein jeder derselben der ABC ähnlich ist: und die Linien KL, NL, PL, liegen in denselben zwischen den Spitzen gleicher Winkel, und auf einerley Art. Nun ist das Viereck CFHB ein Quadrat; weil CF=BC, und der Winkel FCB gerade ist, und HC ist der Durchmesser dieses Quadrates. Da nun PL in der Fläche eben dieses Quadrates der HF parallel läuft, so ist auch CL=PL, gleich wie FC=HF, VII, 12. und man kan CL vor PL setzen. Man ziehe in der Fläche eben dieses Quadrates NC, den Radius des Quadranten FNB, welcher dem Radius BC, und folgends auch der KL, gleich seyn wird, und an statt dieser KL kan gebrauchet werden. Nun ist daß Dreyeck NLC bey L rechtwinklicht, und wenn die drey Seiten desselben NC, NL, LC in ähnlichen Figuren auf einerley Art liegen, so ist die Figur, in welcher NC lieget, denen beyden Figuren, in welchen NL, CL auf eben die Art liegen, zusammen genommen gleich, IX, 87. folgends muß man auch schließen, wenn man vor NC die KL, und vor LC die PL setzet, daß wenn KL, NL, PL in ähnlichen Figuren auf einerley Art liegen, die Figur, in welcher KL lieget, den beyden Figuren, in welchen NL, PL eben so liegen, zusammen genommen gleich seyn werde. Es liegen aber diese Linien KL, NL, PL in den ähnlichen Figuren IKL, MNL, OPL auf einerley Art; also ist die Figur IKL den beyden Figuren MNL und OPL zusammen genommen gleich, oder IKL = MNL + OPL.

§. 85. Wir sind also vermittelst dieser Schlüsse so weit gekommen, daß wir gesehen haben, daß, wenn wir die drey Cörper, welche wir betrachten, mit einer Fläche schneiden, die der Grundfläche ABC parallel lauft: allezeit der Schnitt des Cörpers der ersten Art IKL dem Schnitte des Cörpers der dritten Art MNL, und dem Schnitte des Cörpers der zweyten Art OPL zusammen, gleich seyn werde. Hieraus aber fließet, daß der Schnitt des Cörpers der dritten Art MNL übrig bleibe, wenn man den Schnitt des Cörpers der zweyten Art OPL von dem Schnitte des Cörpers der ersten Art IKL abziehet. Da nun auch nach diesem Abzuge

IKPO, der Schnitt des Cörpers ABCHG, übrig bleibet: so ist überall MNL = IKPO. Weil nun über dieses die Theile dieser Cörper OIKPHG, FMNL zwischen den Parallelflächen FGH, IKL liegen: so folget nach unserem Grundsatze XI, 7. daß auch der Cörper FMNL dem Cörper OIKPHG, daß ist, der Theil des Cörpers der dritten Art FMNL, dem Unterschiede der Theile der Cörper der ersten und andern Art FGHKLI—FGHPLO gleich seyn werde.

§. 86. Man schließet auf eben die Art, daß auch der Theil des Cörpers der dritten Art LMNBCA dem Cörper POIKBCA, gleich sey, und daß folgends der Theil des Cörpers der dritten Art LMNBCA übrig bleibe, wenn man den Theil des Cörpers der zweyten Art LOPC von dem Theile des Cörpers der ersten Art LIKBCA abziehet. Denn es bleibet nach diesem Abzuge der Cörper POIKBCA übrig.

§. 87. So wohl aus diesen beyden Sätzen, als auch unmittelbar aus dem Beweise, welchen wir geführet haben, folget, daß der ganze Cörper der dritten Art FABC dem Unterschiede der Cörper der ersten und der zweyten Art, die eben die Grundfläche und Höhe haben, FGHBCA—FGHC, gleich sey. Denn dieser Unterschied ist GHCAB, und dieser Cörper ist dem Cörper FABC gleich, wie man aus demjenigen leicht schließet, so eben gezeiget worden ist. In dem Falle, welchen die Figur vorstellet, wenn nemlich die Grundfläche ABC ein gleichschenklichtes Dreyeck ist, ist dieser Cörper GHCAB eine Pyramide, denn er hat zu seiner Grundfläche das Parallelogrammum ABHG, und ist um und um in die Dreyecke ABC, BCH, HCG, GCA eingeschlossen, deren Spitzen in C zusammen laufen.

[*Fig.* 331.] §. 88. Es verhält sich aber dieses nicht in allen Fällen so. Wenn auf dem Cirkel ABDE eine halbe Kugel ABDFE und ein Cylinder AGHD, und an der andern Grundfläche dieses Cylinders GH der gerade Kegel GCH stehet, wie es der Satz und dessen Beweis erfordern; und man schneidet diese drey Cörper durch IL, vermittelst einer Ebene, die der ABDE parallel lauft; so ist zwar der Theil der Kugel MFN dem Cörper gleich, welcher übrig bleibet, wenn man den Theil des Kegels GOPH von dem Theile des Cylinders GILH abziehet: und der Theil der Kugel AMND wird ebenfals durch den Abzug des Kegels OCP von dem Cylinder IADL gefunden: die halbe Kugel AFD aber ist der Ueberschuß des ganzen Cylinders AGHD über den ganzen Kegel GCH. Allein dieser Ueberschuß hat hier weder die Figur eines Kegels, noch die Figur eines Cylinders. Denn wenn man aus dem Cylinder GADH den Kegel GCH heraus nimmt, und also den Ueberschuß des Cylinders GADH über den Kegel GCH

übrig

übrig lässet: so hat dieser Ueberschuß einiger maßen die Figur eines Bechers GCHDA, aber mit einer Pyramide oder einem Cylinder hat er gar keine Aehnlichkeit.

[Fig. 330.] §. 89. Indessen siehet man hieraus, daß ein jeder Cörper der dritten Art FABC zwey Drittel eines Cöryers der ersten Art FGHBCA betrage, welcher mit dem Cörper der dritten Art auf eben der Grundfläche ABC stehet, und mit demselben einerley Höhe hat. Denn der Cörper der zweyten Art FGHC ist ohnstreitig der dritte Theil des Cörpers der ersten Art FGHBCA: XI, 61. Wenn man also jenen Cörper FGHC von diesem FGHBCA abziehet, so bleiben zwey Drittel des Cörpers der ersten Art übrig. Diesem Unterschiede aber, das ist, dem Cörper ABCHG, ist der Cörper der dritten Art FABC gleich; es beträget also derselbe zwey Drittel des Cörpers der ersten Art.

[Fig. 331.] §. 90. Demnach ist auch die halbe Kugel FABDE so groß als zwey Drittel der geraden Walze ADHG, deren Grundfläche dem Cirkel ABDE gleich ist, auf welchem die halbe Kugel stehet, und deren Höhe DH dem halben Durchmesser eben dieses Cirkels gleich ist.

[Fig. 332.] §. 91. Stellt man sich nun vor, daß man an die Grundfläche des Cörpers der dritten Art FABC, noch einen andern Cörper der dritten Art ABCf gesetzet habe, welcher dem vorigen FABC in allen Stücken gleich und ähnlich ist, und man habe auch den Cörper der ersten Art FHGBCA verlängert, bis fghBCA dem FGHBCA gleich geworden; so ist $FABC = \frac{2}{3}FGHBCA$, und $fABC = \frac{2}{3}fghBCA$, und folgends auch $FABC + fABC = \frac{2}{3}FGHBCA + \frac{2}{3}fghBCA$, das ist, VI, 105. der ganze Cörper AfBF beträget zwey Drittel des Cörpers der ersten Art GghfFH. Es sind in diesem Falle FAf, und FBf halbe Cirkel, und der Cörper AfBF ist in zwey halbe Cirkel, und die gekrümmete Oberfläche FAfBF eingeschlossen. Wenn man an die Grundfläche GHF einen Cörper der zweyten Art fGHF setzet, welcher mit seiner Spitze bis in f reichet, und ziehet diesen Cörper von dem Cörper der ersten Art gF ab, so enthält das Ueberbleibsel gGHhf ebenfals zwey Drittel des Cörpers der ersten Art gF, weil fGHF ein Drittel desselben beträgt. Es ist demnach der Cörper gGHhf dem Cörper AfBF gleich. Der Cörper gGHhf ist wieder eine Pyramide, wenn die Grundfläche GHF ein Dreyeck ist, und man das Viereck GghH vor die Grundfläche annimmet; in andern Fällen ist er aus Pyramiden zusammengesetzt, oder hat mit einer Pyramide gar nichts gemeinschaftliches.

[Fig. 333.] §. 92. Eben so ist es auch wenn man an die halbe Kugel AFB die andere Helfte AfB setzet, den Cylinder GABH aber zugleich ver-

verlängert, und dadurch machet, daß die Höhe des Cylinders GghH dem Durchmesser der Kugel gleich wird. Es ist wieder die Kugel FAfB zweyen Dritteln des Cylinders GghH gleich; und wenn man auf eben die Grundfläche gh einen Kegel gFh beschreibet, dessen Höhe ebenfals dem Durchmesser der Kugel gleich ist, so wird dieser der Helfte der Kugel gleich, weil er einem Drittel des Cylinders GghH gleich ist, und die Kugel zwey Drittel dieses Cörpers beträget.

§. 93. Dieses ist eine vollkommen schöne Eigenschaft der Cörper der ersten, andern und dritten Art, und derjenigen, welche entstehen, indem man zween Cörper der dritten Art zusammen setzet. Wenn alle drey Arten dieser Cörper auf gleichen Grundflächen stehen und gleiche Höhen haben, und man nennet den Cörper der zweyten Art 1, so wird der Cörper der dritten Art durch die Zahl 2, und der Cörper der ersten Art durch die Zahl 3 ausgedrücket. Aus dieser Verhältniß können wir alles übrige, so von den Cörpern der dritten Art noch zu sagen ist, herleiten. Es wird zwar bey einem jeden besondern Satze leicht einzusehen seyn, ob er sich auch auf solche Cörper anwenden lasse, welche aus zweyen Cörpern der dritten Art zusammen gesetzt sind, wie eine Kugel aus zwo halben Kugeln: doch wollen wir, dem Leser die Mühe des Nachdenkens zu ersparen, dieses meist überall kurz erinnern.

Wie zween Cörper der dritten Art mit einander verglichen werden.

[*Fig.* 334.] §. 94. Zween Cörper der dritten Art, welche gleiche Grundflächen ABC und abc, wie auch gleiche Höhen haben FC und fc, sind einander gleich, obgleich ihre Grundflächen einander nicht ähnlich sind. Denn wenn man auf diese Grundflächen die Cörper der ersten Art ABCFGH und abcfgh setzet; so sind diese Cörper einander gleich, weil sie gleiche Grundflächen und Höhen haben. Also sind auch zwey Drittel des ersten ABCFGH gleich zweyen Dritteln des andern abcfgh; folgends, weil die Cörper der dritten Art zwey Drittel der Cörper der ersten Art betragen, so ist auch FABC = fabc. Und man siehet leicht, daß eben dieses auch richtig sey, wenn man zween Cörper der dritten Art, mit ihren Grundflächen zusammen setzet, weil die Verhältniß $\frac{2}{3}$A:$\frac{2}{3}$B allezeit der Verhältniß A:B gleich ist, es mag A und B bedeuten was man wil; und fol-

folgends, wenn A=B, auch nothwendig zwey Drittel der A zweyen Dritteln der Größe B gleich seyn müssen.

§. 95. Wir können hiebey bemerken, daß, wenn die Höhen zweyer Cörper der dritten Art gleich seyn sollen FC=fc, auch die Linien AC, ac einander gleich seyn müssen: weil diese AC, ac, nach dem Begriffe der Cörper dieser Art, den Höhen FC, fc gleich sind, XI, 76. Indessen kan ABC ein gleichschenklichtes Dreyeck seyn, und a b c der Ausschnitt eines Cirkels, oder ein Vieleck, dessen Ecken alle von C gleichweit entfernet sind, und so fort.

[*Fig.* 335.] §. 96. Sind aber die Grundflächen zweyer Cörper der dritten Art der Größe nach von einander verschieden und zugleich die Höhen; so verhält sich der Cörper FABC zu dem Cörper fabc, wie sich drey Helften des ersteren zu dreyen Helften des anderen verhalten; das ist, wie der Cörper der ersten Art ABCFGH zu dem Cörper der ersten Art a b c f g h. Nun ist die Verhältniß ABCFGH:a b c f g h aus der Verhältniß der Grundflächen ABC:abc, und aus der Verhältniß der Höhen CF: cf zusammen gesetzet, XI, 35; also geben eben diese Verhältnisse, die Verhältniß nemlich der Grundflächen ABC:abc, und die Verhältniß der Höhen CF:cf, wenn man sie zusammen setzet, auch die Verhältniß der Cörper der dritten Art FABC:f a b c.

§. 97. Da aber hier die Höhe FC allezeit der Seite BC gleich ist, so siehet man, daß hier noch ein oder anderer besonderer Satz anzubringen wäre, welcher die Vergleichung dieser Cörper etwas erleichterte. Wir wollen uns aber dabey nicht aufhalten, sondern nur den einzigen Fall betrachten, wenn AB und a b Bogen, und folgends die Grundflächen ABC, a b c Ausschnitte aus Cirkeln sind. In diesem Falle ist die Verhältniß der Grundflächen aus der Verhältniß der Bogen AB:ab, und aus der Verhältniß der Halbmesser BC:bc zusammen gesetzt, IX, 36. Will man nun die Verhältniß der Cörper FABC:f a b c haben, so muß man zu diesen zwo Verhältnissen noch die Verhältniß CF:cf, das ist, die Verhältniß der Halbmesser BC:b c, hinzu setzen, damit man nemlich die Verhältniß der Höhen mit der Verhältniß der Grundflächen zusammen setze. Also wird die Verhältniß der Cörper FABC:f a b c in diesem Falle aus den drey Verhältnissen AB:ab, BC:bc und BC:bc zusammen gesetzet. Oder, weil die zwey letzteren Verhältnisse gleich sind, und also, wenn sie zusammen gesetzt werden, die Verhältniß des Quadrats aus BC zu dem Quadrate aus bc, kurz die Verhältniß $BC^q : bc^q$ geben, IX, 69. so kan man auch sagen, daß in dem Falle, wenn ABC, a b c Ausschnitte aus Cirkeln, und folgends

FABC, fabc Ausschnitte aus halben Kugeln sind, die Verhältniß FABC: fabc aus der Verhältniß der Bogen AB:ab, und aus der Verhältniß der Quadrate ihrer Halbmesser $BC^q : bc^q$ zusammen gesetzet sey.

[*Fig.* 336.] §. 98. Sind nun aber die Grundflächen zweyer Cörper der dritten Art einander ähnlich, so ist die Verhältniß der Cörper FABC:fabc dreymal so hoch, als die Verhältniß der Halbmesser BC:bc, oder der Höhen FC:fc. Denn die Verhältniß der ähnlichen Grundflächen ABC:abc bestehet aus der Verhältniß BC:bc zweymal genommen, weil diese Linien in den beyden Grundflächen auf einerley Art liegen IX, 80. Und wenn man zu dieser Verhältniß der Grundflächen noch die Verhältniß der Höhen FC:fc, welche der Verhältniß BC:bc gleich ist, hinzu setzet: so bekommet man allerdings eine Verhältniß, welche dreymal so hoch ist, als die Verhältniß BC:bc. Diese aber ist die Verhältniß der Cörper FABC:fabc, weil jederzeit durch die Zusammensetzung der Verhältniß der Höhen mit der Verhältniß der Grundflächen die Verhältniß der Cörper FABC:fabc heraus gebracht wird. Auch dieses ist von Cörpern richtig, welche entstehen, wenn man die ähnlichen Cörper FABC, fabc verdoppelt, weil die Verhältniß nicht geändert wird, wenn man die Glieder derselben verdoppelt.

[*Fig.* 337.] §. 99. Wenn die Grundflächen Ausschnitte aus Cirkeln, und die Winkel derselben ACB, acb einander gleich sind, so sind die Ausschnitte ähnlich, und folgends stehen die Cörper unter denjenigen, von welchen der gegenwärtige Satz lautet. Es verhalten sich also dergleichen Ausschnitte aus Kugeln FABC, fabc, wie die Würfel der Halbmesser FC, fc. Denn die Verhältniß der Cörper FABC:fabc ist dreymal so hoch, als die Verhältniß FC:fc; und eben so hoch ist auch die Verhältniß des Würfels aus FC zu dem Würfel aus fc, XI, 40. Man siehet hier wieder leicht, daß der Satz auch gelte; wenn man die Cörper FABC, fabc verdoppelt, indem man an die Grundfläche derselben andere Cörper ansetzet, welche ihnen gleich und ähnlich sind.

[*Fig.* 338.] §. 100. Es stehen unter diesem Satze alle halbe Kugeln ABDF, abdf, denn was von einem jeden Ausschnitte eines Cirkels richtig ist, welchen man zur Grundfläche eines Cörpers der dritten Art angenommen hat, das muß auch richtig seyn, wenn die Grundflächen ganze Cirkel sind, in welchem Falle die Cörper halbe Kugeln werden. Oder, will man auf das vorige zurücke gehen, so sage man, die Verhältniß der Halbkugeln AFDB:afdb sey aus der Verhältniß der Grundflächen ABD: abd, und aus der Verhältniß der Höhen FC:fc zusammen gesetzet. Nun

ist

ist wieder die Verhältniß der Grundflächen zweymal so hoch als die Verhältniß der Halbmesser AC:ac, oder FC:fc, IX, 82. Wenn man demnach zu der Verhältniß der Grundflächen FC×FC:fc×fc die Verhältniß der Höhen FC:fc hinzu gesetzet, so bekommet man allerdings eine Verhältniß, welche dreymal so hoch ist, als die Verhältniß FC:fc.

§. 101. Man siehet vor sich, daß man in diesen Verhältnissen an die Stelle der Halbmesser FC, fc jederzeit die verdoppelten Halbmesser, oder die ganzen Durchmesser, AD, ad nehmen könne, weil dadurch die Verhältniß nicht geändert wird, wie auch daß eine ganze Kugel sich zu einer andern ganzen Kugel nicht anders verhalte, als die Helfte der ersten zu der Helfte der zweyten. Demnach ist auch die Verhältniß der ganzen Kugel, von welcher ABDF die Helfte ist, zu der Kugel, deren Helfte abdf ist, dreymal so hoch als die Verhältniß der Halbmesser AC:ac, oder als die Verhälniß der Durchmesser AD:ad; und die erstere Kugel verhält sich zu der letzteren, wie der Würfel dessen Seite AC ist, zu dem Würfel, welchen man aus der Seite ac machen kan, oder auch wie der Würfel aus dem ganzen Durchmesser AD, zu dem Würfel aus dem ganzen Durchmesser ad.

Von den regulären Cörpern.

§. 102. Dieses war dasjenige, so wir von der Vergleichung der Cörper zu sagen hatten, welche in den Anfangsgründen nothwendig betrachtet werden müssen. Denn man kan aus den gewiesenen Gründen noch die Eigenschaften anderer Cörper herleiten, welche von denjenigen, die wir abgehandelt haben, verschieden sind, und unter diesen sind die so genanten **regulären Cörper.** Es scheinet uns aber die Betrachtung derselben von viel zu geringem Nutzen zu seyn, daß wir unsere Leser damit aufhalten solten. Wir wollen indessen erklären, welche Cörper regulär genennet werden, damit wenigstens niemand durch das Wort aufgehalten werde. Man nehme bey dieser Erklärung einen Würfel zum Exempel, denn dieser Cörper ist auch regulär, so wird man die Sache desto leichter einsehen. Ein Würfel lässet sich in einen andern Würfel, der eben die Größe hat, hineinlegen, wie man ihn auch kehren mag, und füllet denselben immer ganz und gar. Eben dieses müssen alle reguläre Cörper thun, sie müssen andere reguläre Cörper füllen können, wie ein Würfel einen andern füllet, welche Lage man ihnen auch geben mag, wenn man nur die Ecken beständig in die Ecken passet, wie man dieses auch bey den Würfeln beobachten muß.

§. 103. Doch diese Erklärung ist nicht hinlänglich, sich solche Cör-

per recht deutlich vorzustellen. Man kan demnach bemerken, daß zu einem regulären Cörper nachfolgendes erfordert werde. Er muß erstlich überall in Figuren von einerley Art eingeschlossen seyn, als in Dreyecke oder in Vierecke oder in Fünfecke, und es müssen nicht einige Seiten desselben Dreyecke, und die andern Vierecke oder Fünfecke seyn. Diese Seiten des Cörpers müssen zweytens alle regulär und einander gleich seyn, das ist, sie müssen entweder gleiche und gleichseitige Dreyecke, oder gleiche gleichwinklichte und gleichseitige Vierecke, oder gleiche gleichwinklichte und gleichseitige Fünfecke seyn: und drittens müssen alle Ecken des Cörpers gleich viele Seiten haben wie eine jede Ecke des Würfels drey Seiten hat, und entstehet indem Dreye der Quadrate, welche den Würfel einschließen, mit den Spitzen ihrer Winkel in einem Puncte zusammen laufen. Es ist übrigens nichts daran gelegen, ob eine jede dieser Ecken nur aus drey oder auch aus vier oder fünf Flächen bestehe.

§. 104. Man hat nicht mehr als fünf solcher Cörper. Der erste ist vierseitig, und seine Seiten sind Dreyecke. Der andere ist sechsseitig, und seine Seiten sind Quadrate. Dieses ist eben der Würfel. Der dritte ist achtseitig und seine Seiten sind wieder Dreyecke. Der vierte ist zwölfseitig und seine Seiten sind reguläre Fünfecke, endlich hat der fünfte zwanzig Seiten, welche Dreyecke sind. Will man sich dieselben deutlich vorstellen, so kan man ihre Seiten aus Papier ausschneiden und hernach zusammen leimen. Man findet dazu in den gemeinen Büchern eine weitläuftige Anweisung. Wir können uns aber dabey nicht aufhalten. Und eigentlich ist es unschicklich, Dinge zu erklären, welche man alsdenn nicht weiter betrachtet.

Von den Oberflächen der Cörper

§. 105. Wir sind also nunmehro an der Betrachtung der gekrümmeten Oberflächen der Cörper der ersten, der zweyten und der dritten Art. Denn wir haben bereits X, 4. erinnert, daß die ebenen Oberflächen der Cörper hier von neuen zu betrachten etwas überflüssiges wäre. Die Betrachtung der gekrümten Oberflächen aber soll hauptsächlich dahin gehen, daß wir im Stand gesetzet werden, einzusehen, wie die gekrümmeten mit ebenen Oberflächen zu vergleichen sind. So bald dieses bekant seyn wird, werden wir auch die krummen Oberflächen, wie die ebenen mit einander vergleichen können, und dieses ist das Hauptsächliche, so man bey denselben suchet.

§. 106.

§. 106. Wir werden aber nicht alle gekrümmete Oberflächen der Cörper, welche wir betrachtet haben, auf diese Art abhandeln können. Einige derselben lassen sich vermittelst der Grundsätze, auf welche man in den Anfangsgründen bauet, mit ebenen Flächen nicht vergleichen. Der Cirkelkreis kan uns so weit nicht führen. Diese Oberflächen erfordern die Kentnis noch anderer krummen Linien, und fallen also außer die Gränzen derjenigen Linien, welche man in den Anfangsgründen brauchet. Dergleichen sind die Oberflächen der schiefen Cylinder und Kegel, und es gehört also bloß die Betrachtung der gekrümmeten Oberflächen der geraden Cylinder und Kegel, wie auch einiger Cörper der dritten Art, hieher, und unter diesen insonderheit die Oberfläche der Kugel selbst.

§. 107. Damit wir in diesen Beweisen etwas kürzer verfahren können, werden wir künftig einen Cirkel als ein Vieleck von unendlich kleinen Seiten ansehen, in welchem die Spitzen der Winkel, so die Seiten einschließen, alle gleich weit von einem Mittelpuncte entfernet sind, es mag übrigens dieses geradelinichte Vieleck regulär seyn oder nicht. Wir haben dieses oben IX, 33. da wir ins besondere von dem Cirkel handelten, nicht zum Grunde legen mögen, aus Furcht, es möchten einige Leser Schwierigkeit dabey finden, und glauben, daß, indem man dergleichen annimmet, man zwar sehr wenig, aber doch etwas fehle. Nach den Beweisen aber, die wir von dem Cirkel gegeben haben, fället die Undeutlichkeit, welche diese Redensart verursachen möchte, und die daraus entspringende Furcht eines Fehlers, hoffentlich ganz weg. Man mag den Umkreis eines Cirkels in so viele Theile theilen als man will, und dadurch die Theilchen so klein machen als man will, so werden diese Theilchen doch niemals gerade Linien. Und wenn man diejenige dieser Theilungspuncte, die einander zunächst liegen, durch gerade Linien mit einander verknüpfet, so weichen diese immer von den Bogen ab, und geben eine geradelinichte Figur, die kleiner ist als der Cirkel; gleichwie im Gegentheil eine jede um den Cirkel beschriebene geradelinichte Figur größer ist als dieser. Indessen komt sowol die eine als die andere dieser Figuren dem Cirkel immer näher, je kleiner man ihre Seiten machet, obwol weder die eine noch die andere demselben dadurch jemals gleich gemacht werden kan. Solte dieses erhalten werden, wenn die Figuren gleichseitig und also regulär sind, so müste man die Zahl ihrer Seiten größer machen als eine jede Zahl die man nennen kan, größer als tausend, größer als eine Million, als eine Billion und so weiter. Alsdann würde die äußere Figur mit der innern zusammen fallen, und beyde würden dadurch dem Cirkel gleich werden, welcher immer zwischen denselben im Mittel bleibt. Dieses aber

will man anzeigen, wenn man den Cirkel als ein Vieleck von unendlich kleinen Seiten betrachtet, deren jede von dem Mittelpunct so weit entfernet ist, als eine jede andere. Es bedeutet also diese kurze Redensart nichts anders, als was jederman von dem Cirkel bekant ist; und sie kan uns in keine Fehler verleiten, so lange wir ihr keine andre Bedeutung geben. Wie denn auch aus diesen Begriffe nichts anders folgen kan, als was wir IX, 33. von der Größe des Cirkels erwiesen haben. In diesem Verstande komt auch ein unendlich kleiner Theil des Umkreises eines Cirkels mit einer geraden Linie völlig überein, indem seine Krümmung verschwindet.

Oberflächen der geraden Cylinder.

[*Fig.* 339.] §. 108. Es sey nunmehro ABCD ein gerader Cylinder. Man ziehe in der Oberfläche desselben die gerade Linie AB: man mache derselben die a b gleich, und setze auf die äußersten Puncte dieser a b die Perpendicularlinien a d, b c von unbestimmeter Länge. Ferner nehme man in dem Umkreise BC das Theilchen BE so klein, daß es von einer geraden Linie nicht zu unterscheiden ist, und mache b e = BE. Wenn man nun auch durch BE, in der Oberfläche des Cylinders, die gerade Linie EF ziehet, welche der AB parallel seyn wird, und durch e die e f, parallel mit der a b: so ist AE von dem geradewinklichten Viereckе a e nicht zu unterscheiden, sondern AE ist dem a e gleich und ähnlich. Fähret man aber fort, in dem Umkreise BC ein Theilchen EG zu nehmen, so von einer geraden Linie nicht verschieden ist, machet wieder eg = EG, und ziehet die geraden Linien HG, hg, wie vorhero; so wird wieder EH = eh: und folgends ist die Summe der beyden rechtwinklichten Vierecke AE + FG, das ist, der Theil der Oberfläche der Walze AG, der Summe der geradewinklichten Vierecke ae + fg, das ist, dem Viereckе ag gleich. Verfolget man nun diese Schlüsse noch ferner bis endlich bi dem Bogen BI gleich wird: so wird man durch dieselbe dahin geleitet, daß man einsiehet, es sey das geradewinklichte Viereck a b i k dem Theile der Cylindrischen Oberfläche ABIK gleich. Man ist also im Stande, eine geradewinklichte Figur anzugeben, von welcher zu zeigen ist, daß sie einen Theil der Oberfläche einer Walze gleich sey.

§. 109. Es ist nemlich diese der Cylindrischen Oberfläche ABIK gleiche Figur abik ein geradewinklichtes Viereck, dessen Höhe ab so groß ist, als die Höhe des Cylinders AB, und dessen Grundlinie b i dem Theile des Umkreises der Grundfläche BI gleich ist, welcher zwischen den geraden Linien AB, IK lieget, die die Cylindrische Oberflächen ABIK von beyden Seiten

ein-

einschließen. Man siehet leicht, daß hieraus folgen müsse, daß die ganze Cylindrische Oberfläche einem geradewinklichten Vierecke gleich sey, dessen Grundlinie dem ganzen Umkreise der Grundfläche BCB gleich, und dessen Höhe von der Höhe des Cylinders AB nicht verschieden ist.

Oberflächen der geraden Kegel.

[F. 340.] §. 110. Auf eben die Art stellet man sich eine geradelinichte Figur vor, welche einem Theile der Oberfläche eines geraden Kegels ABC gleich ist. Man mache ab der Seite des Kegels AB gleich, und setze an dieselbe durch b die Perpendicularlinie bc von unbestimter Länge. Man nehme in dem Umkreise der Grundfläche des Kegels BD so klein, daß sie von einer geraden Linie nicht unterschieden werden kan, und dieser BD mache man die bd gleich. Man ziehe die geraden Linien AD in der Oberfläche des Kegels, wie ad in der Ebene, in welcher ab, bc liegen; so ist ABD ein geradelinichtes Dreyeck, dessen Höhe von der Länge der Seite des Kegels nicht verschieden ist. Denn eigentlich ist das Dreyeck BAD gleichschenklicht, weil AB=AD. Dieses verhält sich bey einem geraden Kegel jederzeit so; und demnach fället die Höhe dieses Dreyeckes in die Mitte zwischen AB und AD, und theilet BD in zwey gleiche Theile. Nun aber ist XI, 52. eine jede gerade Linie, die von A an BD, oder sonst an den Umkreis der Grundfläche kan gezogen werden, der Seite des Kegels, und folgends auch der ab gleich. Also haben die Dreyecke ABD, abd gleiche Höhen. Es ist aber auch die Grundlinie BD der Grundlinie bd gleich, und folgends ist auch das Dreyeck abd gleich dem Dreyecke ABD, IX, 14. Fähret man nun wieder in dieser Betrachtung weiter fort, und machet in Gedanken auch de=DE, und ziehet sodann AE, ae; so siehet man, vermittelst eben der Schlüsse, daß auch die Dreyecke ADE, ade gleich sind, weil sie sowohl gleiche Grundlinien DE, de als auch gleiche Höhen haben. Denn die Höhe des Dreyecks ADE ist wieder die Seite des Kegels; und die Höhe des Dreyeckes ade ist die Perpendicularlinie ab, welche man der Seite des Kegels gleich gemacht hat. Wenn nun durch die Wiederhohlung dieser Schlüsse endlich bf dem Bogen BF gleich wird, und man ziehet AF, af, so siehet man, daß das Dreyeck abf dem Theile der Conischen Oberfläche ABF gleich seyn müsse, weil ABD=abd, ADE=ade und so fort, und also die Summen dieser Theile ABF, abf nicht verschieden seyn können.

§. 111. Also ist ein jeder Theil einer Conischen Oberfläche ABF, welcher von zwo Seiten derselben AB, AF, und einem Theile des Umkreises

der Grundfläche BF beschlossen wird, der zwischen diesen zwo Seiten lieget, einem Dreyecke a b f gleich, dessen Höhe ab der Seite des Kegels, und dessen Grundfläche b f dem gedachten Bogen BF gleich ist. Dieses ist jederzeit richtig, es mag der Bogen BF groß oder klein seyn: also muß es auch statt haben, wenn man an statt des BF den ganzen Umkreis der Grundfläche des Kegels nimmet. In diesem Falle aber bekommet man auch die ganze Oberfläche des Kegels: und demnach ist die ganze Oberfläche eines geraden Kegels einem Dreyecke gleich, dessen Höhe der Seite des Kegels, und dessen Grundlinie dem Umkreise der Grundfläche desselben, gleich ist.

[*Fig.* 341.] §. 112. Hat man nun auf die Art dem Theile der Conischen Oberfläche ABF das Dreyeck a b f gleich gemachet, aber auch den Kegel ABC mit einer Fläche, die der Grundfläche BC parallel lieget, geschnitten, und durch diesen Schnitt, wie nothwendig geschehen muß, einen Cirkel DE hervor gebracht, dessen Bogen DG zwischen den zwo Seiten des Kegels AB und AF lieget: so kan man ohne große Weitläuftigkeit eine geradelinichte und ebene Figur schaffen, welche der gekrümmeten Figur DBFG gleich ist, die von den beyden Cirkelbogen DG und BF, und von den geraden Linien DB und GF in der Oberfläche des Kegels beschlossen wird. Man mache nur in dem bereits verfertigten Dreyecke a b f die a d der AD gleich, und ziehe d g mit der b f parallel, so ist das Viereck d b f g der Figur DBFG gleich.

§. 113. Man siehet, daß, wenn dieses erwiesen werden sol, nichts zu zeigen sey, als daß das Dreyeck a d g der gekrümmeten Figur ADG gleich sey. Denn man hat vorhero a b f der ABF gleich gemachet. Ist nun auch a d g = ADG, und man ziehet gleiches von gleichem ab, so bleibet allerdings a b f — a d g = ABF — ADG; das ist, wie man aus der Figur siehet, DBFG = d b f g. Wiederum, wenn man beweisen sol, daß a d g der ADG gleich sey: so hat man nur zu zeigen, daß d g dem Bogen DG gleich sey. Denn wenn die gerade Linie d g dem Bogen DG gleich ist, so folget allerdings XI, 111. daß auch das Dreyeck a d g der gekrümmeten Oberfläche ADG gleich seyn werde, weil man auch a d der AD gleich gemachet hat. Dieses aber, daß d g = DG, siehet man ein, wenn man in der Grundfläche des Kegels BC an dem Mittelpuncte H die geraden Linien BH und FH ziehet, welche mit der Axe des Kegels AH die Dreyecke ABH, AHF einschließen werden. Diese Dreyecke ABH, AHF schneiden die Fläche des Cirkels DEG in den geraden Linien DI und IG, deren erstere D I der BH, und die zwote IG der HF parallel lieget, also ist auch der Winkel DIG dem Winkel BHF gleich, X, 59. Weil aber das Punct I;

in

in welchem die Axe AH den Cirkel DEG durchsticht, der Mittelpunct dieses Cirkels ist, wie aus dem Beweise folget, durch welchen gezeiget worden ist, daß der Schnitt eines Kegels, welcher seiner Grundfläche parallel lieget, ein Cirkel sey, XI, 54: so ist DIG ein Ausschnitt des Cirkels DGE, gleich wie BHF ein Ausschnitt des Cirkels BFC ist, welcher die Grundfläche abgiebet, und diese Ausschnitte DIG, BHF sind einander ähnlich, VII, 52. Folgends hat die Proportion BH:DI=BF:DG ihre Richtigkeit, VII, 53. Nun aber ist auch BH:DI=AB:AD; wenn man also die letzteren dieser Verhältnisse an statt der ersteren in der vorigen Proportion setzet, so erlangt man AB:AD=BF:DG. Es ist aber auch in dem Dreyecke abf, ab:ad=bf:dg, VII, 12. und ab=AB, ad=AD, bf=BF, das ist, die drey ersteren Glieder der Proportionen, die wir eben gezeiget haben, sind einander gleich: also können auch die vierten Glieder derselben nicht verschieden seyn, sondern man hat auch dg=DG, welches zu erweisen war.

§. 114. Es ist dieser Beweis fast etwas zu weitläuftig gerathen. Wir hätten kurz sagen können ABFH sey eine Art eines Cörpers der zweyten Art, dessen Grundfläche der Ausschnitt BHF ist: und also müsse die Figur DIG, welche durch den Schnitt zum Vorschein kommet, der mit der Grundfläche parallel geführet wird, dieser Grundfläche BHF ähnlich, und folgends ebenfals der Ausschnitt eines Cirkels seyn. Denn dieses ist die allgemeine Eigenschaft aller Cörper der zweyten Art, XI, 49. Man mag nun aber den Beweis auf diese oder jene Art geführet haben, so siehet man klar, daß der Theil der gekrümmeten Oberfläche eines geraden Kegels DBFG einem Vierecke dbfg gleich sey, dessen zwo entgegen gesetzte Seiten bf, dg parallel liegen, und deren erstere bf so groß ist als der Bogen BF, und die zwote dg so groß als der Bogen DG. Die Entfernung aber der Seite dg von der ihr entgegen gesetzten bf, das ist, die Seite db, ist der geraden Linie DB gleich, welche in der Oberfläche des Kegels, zwischen den Bogen DG und BF, kan gezogen werden. Dieses ist wiederum von allen Oberflächen solcher Kegel, von welchen man einen Theil ADGE abgenommen hat, richtig. Gehet aber eine dergleichen Oberfläche zwischen den Umkreisen der Cirkel DEG, BFC rings herum, von DB, zum Exempel, bis wieder an DB; so muß man an statt der dg eine gerade Linie setzen, welche dem ganzen Umkreise DGED gleich ist, und an statt der bf eine andere, welche so groß ist als der Umkreis EFCB; das übrige alles bleibet, wie gewiesen worden ist.

[*Fig.* 342.] §. 115. Es ist leicht das Viereck dbfg in ein gera-

dewinklichtes Viereck zu verwandeln, und also ein geradwinklichtes Viereck zu schaffen, welches einem Theile der Conischen Oberfläche von der Art, welche wir betrachten, gleich ist. Ja man kan dieses unmittelbar, und zwar mit noch größerer Leichtigkeit thun, als wir das Viereck dbfg zu verzeichnen gewiesen haben. Man theile db in h in zwey gleiche Theile, und ziehe hi den bf und dg parallel, bis an die af; so ist das geradewinklichte Viereck, welches man aus db und hi zusammen setzen kan, dem Vierecke dbfg gleich: wenn auch hier, wie wir angenommen haben, der Winkel bey b gerade ist. Man machet dieses Viereck, wenn man durch i die kl der db parallel ziehet, und dg bis an diese Seite in k verlängert. Daß dieses Viereck dblk dem Vierecke dbfg gleich sey, siehet man daraus leicht, weil die Dreyecke gki, ilf gleich sind. Es ist in diesen Dreyecken ki=dh=hb=il, die Winkel derselben bey i sind gleich, und die Winkel bey k und l sind gerade. Also haben diese Dreyecke gki, ilf zween gleiche Winkel, und eine Seite des einen ist einer Seite des andern gleich. Nun aber entstehet das Viereck dblk aus dem Vierecke dbfg, wenn man von diesem das Dreyeck ilf abschneidet, und an dessen Stelle das Dreyeck gik anstücket. Da also dasjenige, so man weggenommen hat, demjenigen gleich ist, so an dessen Stelle angesetzet wird, so ist allerdings das Viereck dblk dem Vierecke dbfg gleich.

§. 116. Um nun aber dieses geradewinklichte Viereck bk, welches dem Theile BG der Conischen Oberfläche gleich ist, auf einmal zu machen, oder die gerade Linie hi, welche der Grundlinie dieses Viereckes bl gleich ist, auf einmal zu finden, theile man nur DB in zwey gleiche Theile mit H, und ziehe durch H in der Oberfläche des Kegels zwischen DB und GF den Cirkelbogen HI; oder stelle sich vor, daß durch H der Kegel mit der Grundfläche BC parallel geschnitten worden sey, und daß durch diesen Schnitt der Bogen HI entstanden: so ist dieser Bogen HI der geraden Linie hi gleich. Und dieses siehet man aus dem so erwiesen worden ist, gar leicht ein. Denn gleichwie daraus, daß bf=BF, ab=AB, und ad=AD, hat können geschlossen werden, daß dg dem Bogen DG gleich sey: XI, 113. also kan man auch, wenn man das übrige behält, an statt dg = DG aber setzet ah=AH, auf eben die Weise schließen, es müsse hi dem Bogen HI gleich seyn. Nun aber ist db=DB in h in zwey gleiche Theile geschnitten worden, und DB ist in H eben so getheilet: es ist demnach dh=DH. Da nun auch ad=AD, so ist allerdings ad+dh=AD+DH, das ist, ah=AH; folgends ist an der Gleichheit der Linien HI, hi keinesweges zu zweifeln.

§. 117.

§. 117. Ist aber der Theil der Oberfläche des Kegels DGFB einem geradewinklichten Vierecke gleich, dessen Grundlinie dem Bogen HI, und dessen Höhe der geraden Linie DB gleich ist, so muß auch die ganze gekrümmete Oberfläche, die zwischen den ganzen Umkreisen der Cirkel DGED und BFCB enthalten ist, einem geradewinklichten Vierecke gleich seyn, welches ebenfals zur Höhe die DB hat, und auf einer geraden Linie stehet, die dem ganzen Umkreise des Cirkels, von welchem der Bogen HI einen Theil abgiebet, gleich ist. Da dieser Cirkel entstehet, wenn man den Kegel durch das Punct H, welches von D und B gleich weit entfernet ist, mit der Grundfläche desselben parallel schneidet; so ist die Fläche desselben von der Fläche DGE eben so weit entfernet, als von der Fläche BFC.

[F. 343.] §. 118. Hieraus nun lässet sich ein Theil der Oberfläche eines abgekürzeten Kegels, dergleichen wir bisher betrachtet haben, oder auch die ganze Oberfläche eines abgekürzeten Kegels, mit der Oberfläche eines Cylinders vergleichen; und zwar ist man im Stande zwo gerade Linien zu schaffen, welche sich gegen einander, wie diese Oberflächen verhalten: unter den Umständen nemlich, die wir gleich angeben werden. Es sey ABC der Ausschnitt eines Cirkels, und auf demselben stehe der gerade Cörper der ersten Art ABCDEF, welcher ein Theil eines Cylinders seyn wird. Man beschreibe in der Ebene ABC um den Mittelpunct C mit einer beliebigen Oefnung des Cirkels, den Bogen GH zwischen ACB, und mit einem kleineren Halbmesser beschreibe man um D innerhalb EDF den Bogen IK. Wenn man nun auch IG, KH ziehet, so siehet man, daß der Cörper DCHGIK ein Theil eines abgekürzeten Kegels seyn werde, wenn man nur auch die Oberfläche IKHG sich also gebogen vorstellet, wie die Oberfläche eines Kegels gebogen seyn muß. Die Oberfläche nun dieses Cörpers IGHK wollen wir mit der Cylindrischen Oberfläche ABFE vergleichen. Man theile zu dem Ende DC in L in zwey gleiche Theile, und ziehe die Ebene LMN mit der Grundfläche ABC parallel, welche die Cylindrische Oberfläche in dem Bogen MN und die Conische in dem Bogen OP schneiden wird. Man ziehe auch KQ der DL oder FM parallel, und setze auf KH in der Fläche BCDF die PR perpendicular, welche die DC in R erreiche.

§. 119. Die Fläche LMN wird auch die gerade Linien KH und FB in zwey gleiche Theile theilen; X, 60. und da also der Bogen OP durch P, die Mitte der Seite KH gehet, so wird die Conische Oberfläche IGHK einem geradewinklichten Vierecke gleich seyn, dessen Seiten sind der Bogen OP, oder eine gerade Linie, die demselben gleich ist, und KH, XI, 116. Nun ist die Cylindrische Oberfläche EB ebenfals einem geradewinklichten

Vierecke gleich, dessen Seiten sind AB = NM und FB, XI, 108. und die Verhältniß jeder Vierecke von dieser Art ist aus den Verhältnissen ihrer Seiten zusammen gesetzt, IX, 47. Demnach kommet die Verhältniß der IGHK zu der EABF, wenn man die Verhältniß KH : FB, der Verhältniß OP : MN zusetzet. An die Stelle der ersten dieser Verhältnisse KH : FB kan man die Verhältniß der Helften dieser Linien KP : FM nehmen, oder auch KP : KQ, weil KQ = FM. Was aber die Verhältniß OP : NM anlanget, so ist dieselbe der Verhältniß der Halbmesser PL : ML gleich, weil die Ausschnitte MLN, PLO gleichwinklicht sind; VII, 53. folgends wird auch die Verhältniß IGHK : EABF aus den zwo Verhältnissen KP : KQ und PL : ML zusammen gesetzet. Da nun aber der Winkel KPR gerade ist, so ist LPR die Ergänzung des Winkels KPL zu einem geraden Winkel. Und weil das Dreyeck PKQ bey Q ebenfals geradewinklicht ist, so ersetzet auch PKQ dasjenige, was dem Winkel LPK an einem geraden Winkel fehlet: denn die zween spitzige Winkel eines geradewinklichten Dreyeckes geben allezeit einen geraden Winkel, wenn man sie zusammen setzet. Demnach ist der Winkel LPR dem Winkel PKQ gleich, und also sind die rechtwinklichten Drenecke PLR, PKQ einander ähnlich, VII, 23. die Verhältniß der Seiten PK : KQ ist der Verhältniß PR : PL gleich, und man kan die letztere dieser Verhältnisse an statt der ersteren in der Zusammensetzung gebrauchen. Thut man aber dieses, in dem Falle welchen wir vor uns haben, so findet man, daß die Verhältniß der Oberflächen IGHK : EABF, welche aus den Verhältnissen KP : KQ und PL : ML zusammen gesetzet ist, auch aus den Verhältnissen PR : PL, und PL : ML zusammen gesetzet werden könne. Da aber in diesen Verhältnissen PL einmal als das zweyte, und das andere mal als das erste Glied vorkommet: so ist die Verhältniß PR × PL : PL × ML mit der Verhältniß PR : ML einerley, VIII, 40. und also auch IGHK : EABF = PR : ML, oder PR : BC.

§. 120. Ist nun also PR der BC gleich, so ist auch die Conische Oberfläche IGHK der Cylindrischen EABF gleich. Und man kan also, nachdem man PR gezogen hat, gar leicht eine Cylindrische Oberfläche machen, welche so groß sey als die Conische IGHK, weil man allezeit die CB der PR gleich nehmen, und sodann das übrige ausmachen kan wie die Zeichnung weiset. Man siehet leicht, daß dieses auch richtig sey, wenn man vor die Grundflächen halbe oder ganze Cirkel annimmet. Ja weil nichts daran gelegen ist, wie groß man die obere Fläche des abgekürzeten Kegels IDK annehmen will, so muß auch eben der Beweis sich auf den Fall erstrecken, wenn IDK gar keine Größe hat, und also von dem Kegel nichts

abge-

abgeschnitten worden, sondern derselbe ganz geblieben ist. Es ist aber nicht nöthig, daß wir uns hiebey aufhalten, weil die Oberflächen der Kegel bereits betrachtet worden sind, und wir nur in dasjenige zurück fallen würden, so wir schon abgehandelt haben, wenn wir diesen Sätzen weiter nachhängen wolten.

Oberflächen der Kugeln.

[*Fig.* 344.] §. 121. Wir wollen also weiter gehen, und uns nach und nach der letzten Betrachtung nähern, die wir hier zu machen haben, welche die Oberfläche der Kugel und der Theile derselben zum Inhalte hat. Man setze die Theile verschiedener Kegel ABCDEF, DEFGHI, IGHK, dergleichen wir bishero betrachtet haben, und deren Grundflächen alle einander ähnlich sind, dergestalt auf einander, daß die Axen derselben die gerade Linie CK geben, und die geraden Linien BF, FG, GK einen Theil eines regulären Vieleckes BFGK ausmachen, dessen Mittelpunct C ist. Es wird die Perpendicularlinie, welche, wie LC, auf der Mitte einer dieser Seiten stehet, nach dem Mittelpunct C gehen, V, 23. und alle dergleichen Perpendicularlinien werden einander gleich seyn, V, 33. Man setze auf die Grundfläche ABC auch den Cörper der ersten Art ABCKMN, und verlängere die Grundflächen der abgekürzeten Kegel, bis sie die gekrümmete Oberfläche ABNM in OP, QR schneiden: so wird sich die Conische Oberfläche ABFE zu der Cylindrischen ABRQ verhalten, wie LC zur BC, und die Conische Oberfläche EFGI wird zu der Cylindrischen QRPO eben die Verhältniß LC:BC haben, weil die Perpendicularlinie auf die Mitte der FG, die bis in C reichet, der LC gleich ist: und aus eben der Ursache wird auch die Conische Oberfläche IGK sich zu der Cylindrischen MNOP verhalten wie LC:BC.

§. 122. Betrachtet man diese Proportionen:

ABFE : ABRQ = LC : BC
EFGI : QRPO = LC : BC
IGK : OPNM = LC : BC

etwas genauer, so siehet man, daß man auch jede zwey oder drey oder mehrere der ersteren Glieder zusammen setzen könne, ohne die Verhältniß zu verändern, weil die Verhältniß jeder dieser Theile der Verhältniß LC:BC gleich ist, VI, 112. Es ist nemlich, wenn man die ersteren Glieder der zwo ersteren Proportionen, wie sie unter einander stehen, zusammen setzet: AF+FI : AR+RO = LC : BC, und wenn man die ersteren Glieder aller Proportionen addiret, so wird:

AF+FI+IGK : AR+RO+ON = LC:BC, und dieses beständig. Woraus man siehet, daß auch ein jeder Theil der gekrümmeten Oberfläche ABK sich zu einem jeden Theile der gekrümmeten Oberfläche ABNM verhalte, wie sich LC zur BC verhält, wenn diese Theile zwischen zwoen der Flächen MKN, OHP, QDR und so fort, liegen, man mag diese zwo Flächen übrigens annehmen wie man wil. Als, der Theil der einen Oberfläche KIEFGK lieget mit dem Theile der andern MQRN zwischen den zwo Flächen MKN und QDR. Also verhält sich KIEFGK zu MQRN, wie LC zur BC.

[*Fig.* 345.] §. 123. Alles dieses ist wieder richtig, es mag der Bogen AB so groß seyn als man will: er kan also auch ein ganzer Cirkelkreis seyn, in welchem Falle man an die Stelle des Körpers ABCKMN einen Cylinder bekommet, und an statt der ABCDEF und so weiter, abgekürzete Kegel. Wir haben diese Cörper in der 345 Zeichnung vorgestellet. ABDE ist der Cylinder, und ABF der aus abgekürzten Kegeln dergestalt zusammen gesetzte Cörper, daß die Seiten derselben die Helfte des Umkreises eines regulären Vielecks AFB ausmachen. Die ebene Fläche GH, welche zween dieser Kegel von einander absondert, schneidet die Oberfläche des Cylinders bey IK: und es verhält sich die Oberfläche GFH zur Oberfläche EIKD wie CL zur CA. Eben so verhält sich auch AGHB zur AIKB, und die ganze Oberfläche AFB zur ganzen Oberfläche EABD.

[*Fig.* 344.] §. 124. Weil CL, die Entfernung einer Seite des Vieleckes von dem Mittelpunete C, immer kleiner ist als BC, die Entfernung der Spitze eines Winkels desselben, oder der Halbmesser des Cirkels, in welchem das Vieleck kan beschrieben werden: so ist auch die Oberfläche KAB kleiner als die Oberfläche ABNM, und eben so ist es mit allen Theilen dieser Oberflächen beschaffen, die sich wie LC:BC gegen einander verhalten. Und zwar ist die Oberfläche KAB desto kleiner als ABNM, je weniger Seiten BFGK hat. Denn je kleiner die Zahl der Seiten eines regulären Vieleckes ist, und je größer also diese Seiten sind, je weniger sind dieselben von dem Mittelpunct entfernet, V, 37. Und es wird also LC in Ansehung der BC desto kleiner, je weniger dieser Seiten in BFGK sind. Im Gegentheile wächset die LC, wenn der Seiten mehrere werden, und kommt der BC nach und nach ziemlich nahe, wenn AFGK sehr viele Seiten bekomt. In diesem Falle muß also auch die Oberfläche KAB der Oberfläche MABN gar nahe kommen. Sind derer Seiten in BFGK gar sehr viele, so ist LC kaum mehr von dem Halbmesser BC zu unterscheiden, und demnach auch die Oberfläche KAB ohne merklichen Fehler so groß, als die Oberfläche MABN.

[Fig. 346.] §. 125. Vollkommen gleich aber wird die Oberfläche KAB der cylindrischen Oberfläche MABN nicht eher, als bis LC der BC gleich wird, welches geschiehet, wenn der Seiten in BFGK unendlich viele werden, das ist, wenn BFGK nicht ein Theil des Umkreises einer geradelinichten Figur ist, sondern der vierte Theil eines Cirkels, wie dieses in der 346 Zeichnung vorgestellet wird. In diesem Falle ist KABC ein Theil einer Kugel, dergleichen wir unter den Cörpern der dritten Art betrachtet haben. Wenn man nun auch hier auf ACB den Ausschnitt eines Cylinders ABCKMN setzet, dessen Höhe dem Radius der Grundfläche gleich ist, und ziehet eine Fläche QRD nach Belieben den Grundflächen ABC, MNK parallel, welche die Oberfläche KAB in EF, und die Oberfläche MABN in QR, schneidet: so sind die gekrümmeten Oberflächen KEF, und MQRN einander vollkommen gleich, und EABF ist gleich der QABR, die ganze KAB aber der ganzen cylindrisch-gekrümmeten Oberfläche MABN.

[Fig. 347.] §. 126. Man siehet wieder, daß dieses auch von einer halben Kugel AFB richtig seyn müsse, auf deren Grundfläche AB der Cylinder ABDE stehet, dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel FC gleich ist. Auch hier ist der Theil der Oberfläche der Kugel GFH, der Oberfläche des Cylinders EIKD gleich, man mag die Fläche IK der Grundfläche AB parallel geleget haben, durch welches Punct der EA man will, und der Theil der Oberfläche der Kugel AGHB ist so groß, als die cylindrische Oberfläche AIKB; demnach ist auch die Oberfläche der halben Kugel AFB der ganzen cylindrischen Oberfläche EABD gleich. Und weil überhaupt jede Oberfläche eines geraden Cylinders einem geradewinklichten Vierecke gleich ist, dessen Grundlinie dem Umkreise der Grundfläche des Cylinders gleich ist, und welches mit dem Cylinder einerley Höhe hat, XI, 108. so ist auch ein jeder Theil der Oberfläche einer halben Kugel, als GFH, einem rechtwinklichten Vierecke gleich, dessen Grundlinie dem Umkreise der Grundfläche der halben Kugel AB, und dessen Höhe der Höhe FL des Theiles der Kugel, gleich ist, zu welchem diese Oberfläche gehöret. Eben dieses ist auch von der Oberfläche des Theils AGHB richtig. Sie ist einem geradewinklichten Vierecke gleich, dessen Grundlinie wieder dem Umkreise AB gleich ist, und die Höhe der CL.

[F. 348.] §. 127. Man schließet hieraus leicht, daß auch die ganze Oberfläche einer Kugel FGCH der Oberfläche des Cylinders EABD gleich sey, dessen Höhe EA sowol als der Durchmesser seiner Grundfläche AB dem Durchmesser der Kugel gleich ist: und daß eine jede Fläche IK, welche der Grundfläche AB des Cylinders parallel ist, in welchem man eine Kugel

gesetzt hat, die Oberfläche der Kugel in zwey Theile GFH, HCG theile, deren ersterer der Oberfläche des Cylinders EIKD, und der zweyte der Oberfläche des Cylinders IABK gleich ist: und was dergleichen kleine Sätze mehr sind.

§. 128. Wil man nun ein geradewinklichtes Viereck schaffen, welches der Oberfläche des Cylinders EA*B*D gleich sey; so muß man zur Grundlinie desselben eine gerade Linie nehmen, welche dem Umkreise des Cirkels *E*D oder A*B* gleich ist, und welches zur Höhe die Höhe des Cylinders EA hat. Da nun aber der Cirkel A*B* einem geradewinklichten Viereckе gleich ist, dessen Grundlinie so groß ist als der Umkreis des Cirkels A*B*, und dessen Höhe dem vierten Theile des Durchmessers eben des Cirkels AB gleich ist: IX, 36. so siehet man, daß das der ganzen Oberfläche der Kugel FGCH gleiche Viereck viermal so groß seyn werde, als das Viereck, welches so groß ist als der Cirkel A*B*. Hieraus aber folget, daß auch die Oberfläche der Kugel viermal so groß sey als der Cirkel A*B*, dessen Durchmesser dem Durchmesser der Kugel gleich ist.

§. 129. Wir schließen hieraus ferner, daß die Oberflächen zwoer Kugeln sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser gegen einander verhalten. Denn die Cirkel, deren Durchmesser den Durchmessern der Kugeln gleich sind, verhalten sich gegen einander wie diese Quadrate der Durchmesser. Und wenn man einen jeden dieser Cirkel viermal so groß machet als er war, so wird dadurch die Verhältniß nicht geändert, VI, 114. Es werden aber dadurch die Cirkel den Oberflächen der Kugeln gleich, welche eben die Durchmesser haben.

§. 130. Es entstehet ein Cirkel von der Größe des A*B* durch einen jeden Durchschnitt der Kugel, vermittelst einer ebenen Fläche, welche durch den Mittelpunct der Kugel gehet, und ein jeder solcher Cirkel theilet die Kugel in zwo Helften. Wir müssen dieses nicht allein zur völligen Ergänzung des vorhergehenden bemerken: sondern wir haben es auch wegen eines ferneren Nutzens zu betrachten, welcher einige Käntniß der Linien, die in der Oberfläche der Kugel können gezogen werden, und der Figuren, welche zum Vorscheine kommen, wenn man eine Kugel auf verschiedene Art schneidet, erfordern. Was gesagt worden ist, wird dadurch, wenn wir werden bewiesen haben, daß ein jeder Schnitt der Kugel, dessen Ebene durch den Mittelpunct derselben gehet, einen Cirkel, der dem AB in allen Stücken gleich ist, zum Vorscheine bringe, vollständig gemacht, indem daraus folget, daß kein Cirkel, welcher durch den Mittelpunct der Kugel gehet, vor einen andern solchen Cirkel einigen Vorzug haben, sondern daß,

was

was wir in Ansehung der Größe der Kugel und ihrer Oberfläche bewiesen haben, allezeit richtig sey, man mag die Kugel geschnitten haben, wie man wil.

§. 131. Der Satz selbst aber, daß alle Schnitte, in deren Flächen der Mittelpunct der Kugel befindlich ist, Cirkel zum Vorscheine bringen, die einander und dem Cirkel AB gleich sind, und die Kugel in zween gleiche Theile theilen, kan auch als an sich bekant angesehen werden; weil, da die Oberfläche der Kugel von allen Seiten auf einerley Art gekrümmet ist, und alle Puncte der Oberfläche derselben von dem Mittelpuncte gleich weit abstehen, man sich nicht vorstellen kan, wie zween Schnitte, die in einer Kugel vollkommen auf einerley Art geschehen, von verschiedener Größe oder nicht Cirkelrund seyn, oder die Kugel anders, als in zween gleiche Theile theilen solten. Es geschehen aber alle Schnitte, die durch den Mittelpunct gehen, vollkommen auf einerley Art. Indessen ist es auch nicht schwer einen recht bündigen Beweis hievon zu geben. Wir versparen aber denselben in die folgende Betrachtung.

Zwölfter Abschnitt.

Von den Kugelschnitten.

Die Figur dieser Schnitte.

Fig. 349. §. 1.

Man stelle sich vor, daß die Kugel ABCD, deren Mittelpunct E ist, durch AGCH dergestalt geschnitten sey, daß der Mittelpunct der Kugel E in die Ebene dieses Schnittes AGCH falle: so siehet man leicht, daß eben dieses Punct E auch von allen Puncten des Umkreises AGCH gleich weit entfernet seyn werde. Denn da dieser Mittelpunct E von allen Puncten der Oberfläche der Kugel gleich weit entfernet ist, so muß er nothwendig auch von allen Puncten des Umkreises AGCH gleich weit abstehen, weil dieselbe nothwendig in die Oberfläche der Kugel fallen. Es ist also AGCH ein Cirkel, und sein Mittelpunct fället in E, den Mittelpunct der Kugel. Schneidet man nun eben die Kugel auch mit der Fläche BGDH, so ist von dieser Figur eben das zu sagen, was bey der vorigen angemerket worden ist. Es ist also BGDH ebenfals ein Cirkel, welcher dem vorigen gleich seyn muß, weil seyn Radius, sowohl als der Radius des erstern zugleich der Radius der Kugel ist, und der Mittelpunct dieses Cirkels fället wieder in E. Wir gehen jetzt nicht weiter. Daß ein jeder dieser Cirkel die Kugel in zwo Helften theile, wird aus den Sätzen folgen, die wir wegen ihres besonderen Nutzens aus dem gegenwärtigen schließen müssen.

§. 2. Die Flächen der Cirkel AGCH und BGDH schneiden einander nothwendig innerhalb der Kugel; denn der Mittelpunct E lieget in einer jeden dieser Flächen, welches nicht seyn könnte, wenn sie einander nicht innerhalb der Kugel schnitten: also müssen die Umkreise derselben einander ebenfals schneiden, weil diese beyde in der Oberfläche der Kugel liegen. Man verknüpfe die Puncte H und G, in welchen die Umkreise einander schneiden, vermittelst der geraden Linie HG. Weil nun diese gerade Linie durch die beyden Puncte H, G gehet, welche die Flächen der Cirkel AGCH, BGDH gemeinschaftlich haben, so schneiden diese Flächen einander in der

Linie

Linie HG, und alle übrige Puncte, welche die beyden Flächen gemeinschaftlich haben, fallen in diese Linie, X, 10. Nun ist der Mittelpunct E den beyden Cirkeln gemeinschaftlich: es fället also E in die gerade Linie HG, oder HG gehet durch E, den Mittelpunct des Cirkels AGCH, welcher zugleich der Mittelpunct des Cirkels BGDH ist. Also ist GH ein Durchmesser sowohl des einen als auch des andern dieser Cirkel, und HAG, HBG sind halbe Cirkel. Zween Cirkel also, deren Flächen durch den Mittelpunct einer Kugel gehen, theilen einander in zwo gleiche Helften: die Bogen HAG, HBG, GCH, GDH aber sind Helften ihrer Umkreise.

[*Fig.* 350.] §. 3. Man schneide die Kugel ABCD, deren Mittelpunct E ist, nochmals mit einer Ebene AGCH, die durch den Mittelpunct E gehet, und ziehe durch E die gerade Linie BD auf die Fläche des Cirkels AGCH perpendicular. Durch diese Linie BD, lege man eine andere Fläche wie man wil, welche die Kugel ebenfals schneiden, und durch diesen Schnitt einen Cirkel DGBH zum Vorschein bringen wird, welcher durch den Mittelpunct E gehet. Denn da die ganze DB in der Fläche des Schnittes DGBH lieget, und E in der DB befindlich ist, so muß allerdings auch E in der Fläche des Cirkels DGBH liegen. Es wird demnach dieser Cirkel von dem vorigen AGCH in zwey gleiche Theile getheilet, und der Bogen GDH ist die eine Helfte seines Umkreises, GBH aber die andere. Weil aber auch DE mit der GH rechte Winkel machet, indem sie auf der Ebene AGCH perpendicular stehet, X, 29. so sind die Bogen GD, DH, BG, BH Quadranten. Und hieraus siehet man, wenn man sich des Begriffes erinnert, welchen wir XI, 80. von der halben Kugel gegeben haben, daß AGDHC sowohl als AGBHC halbe Kugeln, und folgends einander gleich sind. Denn was von dem Cirkel DGBH gezeiget worden, ist von allen Cirkeln richtig, deren Flächen durch DB gehen, weil der Beweis weder auf diesen oder jenen eingeschränket ist.

[*Fig.* 351.] §. 4. Hieraus nun schließen wir weiter, daß, man mag eine Kugel mit einer ebenen Fläche schneiden wie und wo man wil, die Figur des Schnittes jederzeit ein Cirkel seyn werde. Denn man schneide die Kugel ABCD, deren Mittelpunct E ist, vermittelst der ebenen Fläche FG: so kan man eben die Kugel auch durch den Mittelpunct E mit der Ebene FG parallel schneiden, und ADC wird dadurch eine halbe Kugel, deren Grundfläche die AC ist. Nun haben wir XI, 80. gesehen, daß nicht nur in einer halben Kugel, sondern auch in einem jeden Cörper der dritten Art, der Schnitt, welcher der Grundfläche parallel laufet, der Grun d-

fläche ähnlich sey. Also ist FG der Figur AC ähnlich, und es kan FG keine andere als die Figur eines Cirkels haben, weil AC ein Cirkel ist.

§. 5. Es fließet aber auch aus eben dem Beweise, XI, 79. auf welchen wir uns hier gründen, daß die gerade Linie DB, welche auf die Ebene des Cirkels AC perpendicular ist, und durch dessen Mittelpunct E gehet, auch durch H, den Mittelpunct des Cirkels FG gehen müsse, und daß dieses auch von einem jeden anderen Cirkel IK richtig sey, welcher entstanden ist, indem eben die Kugel ABCD parallel mit der Ebene AC oder FG geschnitten worden. Eben die DB nemlich gehet auch durch L den Mittelpunct dieses Cirkels IK. Aber eben die DB ist auch auf die Flächen FG und IK perpendicular, weil dieselbe der Fläche AC parallel liegen, auf welcher DB perpendicular stehet, X, 51.

§. 6. Schneidet man nun die Kugel durch diese Linie DB, welche nemlich durch den Mittelpunct derselben E gehet, die auf die Flächen der Paralleleirkel AC, FG, IK perpendicular ist, und in welcher folgends die Mittelpuncte dieser Cirkel H und L anzutreffen sind; und bringet durch diesen Schnitt den Cirkel zum Vorscheine, von welchem DMNB eine Helfte vorstellet, nachdem man eben die Kugel bereits vorher vermittelst des Cirkels ABCD geschnitten hat, welcher durch eben die Linie DB gehet: so werden sowol DENCD als auch BENCB Cörper drr dritten Art. Es sind demnach die Schnitte derselben GHM und CEN einander ähnlich, wie auch CEN und KLO, und die Winkel GHM, CEN, KLO sind gleich. Also haben auch die Bogen MG und NC gegen ihre Umkreise einerley Verhältniß, oder es ist MG:GMFG=NC:CNAC, und MG:NC=GMFG:CNAC. Aus eben der Aehnlichkeit der Ausschnitte GHM, CEN, KLO folget auch diese Proportion: MG:NC=HG:EC.

§. 7. Und da oben X, 39. gewiesen worden ist, daß ein jedes Punct einer geraden Linie, welche wie DB auf der Ebene eines Cirkels perpendicular stehet, und durch den Mittelpunct desselben hindurch gehet, von allen Puncten des Umkreises desselben Cirkels gleich weit entfernet sey: so muß auch ein jedes Punct der geraden Linie DB, und folgends auch dasjenige, so in der Oberfläche der Kugel lieget D, von allen Puncten des Umkreises FG gleich weit abstehen: oder die geraden Linien, welche man in dem innern der Kugel von D bis an den Umkreis des Cirkels FG ziehen kan, müssen alle gleich seyn. Eben dieses ist auch von dem Puncte B zu sagen, welches ebenfals in der Oberfläche der Kugel lieget. Aus eben dem Grunde sind auch die Puncte D, B von allen Puncten eines jeden der Umkreise AC, IK gleichweit entfernet, deren Flächen der Fläche FG parallel liegen, XII, 5.

§. 8.

§. 8. Man kan demnach auch den Umkreis des Cirkels FG in der Oberfläche der Kugel beschreiben, wenn man den einen Fuß des Cirkelinstrumentes in D einsetzet, die Spitze des andern aber in F bringet, und sodann eben so verfähret, wie man verfahren muß, wenn man den Umkreis eines Cirkels in einer Ebene beschreiben will. Eben diesen Cirkel kan man auch aus dem Puncte B beschreiben, wenn man die gerade Linie, die man sich zwischen B und F vorstellen kan, eben so herum führet, daß nemlich das eine Ende derselben immer in B bleibet, das andere aber niemals auser der Oberfläche der Kugel fällt. Aus eben den Puncten D und B werden die Umkreise der Cirkel AC, IK auf gleiche Weise beschrieben.

Pole der Kugelschnitte. Axe der Kugel.

§. 9. Die Puncte D, B der Oberfläche der Kugel, welche von allen Puncten des Umkreises des Cirkels FG gleich weit entfernet sind, werden die **Pole** dieses Cirkels genennet. Und wenn wir dieses Wort gebrauchen wollen, so können wir die bereits erwiesene Sätze dergestalt ausdrücken: die Pole eines Cirkels FG sind die Puncte D, B, in welchen die gerade Linie DB, die durch H den Mittelpunct des Cirkels FG, auf die Fläche desselben perpendicular gezogen ist, die Oberfläche der Kugel durchsticht. Und alle Cirkel einer Kugel FG, AC, IK deren Flächen einander parallel liegen, haben eben die Pole D, B: oder, die Pole solcher Cirkel sind nicht verschieden.

§. 10. Es kan aber der Cirkel FG in der Oberfläche der Kugel ABCD, außer den zween Polen D und B, nicht noch mehre andere haben. Dieses siehet man daraus, weil, wenn das Punct D von allen Puncten des Umkreises des Cirkels FG gleich weit entfernet ist, und man nimmet in der Oberfläche der Kugel ein anders Punct, zwischen dem D und dem Umkreise, wo man will, man dasselbe nothwendig auf der einen Seite dem Umkreise näher bringen muß, als D auf eben derselben Seite dem Umkreise lieget, wodurch man es im Gegentheile auf der andern Seite von dem Umkreise weiter entfernet, als D von demselben abstehet. Also kan kein Punct der Oberfläche der Kugel, so zwischen D und dem Umkreise FG lieget, von allen Puncten desselben gleich weit entfernet seyn. Auf eben die Art kan man auch von den Puncten schließen, die zwischen B und eben dem Umkreise FG liegen: es bleiben also D und B die einzigen Pole dieses Umkreises. Ich habe nicht nöthig erachtet einen weitläuftigern Beweis hievon zu geben, weil alles aus demjenigen, so wir von dem Cirkel gesehen haben, überflüssig klar ist.

§. 11. Hieraus schließet man sogleich, daß, wenn man von einem Pole D eines Cirkels FG bis an den andern Pol desselben B die gerade Linie DB ziehet, diese durch den Mittelpunct des Cirkels H gehen, und auf die Fläche desselben perpendicular fallen werde. Denn wäre dieses nicht, so könte man durch den Mittelpunct H eine andere gerade Linie auf den Cirkel FG perpendicular ziehen, welche in der Oberfläche der Kugel die Pole dieses Cirkels bezeichnen würde, XII, 9. und diese letztere Pole könten mit den vorigen D und B nicht zusammen fallen, weil sonst die bereits gezogene DB die Perpendicularlinie durch den Mittelpunct H wäre. Alsdenn aber hätte der Cirkel FG in der Oberfläche der Kugel, außer den beyden D und B, noch irgendwo andere Pole, welches nicht seyn kan.

§. 12. Ist nun die Fläche des Cirkels AC, welcher durch den Mittelpunct der Kugel E gehet, und dessen Mittelpunct folgends ebenfals E ist, dem vorigen FG parallel: so sind die Puncte D und B auch die Pole dieses Cirkels AC, und BD gehet durch den Mittelpunct desselben E, das ist, XII, 1. durch den Mittelpunct der Kugel. Und weil man sich einen Cirkel wie AC vorstellen kan, man mag den Cirkel FG genommen haben, wie man will, so folget, daß eine jede Linie BD, welche zwischen den zween Polen B, D eines Cirkels der Kugel lieget, durch den Mittelpunct der Kugel gehe, und einen Durchmesser derselben abgebe.

§. 13. Eben so ist es auch mit den beyden Cirkeln FG, IK welche einander in der Kugel ABCD parallel liegen, und folgends XII, 9. einerley Pole D und B haben. Die gerade Linie DB, welche diese Pole verknüpfet, gehet durch den Mittelpunct des einen H, und auch durch den Mittelpunct des andern L, und stehet auf den beyden Cirkeln perpendicular. Man kan zwischen den Puncten H, L keine gerade Linie ziehen, welche von der bereits gezogenen HL verschieden wäre, und will man von H nach L eine gerade Linie ziehen, so fället sie mit der bereits gezogenen HL zusammen. Sie gehet also, wenn man sie verlängert, durch die Pole B und D, und fället auf die Flächen der Cirkel FG und IK perpendicular. Setzet man an die Stelle des Cirkels IK den Cirkel AC, dessen Mittelpunct E in den Mittelpunct der Kugel fällt: so siehet man aus eben dem Satze, daß, wenn man von dem Mittelpunete der Kugel E nach H, den Mittelpunct eines nach Belieben angenommenen Cirkels derselben, eine gerade Linie EH ziehet, und dieselbe in D und B verlängert, diese Linie ebenfals auf FG perpendicular fallen, und daß D und B die Pole des Cirkels FG seyn werden.

§. 14. Wir könten noch mehrere dergleichen Sätze machen, welche wir aber, alle unnöthige Weitläuftigkeit zu vermeiden, zusamt denjenigen, die

die wir eben gewiesen haben, in eine allgemeine Betrachtung verfassen und anmerken wollen, daß, wenn die Flächen der Cirkel FG, AC, IK, einander parallel sind, die einzige Linie DB alle diese Eigenschaften zusammen habe, daß sie 1) durch den Pol D, und 2) durch den Pol B, wie auch 3) durch den Mittelpunct der Kugel E, und 4) durch den Mittelpunct H des Cirkels FG, ferner 5) durch den Mittelpunct L des Cirkels IK gehe, und 6) auf die Flächen der Cirkel FG, AC, IK perpendicular stehe, und daß diese Linie DB durch jede zwo dieser Eigenschaften bestimmet werde, so nemlich, daß wenn man eine Linie verlanget, welche zwo der angezeigeten sechs Eigenschaften habe, keine andere als die einzige DB darunter verstanden werden kan. Es folget daraus überhaupt, daß eine Linie, welche zwo der eben erzehleten Eigenschaften hat, die übrigen alle haben werde, und daß, zum Exempel, die Linie, welche aus dem Mittelpuncte der Kugel E, auf die Fläche des Cirkels FG perpendicular fället, durch den Mittelpunct desselben H, wie auch, wenn man sie beyderseits verlängeret, durch die Pole desselben B und D, und durch L, den Mittelpunct, des Cirkels IK, welcher dem vorigen AC parallel lieget, hindurch gehen müsse. Auf eben die Art kan man sich die übrigen Sätze leicht vorstellen, welche in dieser allgemeinen Betrachtung liegen.

§. 15. Der Durchmesser der Kugel DB, welcher auf die Art bestimmet wird, wird auch die **Axe der Kugel** genennet, so oft man ihn auf die Cirkel FG, AC, IK beziehet, deren Pole er mit einander verknüpfet. Man nennet ihn auch öfters die **Axe dieser Cirkel.**

[*Fig.* 352.] §. 16. Wir können nun weiter schließen, daß keine Cirkel einer Kugel, als diejenige, deren Flächen durch den Mittelpunct der Kugel gehen, einen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben können: Oder, daß, wenn man eine Kugel ABCD, deren Mittelpunct E ist, zweymal schneidet, und dadurch die Cirkel AC und BD zum Vorschein bringet, deren einer nicht durch den Mittelpunct E gehet, es mag nun der andere durch diesen Mittelpunct gehen oder nicht, sie unmöglich ein gemeinschaftliches Mittelpunct haben können. Denn sollen sie ein gemeinschaftliches Mittelpunct haben, so muß dasselbe von dem Mittelpuncte der Kugel E verschieden seyn, weil gesetzt wird, daß nicht beyde Cirkel durch den Mittelpunct der Kugel gehen sollen. Man setze also, es sey H der gemeinschaftliche Mittelpunct der beyden Cirkel AC und BD, und ziehe von dem Mittelpuncte der Kugel E an H die gerade Linie EH. Es fließet aus demjenigen, so eben gezeiget worden ist, daß diese EH auf die Fläche des Cirkels BD perpendicular seyn werde, weil sie durch den Mittelpunct der Kugel E, und

durch den Mittelpunct des Cirkels H gehet, XII, 14. Da aber eben dieser H auch der Mittelpunct des Cirkels AC ist, so stehet eben die EH auch auf der Fläche des Cirkels AC perpendicular. Das ist, die einzige gerade Linie EH ist auf die zwo Flächen BD und AC perpendicular, welche einander schneiden. Dieses ist nicht möglich X, 36. also kan weder H noch ein anderer Punct der gemeinschaftliche Mittelpunct der Cirkel AC, BD seyn; und diese Cirkel haben also keinen gemeinschaftlichen Mittelpunct.

§. 17. Demnach können auch zween solche Cirkel, deren Flächen nicht beide durch den Mittelpunct der Kugel gehen, einander nicht in gleiche Theile theilen. Dieses ist so zu verstehen: es ist nicht möglich, daß die beiden Cirkel AC und BD, deren Flächen nicht beyde durch den Mittelpunct der Kugel E gehen, einander vermittelst der geraden Linie GF so theilen solten, daß sowohl GAF als auch GBF halbe Cirkel wären. Beydes zugleich kan ohnmöglich seyn: denn daß GBF allein ein halber Cirkel sey, wenn GAF größer oder kleiner ist, als ein halber Cirkel, ist gar wohl möglich; und wir werden so gleich einen Umstand angeben, bey welchem dieses allezeit zutrift. Daß aber, bey der gesetzten Bedingung, nicht GAF und GBF zugleich halbe Cirkel seyn können, siehet man daraus, weil, wenn sie es wären, GF ihr gemeinschaftlicher Durchmesser seyn müste. Wäre dieses, so müsten sie auch beide nur einen Mittelpunct haben. Wir haben aber eben gesehen, daß zween Cirkel, welche nicht beyde durch den Mittelpunct der Kugel gehen, auch ohnmöglich einen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben können.

§. 18. Können also solche Cirkel, welche nicht beide durch den Mittelpunct gehen, einander nicht in halbe Cirkel theilen, so folget, daß, wenn man zween Cirkel einer Kugel hat, welche einander würklich in vier halbe Cirkel theilen; die Flächen derselben nothwendig durch den Mittelpunct der Kugel gehen müssen. Dieses ist der einzige Umstand, bey welchem diese Theilung statt findet. Ist also die Theilung würklich geschehen, so ist kein Zweifel, daß auch dieser Umstand zugegen sey. Man sieht übrigens von sich, daß, was von der Theilung der Cirkel gesaget wird, auch von der Theilung der Umkreise derselben richtig sey, weil allezeit der Cirkel und dessen Umkreis zugleich getheilet wird, und eine dieser Theilungen ohne die andere nicht geschehen kan, man müste dann die Theilung durch eine ungerade Linie verrichten, wovon hier die Rede nicht ist.

[Fig. 351] §. 19. Da aber ein solcher Cirkel, dessen Fläche nicht durch den Mittelpunct der Kugel gehet, von verschiedenen Cirkeln der Kugel in zween gleiche Theile getheilet werden kan; ohne nemlich, daß er diesen

sen hinwiederum dergestalt theile: so erfolget diese Theilung in gleiche Theile jederzeit gewiß, wenn der theilende Cirkel durch die Axe desjenigen gehet, welchen er theilet. Will man sich dieses ohne Weitläuftigkeit vorstellen, so hat man nur zu betrachten, daß in der Kugel ABCD, deren Mittelpunct in E fället, der Cirkel FMG durch einen jeden Cirkel in zwey gleiche Theile werde getheilet werden, dessen Fläche durch den Mittelpunct desselben H gehet, weil in dem Falle die gerade Linie, in welcher die Flächen der Cirkel einander schneiden, nothwendig ein Durchmesser des Cirkels FMG wird. Nun gehet ein jeder Cirkel, welcher durch die Axe DB gehet, auch durch den Mittelpunct H. Denn die Axe gehet nothwendig durch diesen Mittelpunct, XII, 14.

§. 20. Man siehet leicht, daß man diesen Satz wieder auf so verschiedene Arten ausdrücken könne, als viele der Umstände sind, welche die Axe bestimmen. Wir wollen uns wieder hiebey nicht aufhalten, insonderheit, da das meiste, was hier zu sagen wäre, bloß eine Wiederholung des vorigen ist, und nur bemerken, daß ein jeder Cirkel, welcher wie DNP durch die Axe des Cirkels FMG gehet, nothwendig 1) durch den Pol dieses Cirkels D und 2) durch den andern Pol desselben B, wie auch 3) durch den Mittelpunct der Kugel E, 4) durch H, den Mittelpunct des Cirkels FMG, wie auch 5) durch den Mittelpunct eines jeden andern Cirkels der Kugel IOK, welcher dem FMG parallel lieget, hindurch gehe, und 6) auf die Flächen der Cirkel FMG, ANC und IOK perpendicular sey; wobey nicht aus der Acht zu lassen ist, was wir schon erinnert haben, daß eine jede ebene Fläche, welche einen Cirkel durch seinen Mittelpunct schneidet, denselben in zwey gleiche Theile theile. Weil aber, wie wir XII, 14. gesehen haben, die Lage der Axe durch jede zwo dieser erzehlten Bedingungen bestimmet wird, so wird auch die Lage des Cirkels, welcher durch die Axe gehet, durch eben diese Bedingungen in so ferne bestimmet, daß ein Cirkel gewiß durch die Axe gehet, welcher, zum Exempel, durch den Pol D und durch den Pol B, oder durch den Pol D und durch den Mittelpunct E gehet, oder welcher durch den Mittelpunct der Kugel E gehet, und auf die Fläche FMG oder ANC perpendicular fället, oder welcher andere zwo der sechs erzehlten Eigenschaften hat. Man muß demnach wieder schließen, daß einem jeden Cirkel, welchem zwo der erzehlten Eigenschaften zukommen, die übrigen dieser Eigenschaften alle zukommen werden.

§. 21. Wenn demnach auf einen Cirkel der Kugel FMG zween andere Cirkel derselben DNP und DCA perpendicular stehen, welche zugleich durch den Mittelpunct desselben H, oder durch den Mittelpunct der Kugel E gehen;

so kreuzen ihre Umkreise einander in D und B, den Polen des Cirkels FMG. Denn sie gehen beyde durch die Axe DB, und schneiden also einander in dieser Linie.

§. 22. Ist aber die Fläche des Cirkels DNP auf der Fläche des Cirkels ANC perpendicular, welcher durch den Mittelpunct der Kugel E gehet, und gehet über dieses der Cirkel DNP auch durch den Mittelpunct des Cirkels ANC, das ist, durch den Mittelpunct der Kugel E: so gehet nicht nur der Cirkel DNP durch die Pole D und B des Cirkels ANC, sondern, weil hinwiederum der Cirkel ANC auf den Cirkel DNP gerade stehet, und durch dessen Mittelpunct gehet, so gehet auch der Cirkel ANC durch die Pole des Cirkels DNP, XII, 20.

Kugelschnitte, die einander schief schneiden, oder berühren.

[*Fig.* 353.] §. 23. Hat man eine Kugel ADCB zweymal geschnitten, und dadurch die zween Cirkel AD und BC zum Vorscheine gebracht, welche von dem Mittelpuncte der Kugel gleichweit entfernet sind, so sind diese Cirkel einander gleich. Haben sie aber ungleiche Entfernungen von dem Mittelpuncte, so ist allezeit derjenige kleiner, welcher von dem Mittelpunct der Kugel E weiter abstehet. Denn man ziehe von diesem Mittelpuncte der Kugel an den Mittelpunct F des Cirkels AD die gerade Linie EF, welche XII, 14. auf die Fläche dieses Cirkels perpendicular fallen, und also die Entfernung des Punctes E von dieser Fläche anzeigen wird. In der Fläche des Cirkels AD selbst ziehe man den Radius FH, dessen äußerstes Punct H in der Oberfläche der Kugel liegen wird, weil der ganze Umkreis des Cirkels AD in dieser Oberfläche lieget. Von H ziehe man an den Mittelpunct E den Radius der Kugel HE; so wird das Dreyeck HFE bey F rechtwinklicht. Machet man nun eben dergleichen auch bey dem andern Cirkel BC, und hänget erstlich den Mittelpunct der Kugel mit dem Mittelpuncte des Cirkels vermittelst der geraden Linie EG zusammen, welche wieder auf die Fläche des Cirkels perpendicular seyn, und folgends die Entfernung derselben von dem Mittelpuncte der Kugel E anzeigen wird, und ziehet GB den Halbmesser des Cirkels und EB den Halbmesser der Kugel, so wird wieder das Dreyeck EGB rechtwinklicht, und in diesen Dreyecken ist HE = EB. Ist nun FE = EG, so ist auch nothwendig HF = GB, IV, 260. das ist, wenn die Entfernungen der Cirkel von dem Mittelpuncte der Kugel gleich sind, so sind auch ihre Halbmesser gleich, und also auch die Cirkel selbst. Ist aber EF kleiner als EG, so ist im Gegentheil HF größer als

GB,

GB, IV, 262. woraus man siehet, daß der Cirkel AD, wenn er von dem Mittelpuncte der Kugel E weniger entfernet ist als der Cirkel BC, größer sey als dieser Cirkel BC.

§. 24. Demnach sind unter allen Cirkeln, welche durch den Schnitt einer Kugel zum Vorscheine gebracht werden können, diejenigen die allergrößesten, welche durch den Mittelpunct der Kugel gehen. Und man kan einen Cirkel, welcher durch den Mittelpunct der Kugel gehet, durch die Benennung **des größesten** oder **eines der größesten** Cirkel der Kugel, von allen übrigen Cirkeln derselben unterscheiden. Dieses pfleget gemeiniglich zu geschehen, indem man einen solchen Cirkel, dessen Fläche durch den Mittelpunct der Kugel gehet, einen der größern Cirkel der Kugel nennet. Man wird nunmehr die gegebene Sätze auch unter dieser Benennung der Cirkel, in deren Fläche der Mittelpunct der Kugel fällt, leicht verstehen. Denn ins künftige werden wir uns derselben bedienen.

[F. 354.] §. 25. Es sey nunmehro die Kugel ABCD, deren Mittelpunct wieder mit E bezeichnet ist, vermittelst einer Ebene geschnitten, welche nicht durch den Mittelpunct E gehet, und es sey durch diesen Schnitt der Cirkel AFC entstanden, dessen Mittelpunct G ist. Man schneide die Kugel auch vermittelst einer Fläche durch ihren Mittelpunct E, und bringe durch diesen Schnitt einen der grösten Cirkel derselben zum Vorschein, welcher auch den kleinern Cirkel AFC theile, aber auf demselben nicht gerade, sondern schief stehe. Dieser Cirkel sey HFIK, und er schneide den Cirkel AFC in der geraden Linie KF. Man mache noch einen der grösten Cirkel der Kugel auf die Linie KF, oder den Theil derselben FL, perpendicular, und dieser sey ABCD. Weil nun FL hinwiederum auf der Ebene des Cirkels ABCD perpendicular stehet, und diese LF in der Fläche des Cirkels AFC sowol als auch in der Fläche des Cirkels HFI lieget; so sind die beyde eben genante Cirkel AFC und HFI, auf den Cirkel ABCD perpendicular, X, 45. Und der Cirkel ABCD, welcher dergestalt auf dem Cirkel AFC perpendicular stehet, und durch den Mittelpunct der Kugel E gehet, theilet diesen Cirkel in zwo Helften AFC, AKC, XII, 20. die gerade Linie AC aber, in welcher der Cirkel ABCD den AFCK schneidet, gehet durch dessen Mittelpunct G. Eben dieses ist auch von dem Cirkel HFIK zu sagen. Der Cirkel ABCD theilet auch diesen in zwo gleiche Helften, und die gerade Linie HI vermittelst welcher diese Theilung geschiehet, gehet durch den Mittelpunct dieses Cirkels E, welcher zugleich der Mittelpunct der Kugel ist, XII, 2. Das Punct L aber ist nothwendig von dem Mittelpunct G verschieden, so lange der Cirkel AFC nicht durch den Mittelpunct der Kugel gehet. Denn wenn

L mit G zusammen fiele, oder welches eben das ist, wenn der Cirkel HFIK durch den Mittelpunct G des Cirkels AFC gienge, so wäre derselbe auf dem Cirkel AFCK perpendicular, XII, 20. und nicht schief, wie gesetzet wird. Man siehet auch leicht, daß bey den gesetzten Bedingungen eben das Punct L auch von dem Mittelpuncte der Kugel E entfernet seyn müsse, weil gesetzt wird, daß der Cirkel AFC nicht durch dieses Punct E hindurch gehen soll. Da nun eben dieses E auch der Mittelpunct ist des Cirkels HFIK, so ist KF eine Sehne sowol des Cirkels AFCK als auch des Cirkels HFIK, welche kleiner ist als einer der Durchmesser dieser Cirkel, und diese Sehne ist auf die Durchmesser AC, IH der eben genanten Cirkel perpendicular, weil diese Durchmesser beyde in der Fläche des Cirkels ABCD liegen, auf welche Fläche EL perpendicular ist.

§. 26. Da nun ein jeder Durchmesser eines Cirkels, welcher auf einer Sehne desselben perpendicular stehet, wenn er verlängert wird, auch den Bogen dieser Sehne in zwey gleiche Theile theilet, V, 19. so muß sowol der Durchmesser AC den Bogen FCK in zwey gleiche Theile FC und CK theilen; als auch der Durchmesser IEH bey dem Bogen FHK eine eben dergleichen Theilung verrichten, FH nemlich muß ebenfals der HK gleich seyn. Man lasse nicht aus der Acht, daß das Punct C in den Durchschnitt der Cirkel ABCD und AFCK, und H in den Durchschnitt der Cirkel IFHK und ABCD, falle.

§. 27. Setzet man nun, daß das übrige alles bleibe, wie wir es beschrieben haben, und entfernet bloß in den Gedanken den Cirkel AC von dem Mittelpunct E gegen seinen Pol D, ohne ihn jedoch auf diese oder jene Seite zu neigen; das ist, man entfernet ihn dergestalt von E, daß die Axe desselben ihre Lage in der Kugel unverrückt behalte: so wird nothwendig KF immer kleiner und kleiner, welches man daraus siehet, weil diese KF sich bey dieser Bewegung immer weiter und weiter von E, dem Mittelpuncte des Cirkels IFH, entfernet, dessen Sehne sie ist. Demnach wird auch der Bogen dieser Sehne KHF immer kleiner und kleiner, und zugleich nimmet auch der Bogen KCF ab, und zwar der letztere desto mehr, weil bey dieser Entfernung des Cirkels AFCK von dem Mittelpuncte der Kugel E, zugleich der Cirkel selbst abnimmet, XII, 23. Es bleiben aber deswegen doch die Bogen CK, CF, wie auch HK, HF, einander immer gleich, weil in den Umständen, unter welchen wir diese Gleichheit erwiesen haben, keine Veränderung vorgehet. Zu gleicher Zeit nähert sich auch das Punct C, wie auch das Punct L beständig dem Puncte H, so daß bey fortgesetzter Entfernung des

Cir-

Cirkels AFC von dem Mittelpuncte E gegen den Pol D, die vier Puncte K, F, L und C dem Puncte H sämtlich näher und näher werden.

[F. 355.] §. 28. Entfernet man nun den Cirkel AFC von E, so weit, daß endlich das Punct L mit dem Puncte H zusammen fällt, so fallen auch die Puncte C, K und F mit eben dem Puncte H zusammen, und die Cirkel AH und IH haben nunmehro das Punct H dergestalt gemeinschaftlich, daß sie einander in diesem Puncte nicht schneiden. Man kan demnach in eben dem Verstande, in welchem man saget, daß eine gerade Linie einen Cirkel berühre, auch sagen, daß der Cirkel AH in diesem Falle, welchen die 355 Zeichnung vorstellet, den Cirkel IH in H berühre. Die Linie KF, in welcher die Cirkel einander in der 354 Zeichnung geschnitten hatten, ist verschwunden, weil es ohnmöglich ist, daß die Sehne des Cirkels IH, die auf der EH perpendicular stehet, durch das Punct des Umkreises H gehen solte. Wohl aber schneiden die zwo Flächen der Cirkel AH und IH einander in einer geraden Linie KF, welche, wie die Sehne KF, auf die Fläche des Cirkels ABHD, und also sowol auf den Durchmesser AH, als auch auf den Durchmesser IH perpendicular ist. Denn die Flächen dieser Cirkel AH und IH sind noch auf die Fläche des Cirkels ABCD perpendicular, weil in ihrer Lage nichts geändert worden ist, also ist auch der gemeinschaftliche Schnitt derselben KF auf eben die Fläche ABHD perpendicular, X, 47. wie auch auf die zwo gerade Linien AH und IH, welche in dieser Fläche liegen. Es berühret demnach diese FK sowol den Cirkel AH als auch den Cirkel IH in dem Puncte H. V, 47.

§. 29. Wäre demnach der Umkreis eines der grösten Cirkel IH in der Oberfläche einer Kugel beschrieben, und man wolte in eben der Oberfläche einen andern Cirkel AH beschreiben, welcher den vorigen in einem gegebenen Puncte H berühret; so müste man nur erstlich durch das gegebene Punct H einen andern Cirkel der Kugel ABHD beschreiben, dessen Fläche ebenfals durch den Mittelpunct der Kugel E ginge, und welcher auf dem vorigen perpendicular stünde: alsdenn würde ein jeder Cirkel AH, dessen Umkreis durch H gehet, und dessen Fläche auf der Fläche des Cirkels ABHD perpendicular stehet, das ist, dessen Pole in den Umkreis ABHD fallen, XII, 20 den Cirkel HI in H berühren. Denn daraus, daß die beyden Cirkel IH und AH auf dem Cirkel ABHD perpendicular stehen, und daß ihre Umkreise durch das Punct H des Cirkels ABHD gehen, haben wir geschlossen, daß die Cirkel AH und IH einander in H berühren; und es kan bey diesen Umständen allezeit eben das geschlossen werden. Man siehet hieraus, daß unendlich viele Cirkel eben der Kugel den Cirkel IH in dem Puncte H berühren können,

weil unendlich viele Cirkel auf die Fläche des Cirkels IH perpendicular gesetzet werden können, welche zugleich durch H gehen.

§. 30. Es schneidet der Cirkel ABHD den Umkreis des Cirkels IH außer dem H noch einmal in I, und dieses Punct I ist in dem Durchmesser IH, in welchem die Cirkel ABHD und IH einander schneiden, dem vorigen H entgegen gesetzet. Man kan demnach, nach der gegebenen Anweisung auch durch das Punct I unendlich viele Cirkel legen, welche den Cirkel IH berühren, aber nur einer derselben ist dem AH parallel. Setzen wir nun, daß dieses der Cirkel IM sey, so siehet man leicht, daß außer demselben kein anderer Cirkel in der Kugel ABHD seyn könne, welcher diese beyde Eigenschaften zugleich hätte, daß er nemlich sowol dem Cirkel AH parallel läge, als auch den Cirkel IH berührete. Denn alle Cirkel der Kugel zwischen AH und IM, welche dem Cirkel AH parallel liegen, schneiden den Cirkel IH: und alle Cirkel der Kugel zwischen AH und dem Pole desselben D, oder zwischen IM und dem andern Pole B, haben mit dem Cirkel IH gar keine Gemeinschaft. Es können also einen jeden Cirkel der Kugel IH zween Parallelcirkel eben der Kugel AH und IM berühren, aber nicht mehrere.

§. 31. Und zwar sind diese Parallelcirkel AH und IM, welche beyde einen der grösten Cirkel einer Kugel IH berühren, einander gleich. Denn weil sie parallel sind, so haben sie eine gemeinschaftliche Axe DB, welche auf die Cirkel perpendicular fället, XII, 14: es sind also EG, EN die Entfernungen dieser Cirkel von dem Mittelpuncte der Kugel E. Wenn man sich nun vorstellet, daß auch durch E eine ebene Fläche gehe, welche den beyden AH, IM parallel läuft, so siehet man, X, 60 daß HE:EI = GE:EN. Da nun also HE=EI, so ist auch GE=EN, und die Cirkel AH, IM haben gleiche Entfernungen von dem Mittelpuncte der Kugel: sie sind demnach einander gleich, XII, 23.

[*Fig.* 356.] §. 32. Diese zween einander gleiche Cirkel AH, IM also werden von dem großen Cirkel IH nicht geschnitten, wohl aber alle diejenige, die zwischen denselben ihren Flächen parallel liegen. Wir haben diese letzteren Cirkel noch zu betrachten, und dabey insonderheit auf die Verhältniß ihrer Theile gegen die ganzen Cirkel zu sehen. Die 356 Figur sol eben das vorstellen, so die 354 vorgestellet hat: nur haben wir hier, die Zeichnung desto weniger zu verwirren, an statt der ganzen nur halbe Cirkel genommen. Es sol nemlich ABCD eine halbe Kugel vorstellen, in welcher die halben Cirkel AFC, IFH auf der Fläche des Cirkels ABCD, welcher zugleich die Grundfläche der halben Kugel abgiebet, perpendicular stehen. Die Pole des Cirkels AFC sind wieder mit D und B bezeichnet,

und

und DB ist also die Axe der Kugel, welche zu dem halben Cirkel AFC gehöret. Wir setzen, daß der halbe Cirkel AFC nicht durch den Mittelpunct der Kugel E gehe, sondern daß ein anderer halber Cirkel NMO durch diesen Mittelpunct geleget sey, welcher zugleich dem vorigen AFC parallel ist. Schneiden nun die beyden halben Cirkel IFH und AFC einander in LF, so lege man an die Axe DB noch einen andern Cirkel der Kugel, welcher zugleich durch das Punct F gehe. Von diesem Cirkel wird in der Zeichnung nur der vierte Theil DFPE vorgestellet, welcher nemlich von der Axe DE sich bis an den Cirkel NPO erstrecket. Man siehet daraus, daß dieser Theil DFP ein Quadrante sey, weil DE auf die Fläche NPO perpendicular, und folgends der Winkel DEP gerade ist. Es wird dadurch der Ausschnitt, welchen der Quadrante DPE von dem halben Cirkel AFC abschneidet, nemlich CGF, dem Ausschnitte OEP ähnlich. Denn man kan DEPO als einen Cörper der dritten Art betrachten, XI, 77. Also verhält sich der Bogen FC zu dem halben Umkreise AC wie sich der Bogen PO zu dem halben Umkreise NO verhält, VII, 57. Dieses alles ist ohne Schwierigkeit einzusehen, aber man siehet auch mit eben der Leichtigkeit, daß, indem man den Cirkel AFC nach und nach gegen NPO herunter rücket, das Punct F, in welchem er den Umkreis des halben Cirkels HFI schneidet, immer nach M zu fortrücken werde: und daß demnach, wenn der Cirkel DFP immer durch dieses Punct F gehen sol, der Winkel OEP, welchen die Fläche DEP mit der Fläche DEO einschließet, immer größer und größer werden müsse. Es wird demnach auch der Bogen OP immer größer, und bekommet gegen den halben Umkreis NMO eine desto größere Verhältniß, je mehr sich der halbe Cirkel AFC dem halben Cirkel NMO nähert: also muß auch die Verhältniß des Bogens FC zu dem halben Umkreise AFC bey dieser Näherung beständig wachsen.

§. 33. Dieses Wachsthum gehet immer fort, bis endlich der halbe Cirkel AFC mit dem halben Cirkel NMO zusammen fället. Ist dieses geschehen, so ist auch F in M gefallen: und weil die beyden halben Cirkel NMO und IMH auf dem Cirkel ABCD perpendicular stehen, so sind die Bogen NM, MO eben sowohl als IM, MH einander gleich, XII, 21. folgends ist MO sowohl als MH der vierte Theil des Umkreises seines Cirkels, welches man auch daraus siehet, weil die gerade Linie ME, in welcher die Flächen IMH, NMO, die beyde auf die Fläche ABCD perpendicular sind, einander schneiden, auch selbst auf diese Fläche perpendicular ist, X, 47. und also mit den Linien EH, EO die geraden Winkel MEH, MEO einschließet.

Also ist CF immer kleiner als ein Quadrant, so lange AFC noch über dem NMO lieget.

§. 34. Entfernet sich aber der bewegete Cirkel auf der andern Seite von NMO, und kommet endlich in afc, und man hat durch das Punct f, in welchem dessen Umkreis nunmehro von dem halben Cirkel IMH geschnitten wird, und durch die Axe DB den Theil eines der grösten Cirkel der Kugel Bfp geleget, so ist der Bogen cf größer als der vierte Theil seines Umkreises. Denn es ist hier wieder die Verhältniß fc: afc der Verhältniß Op: NMO gleich. Op aber ist unstreitig größer als der Quadrant MO. Demnach ist im Gegentheile der Bogen af kleiner als ein Quadrant.

§. 35. Wenn der halbe Cirkel AFC von dem Mittelpuncte der Kugel E auf der einen Seite so weit abstehet, als der halbe Cirkel afc auf der anderen, so sind die Halbmesser dieser halben Cirkel GF und gf einander gleich, wie wir XII, 23. gesehen haben. Und weil in den geradewinklichten Dreyecken LGE und Egl außer den geraden Winkeln bey G und g, auch die Wechselswinkel bey E, nemlich LEG und lEg gleich sind, die gleichen Entfernungen aber der Cirkel von dem Mittelpuncte E, die Seiten dieser Dreyecke EG und Eg abgeben, so sind in diesen Dreyecken auch die Seiten GL und gl gleich. Die Dreyecke GFL und gfl haben bey L und l ebenfals gerade Winkel, weil FL sowohl als fl auf der Fläche des Cirkels ABCD perpendicular stehet. Da also, wie wir gesehen haben, auch zwo Seiten des einen GF, GL, zwoen Seiten des andern gf, gl gleich sind, so sind auch ihre Winkel FGL, fgl einander gleich, IV, 260. und folgends ist der Bogen FC gleich dem Bogen fa, V, 7. Es werden demnach die gleichen halben Cirkel AFC, afc von dem halben Cirkel HMI, in F und f gleich getheilet, aber die einander gleichen Theile liegen nach verschiedenen Seiten in Ansehung der theilenden Fläche HMI. Der Bogen FC lieget in unserer Zeichnung der Fläche HMI zur rechten, und der demselben gleiche Bogen af lieget im Gegentheile der Fläche HMI zur linken. Man siehet leicht, daß hieraus folge, daß der Bogen af mit dem Bogen AF, wie auch fc mit dem FC halbe Cirkelkreise geben.

§. 36. Alle diese Betrachtungen sind in der Astronomie von gar grossem Nutzen, und wir können aus der Ursache diese Abhandlung noch nicht abbrechen. Wir müssen noch die Dreyecke betrachten, welche drey Bogen dreyer der grösten Cirkel der Kugel in der Oberfläche derselben mit einander einschließen. Es werden vermittelst dieser Dreyecke sehr viele und wichtige Aufgaben aufgelöset, und es ist also unumgänglich nothwendig,

vor-

vornemlich, wenn man in der Astronomie etwas thun wil, daß man sich die Eigenschaften dieser Dreyecke bekant mache.

Maaß des Winkels, welchen zween der grösten Cirkel einer Kugel einschließen.

[*Fig.* 357.] §. 37. Wenn in der Oberfläche der Kugel ABCD zween der grösten Cirkel derselben ABCD und DFBG sich in der geraden Linie DB schneiden, die nothwendig durch den Mittelpunct der Kugel E gehet, und man nimmet D vor den Pol eines dritten Cirkels AFCG an, welchen man dergestalt leget, daß seine Fläche ebenfals durch den Mittelpunct der Kugel E gehe, und die vorigen in GEF, AEC schneide (wodurch die Bogen DF und DC und alle übrigen, deren Flächen durch DB gehen, Quadranten werden:) so ist der Bogen FC das Maaß des Winkels, welchen die beyden Flächen DEC, DEF mit einander einschließen. Denn der Winkel FEC ist demjenigen gleich, welchen die Flächen DEF, DEC mit einander machen, X, 41. weil EF und EC auf die DE perpendicular sind, indem diese DE perpendicular auf der Ebene AFCG stehet: und den Winkel FEC misset der Bogen CF. Wie sich nemlich dieser Bogen CF zu einem Quadranten des grösten Cirkels der Kugel verhält, so verhält sich der Winkel CEF zu einem geraden Winkel. Und auf die Art wird das Maaß eines Winkels CEF, welchen die Flächen zweyer der grösten Cirkel der Kugel mit einander machen, allezeit gefunden.

§. 38. Aus eben dem Grunde siehet man, daß der Bogen AF das Maaß sey des Winkels AEF, welchen die Flächen DEA, DEF einschließen, und daß der Bogen AG den Winkel AEG messe, welcher der Neigung der Fläche AED auf GED, gleich ist, und so fort. Die Winkel, FEC, AEG sind einander gleich, weil GF, AC gerade Linien sind, die einander in E schneiden: X, 10. folgends ist auch der Winkel, welchen die Fläche FED mit der Fläche DEC machet, dem entgegen gesetzten Winkel gleich, welchen eben diese Flächen, wenn man dieselben fortsetzet, oder ihre Theile DEG und DEA, mit einander einschließen. Und auf eben die Art schließen wir, daß die Winkel, welche die Fläche DEF mit der Fläche ADC machet, zusammen genommen zween geraden Winkeln gleich seyn, weil die Winkel FEC, FEA zusammen zween gerade Winkel machen, deren erster der Neigung der DEF auf DEC gleich ist, da der andere AEF die Neigung eben der Fläche DEF gegen die DEA misset. Wir hätten diese

Sä-

Sätze bereits oben anbringen können, da wir von den Lagen der Flächen handelten, doch sie sind an sich leicht, und wer die Geduld gehabt hat, sich das vorhergehende bekant zu machen, wird diese Kleinigkeiten selbst übersehen.

§. 39. Es ist aber, was hier gesaget wird, daß nemlich der Bogen FC, welcher aus dem Pol D beschrieben worden, und der von diesem Puncte D um die Quadranten DC, DF entfernet ist, das Maaß des Winkels sey, welchen die Flächen DEF, DEC mit einander machen, nicht so zu verstehen, als ob man die Neigung dieser Flächen nicht auch anders messen könte. Alle gerade Linien, welche in den Flächen DEF, DEC auf den Schnitt DE perpendicular gezogen werden, und in einem Puncte dieser Linie DE zusammen laufen, schließen einen Winkel ein, welcher dem Winkel FEC, und der Neigung der Fläche DEF gegen die Fläche DEC, gleich ist, X, 42. Und ein jeder Bogen, welcher um den Pol D in der Oberfläche der Kugel, zwischen den halben Cirkeln DFB, DCB beschrieben wird, misset einen dieser Winkel, durch seine Verhältniß zu den Quadranten, oder zu den halben oder ganzen Cirkelkreis, XI, 77. Es stehen unter diesen Perpendicularlinien, auch diejenige gerade Linien, deren eine KM den Cirkel DFBG und die andere HI den Cirkel ABCD in dem Puncte D berühret. Denn die Berührungslinie KM fället nothwendig in die Ebene, in welcher der Cirkel DFBG lieget, und ist auf den Durchmesser desselben DB perpendicular, V, 47. Und eben dergleichen ist auch von der HI in Ansehung des Cirkels ABCD zu sagen. Also ist der Winkel IDM dem Winkel CEF gleich. Indessen ist die Art, welche zuerst angegeben worden ist, das Maaß eines solchen Winkels zu finden, in den meisten Fällen die bequemste.

Solide Ecken.

[Fig. 358.] §. 40. Nunmehro können wir uns zur Betrachtung der Dreyecke wenden, deren wir X, 36. erwehnet haben. Es kommet bey denselben das meiste auf den Begrif an, welchen man sich davon machet. Denselben nun so deutlich zu geben als möglich ist, wollen wir ganz von forne anfangen. Wenn man drey oder mehrere Winkel ABC, CBD, DBE und EBA dergestalt zusammen setzet, daß ihre Spitzen B zusammen laufen, und die Seiten AB des Winkels ABC mit der Seite AB des Winkels ABE, zusammen fällt, und so rings herum; die Flächen der Winkel ABC, CBD, DBE, und EBA aber alle sich gegen einander neigen; so entstehet das-

dasjenige, was man eine Ecke, oder auch (damit man sie desto besser von einem gemeinen Winkel unterscheide, welche zwo gerade Linien, oder zwo ebene Flächen, mit einander machen) eine solide Ecke zu nennen pfleget. Wir haben aber diesen Zusatz im Teutschen nicht nöthig, weil die Benennung einer Ecke dieselbe genugsam von einem Winkel unterscheidet.

§. 41. Man hat bey dergleichen Ecken die Linien AC, CD, DE, EA mit welchen wir die Winkel ABC, CBD, DBE, EBA geschlossen haben, in keine Betrachtung zu ziehen, weil diese in der Ecke selbst nichts ändern. Sie werden bloß deswegen gezeichnet, damit alles desto besser in die Augen fallen möge, und wir werden es aus der Ursache auch künftig thun. Wir werden aber auch an statt der geraden Linien uns fast überall der Cirkelbogen bedienen, welche aus dem Puncte B, zwischen AB, CB, oder zwischen CB, DB und so ferner, beschrieben werden können, und also eine Ecke aus Ausschnitten eines Cirkels zusammen setzen. Man siehet leicht, daß auch dieses der Deutlichkeit halber könne angenommen werden, und in der Sache selbst nichts ändere.

§. 42. Die Winkel, ABC, CBD aber auf deren Größe alles ankommet, und welche nicht verändert werden können, ohne daß zugleich die Ecke verändert wird, heißen die Seiten der Ecke. Es können derselben so viele seyn, als man will, nur nicht weniger als drey, man hat also dreyseitige, vierseitige, fünfseitige Ecken, und so fort. Ob zwar übrigens die Ecke so gleich verändert wird, wenn man in der Größe ihrer Seiten etwas ändert; so folget doch nicht, daß alle Ecken gleich sind, die gleiche Seiten haben, wie man leicht siehet. Denn wenn man eine vierseitige Ecke, wie diejenige, welche die Zeichnung vorstellet, aus Papier machet, so daß sie bey ACDE offen bleibt, so kan man das Punct D gegen A drücken, und dadurch die Puncte C und E von einander entfernen, wodurch die Ecke allerdings geändert wird, obwohl ihre Seiten ABC, CBD, DBE und ABE die vorige bleiben.

§. 43. Die Winkel einer soliden Ecke sind die Neigungen ihrer Seiten, oder der Flächen in welchen diese Seiten liegen, gegen einander. Die Seite CBD, oder die Fläche, in welcher diese Seite lieget, hat gegen die Seite CBA oder die Fläche, in welcher diese Seite lieget, die jene in der geraden Linie BC schneidet, eine gewisse Neigung, welche, wie wir X, 41. gesehen haben, durch einen Winkel gemessen wird, den zwo gerade Linien mit einander einschließen. Diese Neigung der CBD gegen die CBA, oder der Winkel, welchen sie angiebet, ist ein Winkel der Ecke, und so ist es mit allen übrigen Winkeln derselben.

§. 44. Ein jeder solcher Winkel ist, wie überhaupt ein jeder Winkel, entweder kleiner oder größer als die Summe zweyer rechten Winkel, oder dieser Summe genau gleich. Die Seiten, welche einen Winkel einschließen, der genau zween rechten Winkeln gleich ist, liegen beyde in einer Ebene. Man kan sie also zusammen als eine Seite ansehen, gleich wie man hinwiederum eine jede Seite einer Ecke, als ABC, durch eine nach Belieben aus D gezogene gerade Linie in zwo theilen kan. Dieses ändert in der innern Beschaffenheit der Ecke nichts, ob man sich dieselbe wol nunmehro mit mehrern oder wenigern Seiten vorstellet; gleichwie ein geradelinichtes Dreyeck ein Dreyeck bleibt, wenn man eine Seite desselben mit einem beliebigen Puncte theilet, und sich diese getheilte Seite als zwo vorstellet, die einen Winkel einschließen, der zween geraden Winkeln gleich ist: da man sich dann in der Figur vier Winkel vorstellen muß, welche von vier Seiten eingeschlossen werden. Man hat also überhaupt nicht nöthig auf solche Winkel, die zween rechten Winkeln gleich sind, Acht zu haben, außer wenn dieselbe etwan die Betrachtung erleichtern solten.

§. 45. Auch pflegt man diejenigen Winkel bey Seite zu setzen, die größer sind, als die Summe zweyer rechten Winkel: nicht als ob die Betrachtung derselben gänzlich unnütze wäre, sondern weil man sie entbehren kan, und man in allzugroße Weitläuftigkeiten verfallen würde, wenn man auch die Ecken abhandeln wolte, welche dergleichen Winkel haben. Gleichwie nemlich eine jede gerade Linie, die mit einer andern in einem Puncte zusammen stoßet, mit dieser zween Winkel machet; einen innern, der kleiner ist als zween gerade Winkel, und einen äußern, welcher die Summe zweyer geraden Winkel übertrift, mit dem innern aber vier gerade Winkel ausmachet, IV, 71: Also schließet eine jede ebene ABC mit einer jeden andern CBD an der Linie BC, in welcher sie diese erreichet, zween Winkel ein, deren einer kleiner ist als zween gerade Winkel und der andere größer, beyde zusammen aber machen wieder vier gerade Winkel aus. Unter diesen Winkeln gehöret derjenige eigentlich zu der soliden Ecke, welcher einwärts, das ist, nach den übrigen Seiten und Winkeln derselben gekehret ist, und dieser Winkel ist, bey allen Ecken, welche vornemlich betrachtet werden, kleiner als zween gerade Winkel; so daß der Bogen, welcher ihn misset, weniger beträgt, als den halben Cirkelkreis.

§. 46. Und da die Seiten der soliden Ecken ebenfals Winkel sind, welche in einer Ebene von zwo geraden Linien eingeschlossen werden, so kan eine solche Seite mehr oder weniger als zween rechte Winkel, oder auch genau zween rechte Winkel betragen. Es werden aber hier wieder diejenige

Ecken

Ecken, in welchen eine oder mehrere Seiten vorkommen, die so viel oder mehr betragen, als zween rechte Winkel, vorbey gelassen, und nur diejenige betrachtet, in welchen jede Seite kleiner ist, als ein aus zween rechten zusammen gesetzter Winkel.

[*Fig.* 359.] §. 47. Bey diesen Einschränkungen siehet man ohne Schwierigkeit, daß in einer jeden Ecke, sie mag so viele Seiten haben als man wil, die Summe aller Seiten außer einer, größer seyn müsse als diese letztere Seite. Denn gleichwie die gerade Linie, die zwischen zween gegebenen Puncten lieget, kürzer ist, als eine jede andere krumme oder gebrochene Linie, die von einem dieser Puncte an das andere reichet: also ist auch die Ebene ABE, welche zwischen den geraden Linien AB und BE lieget, von einer dieser Linien an die andere weniger ausgedehnet, als die gebrochene Ebene, welche aus ABC, CBD und DBE zusammen gesetzet ist. Und wenn man in der folgenden Zeichnung die Winkel ABC, ABD, CBE dergestalt angenommen hat, daß zween derselben zusammen ABD+CBE kleiner sind als der dritte ABC: so kan man aus denselben keine Ecke verfertigen, weil, wenn man die Winkel ABD und CBE gegen einander neiget, damit, wenn es möglich ist, die Linie BD die BE erreichen möge, BD endlich in Bd fället, und den Winkel ABd dem Winkel ABD gleich machet, und BE in Be zu liegen kommet, wenn BCe=BCE. Da denn, weil ABd+CBe kleiner ist als ABC, die Linien Bd, Be noch von einander entfernet bleiben, oder wenigstens erst in der Fläche ABC zusammen fallen, wenn ABD+CBE so groß ist als ABC, indem nunmehro der Winkel dBe verschwindet. In beyden dieser Fällen entstehet also keine Ecke: sol demnach eine Ecke werden, so muß nothwendig ABD+CBE größer seyn als ABC. Man siehet leicht, daß eben dieses bey den gesetzten Bedingungen auch von solchen Ecken richtig sey, welche mehr als drey Seiten haben.

[*Fig.* 360.] §. 48. Bey eben dergleichen soliden Ecken betragen auch immer alle Seiten zusammen genommen weniger als vier gerade Winkel; oder, wenn man die Seiten solcher Ecken mit Bogen geschlossen hat, welche aus der Spitze derselben B mit einerley Radius beschrieben worden sind, so machen alle diese Bogen zusammen weniger als den Umkreis eines Cirkels aus. Dieses könten wir aus dem Satze herleiten, welchen wir eben als bekant angenommen haben: es lässet sich aber dasselbe auch vor sich eben so leicht einsehen, als dieser Satz. Man siehet leicht, daß, wenn man in einer Ebene um einen beliebig angenommenen Mittelpunct B einen Cirkel beschreibet, und von diesem Mittelpuncte die Halbmesser

BA, BC, BD, BE nach Belieben ziehet, man ohnmöglich die Ausschnitte ABC, CBD, DBE und EBA werde gegen einander neigen, und dadurch eine Ecke von der Art die wir hier betrachten zuwege bringen können. Dieses aber müste seyn, wenn alle Seiten einer Ecke vier gerade Winkel, oder, wenn man sie als Ausschnitte gleicher Cirkel ansiehet, einen ganzen Cirkel ausmachen könten. Noch vielweniger also können alle Seiten einer Ecke mehr betragen, als vier gerade Winkel. Doch es sind diese Sätze von geringen Nutzen, ja sie können schädlich seyn, wenn sie ohne ihrer gehörigen Einschränkung vorgetragen werden. Denn wenn man diesen Ecken Seiten oder Winkel zugestehen will, die mehr betragen, als zween gerade Winkel, so kan allerdings eine Seite einer solchen Ecke größer seyn, als die Summe der übrigen, und alle Seiten zusammen können mehr als vier rechte Winkel ausmachen, wie wir im folgenden sehen werden.

Sphärische Dreyecke.

[*Fig.* 361.] §. 49. Wir haben aber hier nicht nöthig andere Ecken zu betrachten als die einfachesten unter allen, welche nemlich nur drey Seiten haben. Denn daß der Seiten nicht weniger seyn können als drey, ist gar leicht einzusehen. Eine dergleichen Ecke wird in der 361 Zeichnung vorgestellet, da die Winkel, welche die Ecke einschließen, und ihre Seiten abgeben, sind ABC, CBD und DBA, welche wir mit den Bogen AC, CD, DA geschlossen haben, die mit einerley Oefnung des Cirkels um B in den Flächen der Winkel beschrieben worden sind. Dergleichen Ecken werden wir dreyseitige Ecken nennen.

§. 50. Eine dreyseitige Ecke hat drey Winkel, welche die Seiten derselben mit einander machen. Der erste ist die Neigung der Seite CBA gegen die Seite DBA, welche sie in der geraden Linie BA schneidet. Der zweyte ist die Neigung der Seite CBD gegen die Seite ABD, mit welcher sie in der geraden Linie DB zusammen laufet, und der dritte ist die Neigung der Seiten ABC, DBC, welche in BC zusammen laufen, gegen einander. Wir werden diese Winkel öfters mit drey Buchstaben bezeichnen, wie sonst gewöhnlich ist, und die Neigung der Seite ABC gegen ABD nennen CAD. Man muß sich also hüten, daß man dabey sich keinen andern Begrif beyfallen lasse, als denjenigen, welchen wir eben zu geben bemühet gewesen sind.

[*Fig.* 362.] §. 51. Eine dreyseitige Ecke, die vollkommen so aussiehet als diejenige, so die gegenwärtige Zeichnung vorstellet, in welcher nem-

nemlich die Seiten mit Cirkelbogen geschlossen sind, kan allezeit entstehen, wenn man eine Kugel vermittelst dreyer großen Cirkel derselben schneidet. Es stelle in der Kugel ABCD selbst ABCD einen dergleichen Cirkel vor. Der andere sey BGDF, so den vorigen in dem Durchmesser BD schneidet, welchen folgends diese Cirkel gemeinschaftlich haben. Wir setzen nicht, daß die Fläche dieses Cirkels BGDF auf die Fläche des Cirkels ABCD perpendicular sey, damit wir die Begriffe nicht ohne Noth einschränken. Denn es können zwar einer dieser Cirkel auf den andern perpendicular stehen; es ist aber dieses nicht nothwendig. Endlich sey der dritte Cirkel AFCG, welcher den ersten in AC schneidet, und den zweyten in FG, welches also die gemeinschaftlichen Durchmesser dieses Cirkels und der zween vorigen sind: so ist nunmehro DEFC eine dreyseitige Ecke, dergleichen wir erkläret haben. Ihre Seiten sind DEF, DEC und FEC, und ihre Winkel, die Neigungen dieser Flächen gegen einander.

§. 52. Aus dieser Ursache pfleget man die dreyseitige Ecken auch sphärische Dreyecke zu nennen. Zwar stellet man sich dieselbigen etwas anders vor, indem man sie so nennet. Ein sphärisches Dreyeck ist eigentlich ein Theil der Oberfläche einer Kugel DFC, welcher in drey Bogen dreyer der gröbsten Cirkel der Kugel DF, DC, FC eingeschlossen ist: und diese Bogen heißen die Seiten des sphärischen Dreyeckes. Die Winkel aber desselben sind die Winkel, welche diese Bogen bey F, D, C mit einander machen. Das ist, der Winkel bey F ist derjenige, welchen die zwo geraden Linien mit einander machen, deren eine den Bogen FD und die andere den Bogen FC in F berühret. Eben so ist es mit den übrigen.

§. 53. Es ist aber dieser Winkel bey F, wie wir XII, 39. gesehen haben, der Neigung der Seite DEF gegen die Seite CEF gleich, weil die Berührungslinien, die wir uns vorstellen, beyde auf den Halbmesser EF perpendicular stehen, und die eine in der Fläche der Seite DEF, die andere aber in der Fläche der Seite CEF lieget. Also ist der Winkel des sphärischen Dreyeckes DFC von dem Winkel DFC der dreyseitigen Ecke DEFC nicht verschieden. Eben die Betrachtung weiset, daß der Winkel DCF des sphärischen Dreyeckes dem Winkel DCF der dreyseitigen Ecke DEFC gleich sey; wie auch der Winkel FDC des sphärischen Dreyeckes, dem Winkel FDC der dreyseitigen Ecke. Was aber die Seiten des sphärischen Dreyeckes anlanget, so sind diese Bogen, und die Seiten einer dreyseitigen Ecke Winkel. Als, der Bogen DF ist eine Seite des sphärischen Dreyeckes DFC, und der Winkel DEF ist eine Seite der dreyseitigen Ecke DEFC. Und weil ein Bogen kein Winkel ist, so kan man in der That nicht sagen,

daß die Seiten eines sphärischen Dreyeckes, und die Seiten einer dreyseitigen Ecke, einerley seyn. Allein es wird der Winkel DEF durch den Bogen DF gegeben, und der Bogen wird hinwiederum durch den Winkel bekant. Suchet man den Bogen DF, so darf man nur den Winkel DEF suchen: so hat man den Bogen, weil dieser allezeit zwischen den Seiten des gegebenen Winkels DEF, mit einer Oefnung, die dem Halbmesser der Kugel gleich ist, leicht kan beschrieben werden: und wenn man den Bogen DF oder seine Verhältniß zu einem Quadranten hat, so erlanget man eben so leicht den Winkel DEF. Mit einem Wort, der Bogen DF ist das Maaß des Winkels DEF. Wegen dieser genauen Verknüpfung des Winkels DEF, welcher eine Seite in der dreyseitigen Ecke DEFC abgiebet, mit der Seite DF des sphärischen Dreyeckes DFC, und weil es in der Anwendung auf eins hinaus komt, ob man das eine oder das andere dieser zwey Dinge hat, oder suchet: kan man die Seite DF des Dreyeckes mit der Seite DEF der dreyseitigen Ecke vor einerley halten. Ja es wird in der Anwendung der Unterschied destomehr aufgehoben, weil man sowol die Seite DF durch ihre Verhältniß gegen einen oder vier Quadranten, als auch den Winkel DEF durch seine Verhältniß gegen einen oder vier rechte Winkel auszudrücken pfleget, welche zwo Verhältnisse allezeit gleich sind, VII, 64.

§. 54. Es wird demnach alles, was von den Seiten und Winkeln der dreyseitigen Ecken gezeiget werden soll, auf die sphärischen Dreyecke anzuwenden seyn. Ich gebe aber deswegen die Beweise lieber von den dreyseitigen Ecken, als von den sphärischen Dreyecken, weil jene durch die Figuren sich deutlicher ausdrücken lassen: und die meisten Beweise, so von denselben zu geben sind, aus demjenigen, so wir von der Neigung der Flächen gegen einander gesehen haben, gar leicht fließen: da, wenn man sich die sphärischen Dreyecke, so wie sie eben erkläret worden sind, vorstellet, man öfters in etwas weitläuftigere Beweise verfällt, und überhaupt die Einbildungskraft stark angegriffen wird.

§. 55. Wir merken aber noch an, ehe wir die gegenwärtige Figur verlassen, daß, wenn drey der grösten Cirkel einer Kugel ABCD, FBGD, AFCG einander schneiden, in der That acht dreyseitige Ecken zum Vorschein kommen, deren Seiten und Winkel kleiner sind als zween rechte Winkel zusammen genommen. Denn wenn man diese Einschränkung nicht machet, bekömt man durch eben den Schnitt solcher Ecken noch mehrere. Unter den erstern stehet DEFC, welche wir bishero gebrauchet haben, und daneben die DEFA. Oder, wenn wir uns des Begrifs eines sphärischen Dreyecks bedienen, so haben wir zuerst DFC und DFA. Diese haben die Seite DF

mit

mit einander gemeinschaftlich: die Seite DA aber ergänzet die Seite der erstern DC zu einen halben Cirkel, und AF eraänzet die Seite FEC ebenfals zu einen halben Cirkel. Der Winkel DAF ist mit dem Winkel DCF einerley: der Winkel DFA aber ergänzet den Winkel DFC zu zween geraden Winkeln, und eben das thut der Winkel ADF in Ansehung des Winkels FDC, XII, 38. Das dritte dieser Dreyecke AFB, beziehet sich auf AFD vollkommen so, wie sich dieses AFD auf das erste DFC beziehet. Und überhaupt ist von jeden zwey Dreyecken, welche, wie die betrachteten DFC, DFA neben einander auf einer Fläche stehen, dasjenige richtig, so von diesen zwey Dreyecken gewiesen worden ist; sonst haben wir von denselben nichts besonders anzumerken.

§. 56. Nur müssen wir noch das Dreyeck ABG mit dem DCF, oder die dreyseitige Ecke AEGB mit der DEFC, die wir am ersten betrachtet haben, vergleichen. Es sind in diesen zwoen Ecken alle Seiten und Winkel gleich, welche einander entgegen stehen. Die Seite nemlich DEF ist gleich der Seite BEG, weil diese Seiten entstanden sind, indem die zwo geraden Linien BD, FG einander in E geschnitten haben. Aus eben dem Grunde ist auch die Seite AEG der Seite FEC gleich; denn die Durchmesser AC, FG sind ebenfals gerade Linien, die einander in E schneiden: und mit den Seiten AEB, DEC hat es eben die Bewandniß. Was aber die Winkel dieser zwo einander bey dem Mittelpuncte E entgegen gesetzten Ecken anlanget, so entstehen die Winkel derselben AGB und DFC, indem die zwo Flächen AFCG und BGDF einander in der Linie FG schneiden, sie sind einander entgegen gesetzt, und demnach einander gleich, XII, 38. Eben so ist es auch mit den Winkeln ABG und CDF. Auch diese liegen zwischen den Flächen ABCD und BFDG, welche einander in BD schneiden, und sind einander entgegen gesetzt. Sie sind demnach ebenfals gleich. Und endlich liegen GAB und DCF zwischen den Flächen AFCG und ABCD, die einander in AC schneiden, wieder nach entgegen gesetzten Seiten, und sind demnach ebenfals gleich. Demnach haben die zwo dreyseitigen Ecken AEGB und CEFD gleiche Seiten und gleiche Winkel: und zwar sind diejenigen Winkel derselben aleich, welche zwischen den gleichen Seiten enthalten sind, und diejenigen Seiten, welche zwischen den gleichen Winkeln liegen. Man siehet leicht, daß dieses von jeden zwo andern, dreyseitigen Ecken der Kugel, welche einander gänzlich entgegen gesetzt sind, gelten müsse.

[*Fig.* 363.] §. 57. Wir haben also hier zwo in allen Stücken gleiche dreyseitige Ecken, welche doch nicht in einander passen können. Und von dieser Art sind alle dreyseitige Ecken, deren Seiten und Winkel zwar

gleich

gleich sind, aber in verkehrter Ordnung liegen. Es schicken sich nemlich zwo Ecken in einander, oder die eine passet in die andere, wenn sie dergestalt in diese gebracht werden kan, daß aus den zwo Ecken nur eine wird. Es seyn aber ABCD, abcd zwo dreyseitige Ecken, in welchen die Seiten und Winkel gleich sind, welche wir mit einerley Buchstaben bezeichnet haben, ABC nemlich = abc, und CBD = cbd, wie auch A = a und D = d, ferner ABD = abd und C = c: so werden dieselbe nicht in einander passen, man mag sie kehren wie man will, und doch sind dergleichen dreyseitige Ecken gleich zu nennen, und werden auch würklich so genant, weil in der einen nichts ist, so in der andern nicht in eben der Größe vorkäme. Denn die verschiedene Lage, welche die Seiten CBA, CBD und cba, cbd, wie auch die Winkel A, D und a, d gegen einander haben, kan in der Größe der dreyseitigen Ecken selbst nichts ändern.

[*Fig.* 364.] §. 58. Es lassen sich aber jede zwo dreyseitige Ecken, deren Seiten und Winkel einander zwar gleich sind, aber in verkehrter Ordnung liegen, dergestalt an einander bringen, wie an die Ecke FEDC die andere FEdC gesetzt ist, in welcher FD = Fd, DFC = dFC und so an der andern Seite CD = Cd und DCF = dCF, wie auch D = d. Denn die gleichen Seiten und Winkel derselben können bey diesen Umständen nicht anderst liegen als in der 363 Zeichnung die Seiten und Winkel liegen, die mit einerley Buchstaben bezeichnet sind. Und wenn man in der 364 Zeichnung die der CEDF entgegen gesetzte dreyseitiae Ecke AEGB um ihre Spitze E dergestalt herum drehet, daß die Seite AEG beständig in der Ebene AFCG bleibt, in welcher sie lieget, bis sie endlich auf die ihr gleiche Seite CEF fällt: so fällt die dreyseitige Ecke AEGB wirklich in CEFd, und der Winkel CFd derselben ist dem Winkel CFD gleich: der Winkel d ist gleich dem Winkel D, und FCd dem FCD. Ferner aber ist auch die Seite FEd der Seite FED, und die Seite CEd der Seite CED gleich. Die dreyseitige Ecken nun, welche mit der FEdC zusammen passen, sind der FEDC gleich, ob sie sich zwar in diese nicht schicken, weil die erstere dieser Ecken der letztern gleich ist.

[*Fig.* 362.] §. 59. Es werden aber, wie oben bemerket worden ist, XII, 55. durch eben die Schnitte der Kugel von welchen wir abgegangen sind, oder dadurch, daß man in ihrer Oberfläche drey der grösten Cirkel ABCD, AFCG, und BFDG nach Belieben beschreibet, noch mehr dreyseitige Ecken oder sphärische Dreyecke hervorgebracht, als die achte, welche wir betrachtet haben. Unter diesen ist dasjenige, dessen Seiten sind FAGC, welcher Bogen den vorigen CF zu einem ganzen Umkreis ergänzet,

DF

DF und DC. Der Seite FAGC ist der äußere Winkel FDC entgegen gesetzt, und die übrige Winkel dieses Dreyeckes sind DFA, DCG. Es gehöret aber dieses Dreyeck zu demjenigen, deren Betrachtung überflüssig wäre, weil seine Seite FAGC größer ist, als ein halber Cirkelkreis, XII, 46. Denn es ist dieses Dreyeck nach allen seinen Theilen bekant, wenn die Seiten und Winkel des Dreyecks DFC bekant sind, weil die Seiten FAGC und CF einen ganzen Cirkelkreis, und die beyden Winkel FDC, der äußere und der innere, vier rechte Winkel ausmachen; der Winkel DFA aber den Winkel DFC, und DCG den DCF zu zween geraden Winkeln ergänzet, indem die übrigen beiden Seiten, DF und DC den beyden Dreyecken gemeinschaftlich sind. Man kan aus den Theilen der in der Oberfläche der Kugel beschriebenen Cirkel noch mehr dergleichen Dreyecke zusammen setzen; welche uns nur ohne Noth aufhalten würden. Damit dieses nicht geschehen möge, wollen wir dasjenige so denselben unentbehrlich ist, uns kurz vorstellen, und sie alsdann bey Seite setzen.

[*Fig.* 415.] §. 60. Man kan sich diese allgemeine Anweisung vorstellen eine jede dreyseitige Ecke, die möglich ist, oder ein jedes sphärisches Dreyeck zu bilden. Man beschreibe in einer Ebene den Cirkel ABCD, und setze an den Mittelpunct desselben E die gerade Linie EF auf die Fläche des Cirkels perpendicular, oder nach Belieben schief, wie man will. In der Fläche des Cirkels aber ziehe man die zween Halbmesser EB, EC ebenfals nach Belieben. Dadurch erhält man die drey Winkel CEB, FEB, FEC, deren ersterer bereits durch den Bogen CB, und sein äußerer durch den Bogen BADC geschlossen ist. Die übrigen aber vermittelst der, um den Mittelpunct des Cirkels E mit eben der Oefnung des Instruments, zu beschreibenden Bogen FB und FC, geschlossen werden können. Dadurch wird die dreyseitige Ecke BEFC, oder das sphärische Dreyeck BFC erhalten, dessen Seiten sind BC, BF und CF, und zugleich ein anderes, welches die Bogen BADC, BF und CF zu seinen Seiten hat. Wir haben eben XII, 59. gesehen, wie die Seiten und Winkel des letztern Dreyecks aus den Seiten und Winkeln des erstern heraus gebracht werden, und dörfen uns also hiebey nicht aufhalten.

§. 61. Dasjenige aber so wir hier zu untersuchen haben, bestehet in dem folgenden. Ich setze der Bogen BC sey kleiner als der halbe Cirkelkreis, und folgends der Winkel BEC kleiner als zween rechte Winkel. Dadurch wird der Bogen BADC größer als der halbe Umkreis, und der äußere Winkel BFC übertrift die Summe zweyer rechten Winkel. Der Seite BC stehet zu dem sphärischen Dreyeck BFC der Winkel BFC entgegen.

Von diesen nun ist die Frage, ob er bey der gesetzten Bedingung, daß nemlich BC weniger betrage, als den halben Umkreis, jemals so groß, oder größer werden könne, als zween gerade Winkel? In dem anliegenden sphärischen Dreyecke aber, dessen Seiten sind BADC, BF, und FC, stehet der Seite BADC der äußere Winkel BFC entgegen. Von diesen ist die Frage, ob bey der Bedingung, daß die Seite BADC größer sey, als der halbe Cirkelkreis, er jemals zween rechten Winkeln gleich, oder kleiner werden könne, als zween rechte Winkel? Beyde Fragen werden zugleich und gar leicht aufgelöset. Man darf nur den halben Durchmesser CE in EA verlängern, so nemlich daß AEC eine gerade Linie, und folgends ein Durchmesser des Cirkels AECD werde, und zugleich die Fläche FEC an dieser Seite der Linie EF, so weit man will, fortsetzen. Dieses ist in der Zeichnung dadurch geschehen, daß man die Vorstellung des halben Cirkels AFC voll gemacht hat. Nun siehet man alsbald, daß die beyden Winkel BFC und BFA so viel ausmachen, als zween rechte Winkel, und daß also der innere Winkel BFC nothwendig kleiner seyn müsse, als zween rechte Winkel, so lange der Bogen BC kleiner ist, als der halbe Umkreis ABC. Und bey eben den Umstand, das ist, wenn BADC größer ist als der halbe Umkreis ADC, ist auch der äußere Winkel, welcher dieser Seite in dem andern Dreyeck BADC entgegen stehet, nothwendig größer als zween rechte Winkel.

§. 62. Also ist überhaupt in einem jeden sphärischen Dreyeck, ein Winkel, wie man ihn annehmen wil, größer als zween rechte Winkel, wenn die ihm entgegen gesetzte Seite größer ist, als der halbe Cirkelkreis, und kleiner, wenn die ihm entgegen gesetzte Seite kleiner ist als der halbe Cirkelkreis, Woraus alsbald folget, daß, wenn diese Seite weder größer noch kleiner ist, als der halbe Umkreis eines Cirkels, auch der ihr entgegen gesetzte Winkel weder größer noch kleiner seyn könne, als zween gerade Winkel. Und man siehet dieses auch aus der Zeichnung, die wir betrachten. Ist die Seite der halbe Umkreis ABC, so ist der ihr entgegen gesetzte Winkel derjenige, den die Fläche AFE mit der Fläche FEC einschließet. Weil aber dieses Theile von eben der Fläche sind, so ist der Winkel, welchen sie einschließen, zween rechten Winkeln gleich. Man siehet aber leicht daß in diesem Fall kein eigentliches Dreyeck gebildet werde. Wie solte der halbe Cirkel ABC mit dem halben Cirkel AFC ein Dreyeck machen?

§. 63. Es kan also in einem sphärischen Dreyeck keine Seite ein halber Cirkelkreis seyn, sondern eine jede Seite muß mehr oder weniger als

die

die Helfte eines Cirkelkreises betragen. In welchem Fall sie aber mehr oder weniger beträgt, siehet man aus dem Winkel, der ihr in dem Dreyeck entgegen stehet. Ist dieser Winkel kleiner als zween rechte Winkel, so kan die ihm entgegen gesetzte Seite nicht größer seyn, als ein halber Cirkelkreis, weil sonst der Winkel größer seyn müste, als zween gerade Winkel. Auch kan die Seite nicht einen halben Cirkel gleich seyn, weil sonst der Winkel zween rechten Winkeln gleich seyn, und also das Dreyeck zu einem Zweyeck werden müste. Und auf eben die Art schließet man, daß einem Winkel eines sphärischen Dreyecks, der größer ist als zween gerade Winkel, nothwendig eine Seite entgegen stehen müsse, die die Helfte des Umkreises eines Cirkels übertrift.

§. 64. Vermittelst dieser Sätze kan man leicht vermeiden, daß man bey der Zusammensetzung der dreyseitigen Ecken nicht auf solche verfält, deren Winkel größer sind, als zween gerade Winkel, oder deren Seiten von Cirkelbogen gemessen werden, welche einen halben Umkreis übertreffen. Man setzet dergleichen Ecken entweder aus zwo Seiten und einem Winkel, oder aus zween Winkeln und einer Seite, oder aus drey Seiten, oder aus drey Winkeln zusammen. In allen diesen Fällen darf man nur jede Seite und jeden Winkel, die man als bekant annimmet, kleiner annehmen, als zween rechte Winkel, so werden auch die Seiten und Winkel, die dadurch bestimmet werden, von eben der Art ausfallen; wie die besondere Betrachtung dieser Ecken, zu welcher wir uns nun wenden, vor sich klar machen wird.

Gründe der Gleichheit zweyer dreyseitigen Ecken.

[*Fig.* 365.] §. 65. Man nehme die zwo Seiten CBA, DBA nach Belieben; aber doch eine jede derselben kleiner als einen halben Cirkel; und setze sie unter einem beliebigen Winkel CAD zusammen, der kleiner ist, als zween rechte Winkel: so siehet man sogleich, daß, wenn man an dieselbe die dritte Seite CBD legen, und dadurch die dreyseitige Ecke ABCD ausmachen wil, dieses auf nicht mehr als auf einerley Art werde geschehen können: weil durch die drey Punete CBD sich nicht mehr als eine ebene Fläche legen lässet, X, 14. Und daraus schließet man sogleich, daß alle dergleichen Ecken, die aus den Seiten ABC, ABD, welche mit einander einen Winkel von der Größe des Winkels CAD machen, zusammen gesetzet werden können, einander gleich seyn müssen: falls ihre Seiten eben so liegen, wie in der dreyseitigen Ecke, welche wir vor uns haben, so nem-

lich, daß AC über die AD, und der Winkel A, welchen man angenommen, in Ansehung der Seite CD, deren Größe aus demselben bestimmet wird, zur Linken fällt. Denn jede zwo dreyseitige Ecken, welche auf die Art zusammen gesetzet werden, müssen sich nothwendig in einander schicken, wie man leicht siehet. Nemlich die Seiten CBD sind in allen solchen Dreyecken von einerley Größe, wie auch die Winkel C und die Winkel D, welche von gleichen Seiten eingeschlossen werden.

§ 66. Es kan aber auch der Winkel CAD anders an die Seite ABD gesetzet werden, so nemlich, daß die gegebene Seite ABC unter die ABD zu liegen komme, indem sie in A B c fället. Daß nun in diesem Falle dennoch die dreyseitige Ecke ABDc, welche man ausmachen kan, indem man an die Seiten ABD und ABc die dritte Seite DBc anleget, der dreyseitigen Ecke ABDC in allen Stücken gleich sey, siehet man, wenn man in Gedanken die Ecke, welche der ABCD ganz entgegen stehet, dergestalt an ABD setzet, wie wir bey der Betrachtung der 364 Zeichnung gesehen haben, daß es allzeit geschehen könne. Denn mit dieser Ecke muß diejenige, welche man aus den Seiten ABD, ABc, und aus dem Winkel DAc zusammen setzet, nothwendig zusammen fallen. Dadurch aber werden die Seiten und Winkel in ABDc auch den Seiten in ABDC gleich, ob sie zwar in verkehrter Ordnung liegen, XII, 58.

§. 67. Das erste also, wodurch eine dreyseitige Ecke mit ihren übrigen Seiten und Winkeln bestimmet wird, sind zwo Seiten, und der Winkel, welchen sie einschließen; und jede der übrigen Seiten und Winkel dieser Ecken wird nothwendig kleiner als zween rechte Winkel, weil sie den angenommenen Seiten und Winkeln entgegen liegen. Hieraus aber können wir eben dergleichen Schlüsse ziehen, als wir bey den gemeinen Dreyecken aus einem dem gegenwärtigen vollkommen ähnlichen Satze IV, 116. gezogen haben. Wir sehen ohne Weitläuftigkeit hieraus, daß, wenn man setzet, daß in der dreyseitigen Ecke ABDC die Seiten ABC und ABD einander gleich sind: auch die Winkel, welche an den gleichen Seiten liegen, gleich seyn müssen, C nemlich = CDA. Denn wenn man an die Seite ABD die dreyseitige Ecke ABDc anbringet, welche in der Kugel der ABDC bey B entgegen steht: so ist Ac = AC = AD, und der Winkel C ist dem Winkel c gleich. Weil aber auch der Winkel DAc dem Winkel DAC gleich ist, so kan man die Ecke ABCD um die AB dergestalt wenden, daß ABD in ABc, und AC in AD falle: und wenn dieses geschiehet, so fället auch CBD mit der Seite cBD zusammen. Da nun also der Winkel c dem Winkel C gleich ist, und nunmehro der Winkel ADC mit dem

Win-

Winkel c zusammen fället, und ihm folgends nothwendig gleich ist; so muß eben dieser Winkel ADC auch dem Winkel C gleich seyn.

§. 68. Sind demnach in einer dreyseitigen Ecke alle Seiten gleich, so sind nothwendig auch alle Winkel gleich: weil jederzeit diejenigen Winkel gleich seyn müssen, welche an den gleichen Seiten liegen.

§. 69. Wir können diesen Satz verkehren, und zwar so, daß wir zeigen, daß aus einer Seite und aus zween Winkeln, die an derselben Seite liegen, nicht verschiedene dreyseitige Ecken zusammen gesetzet werden können: sondern daß in zwoen dreyseitigen Ecken, in deren einer eine Seite vorkommet, welche einer Seite der anderen Ecke gleich ist, und an welcher Winkel liegen, die denjenigen Winkeln gleich sind, zwischen welchen die erwehnte Seite in der andern Ecke lieget: auch die übrigen Winkel gleich sind, wie auch die Seiten, die in den zwoen Ecken zwischen den gleichen Winkeln liegen. Und der Beweis hievon ist gar leicht. Denn wenn man in der dreyseitigen Ecke ABCD die Seite ABD läßet wie sie ist, und behält auch den Winkel CAD: verändert aber die Seite ABC, und machet sie in Gedanken größer oder kleiner als sie die Figur vorstellet; so wird dadurch nothwendig auch der Winkel ADC größer oder kleiner. Gehet also in dem Winkel ADC keine Verämderung vor, so kan auch in der Seite ABC keine Veränderung vorgehen. Und demnach sind in allen dreyseitigen Ecken, welche aus der Seite ABD, und aus den Winkeln CAD, ADC zusammen gesetzt sind, auch die Seiten ABC gleich, die dem Winkel ADC entgegen stehen. Hieraus aber folget, vermittelst des Satzes, welchen wir eben erwiesen haben, XII, 67. daß auch die übrigen Seiten solcher Dreyecke, und die übrigen Winkel gleich seyn müssen. Wolte man die Winkel in verkehrter Ordnung an die gegebene Seite ABD setzen, den Winkel CAD, nemlich an BD, und den Winkel CDA an AB: so würde die dreyseitige Ecke zwar nicht mit der ABCD, wohl aber mit der ABcD zusammen passen, und also dennoch der ABCD gleich seyn, weil ABcD ihr gleich ist.

§. 70. Und wenn man dieser Sache etwas weiter nachdenket, so findet man, daß daraus folge, daß auch die Seiten ABC und CBD einer dreyseitigen Ecke gleich seyn müssen, wenn die Winkel CAD und CDA gleich sind, an welchen diese Seiten liegen. Denn in diesem Falle kan die Ecke ABCD in die Ecke ABcD dergestalt gebracht werden, daß der Winkel CDA in den Winkel DAc, und CAD in ADc fällt. Und da die Seite AC der Ac allezeit gleich ist, daraus aber, daß nunmehro CBD auf die cBA fällt, nothwendig folget, daß auch CBD der cBA gleich seyn müsse; so ist zu schließen, daß auch die Seiten CBA, CBD einander selbst gleich seyn.

[Fig. 366.] §. 71. Hierinnen also stimmen die dreyseitigen Ecken wieder mit den gemeinen Dreyecken überein; und es müssen also hieraus wieder eben dergleichen Sätze folgen, als wir bey jenen gesehen haben. Es ist auch in einer dreyseitigen Ecke immer der Winkel größer, als ein anderer Winkel eben der Ecke, welcher der größern Seite entgegen stehet, IV, 242. Denn man setze, daß in der dreyseitigen Ecke ABCD der Winkel CDA größer sey, als der Winkel CAD, und lege an die gerade Linie BD die Seite DBE, dergestalt, daß der Winkel EDA dem Winkel CAD gleich wird: so ist die Seite EBA der Seite EBD gleich, XII, 70. Man setze zu diesen beyden Seiten den Winkel EBC, so wird auch ABE+EBC=EBD+EBC, das ist ABC=EBD+EBC. Nun aber ist EBD+EBC größer als CBD, weil in einer jeden dreyseitigen Ecke die Summe zwoer Seiten größer ist als die dritte, XII, 47. demnach ist auch ABC größer als CBD. Es stehet aber die Seite ABC dem größern Winkel CDA, und CBD dem kleinern CAD entgegen. Es ist hier nicht außer Acht zu lassen, daß bloß von solchen dreyseitigen Ecken hier die Rede sey, deren Seiten und Winkel sämtlich kleiner sind als zween rechte Winkel: von andern ist der Satz nicht richtig.

§. 72. Dieses war die erste Zusammensetzung der dreyseitigen Ecken. Man kan sie zweytens auch aus ihren drey Seiten verfertigen, wenn man diese gehörig an einander bringet. Wir haben gleich Anfangs gezeiget, wie die Seiten beschaffen seyn müssen, wenn sie eine Ecke geben sollen. Jede zwo derselben müssen größer seyn als die dritte; eine jede insbesondere muß kleiner seyn als ein halber Cirkel, und alle dreye zusammen müssen kleiner seyn als ein ganzer Cirkel.

[F. 367.] §. 73. Ich übergehe die Art und Weise, wie diese Zusammensetzung zu verrichten ist, weil man sich dieselbe leicht vorstellen kan, und wir bemerken nur den Satz, daß bey allen dreyseitigen Ecken, welche aus gleichen Seiten zusammen gesetzet sind, so nemlich, daß einer jeden Seite der einen Ecke eine Seite der andern gleich sey: auch die Winkel gleich seyn werden, welche in den beyden Ecken zwischen den gleichen Seiten liegen. Denn man stelle sich vor, daß auf die Seite ABD zwo dreyseitige Ecken ABDC und ABDc gesetzt seyn, in welchen die Seiten ABC und ABc, wie auch DBC und DBc einander gleich sind, und lege durch BC und Bc die ebene Fläche CBc: so bekomt man dadurch zwo andere dreyseitige Ecken ABCc und DBCc, deren jede zwo gleiche Seiten hat, ABC nemlich = ABc, und DBC = DBc. Folgends sind die Winkel derselben, welche an den gleichen Seiten liegen einander gleich, ACc = AcC, wie auch DCc = DcC, XII, 67. Setzet man nun diese Winkel zusammen, so wird auch ACc+DCc = AcC +DcC,

+DcC, das ist, ACD = AcD. Also werden in den zwo dreyseitigen Ecken ABCD und ABcD die Winkel ACD, AcD von gleichen Seiten ABC = ABc und DBC = DBc, eingeschlossen; es sind demnach XII, 66. außer diesem Winkel auch die Winkel CAD und cAD, wie auch CDA und cDA, einander gleich.

§. 74. In dem Falle, welchen wir betrachtet haben, liegen die Seiten und Winkel der Ecken in verkehrter Ordnung, und wenn man die Ecke ABcD dergestalt auf ABD setzen wolte, daß c über dieser Fläche zu liegen käme, gleichwie C über derselben lieget, so würde DBc an AB zu liegen kommen, und ABc an DB. Also hat bey dieser Ordnung der Seiten der Satz seine Richtigkeit. Man kan aber auch vermittelst desselben einsehen, daß auf die Seite ABD aus den Seiten ABC, DBC keine dreyseitige Ecke gesetzet werden könne, welche von der ABCD verschieden wäre, wenn man die Seite ABC an AB und nicht an BD setzet, an welche BD hingegen die andere Seite DBC gesetzet werden muß, und diese Seiten dergestalt kehret, daß sie, wie die Seiten ABC, DBC über, und nicht unter der Fläche ABD zusammen stoßen. Denn wenn man sich auf AD eine gleichseitige Ecke vorstellet, deren Seiten an AB der ABC gleich sey, und die Seite an BD der BDC; behält aber das Dreyeck ABDc, wie wir es vorher verfertiget und betrachtet haben, so kan man allezeit durch den Beweis, welchen wir eben geführet, heraus bringen, daß der Winkel bey A der eingebildeten dreyseitigen Ecke, dem Winkel DAc gleich seyn müsse. Da nun der Winkel DAc dem Winkel DAC gleich ist, so muß auch der eingebildete Winkel bey A dem Winkel DAC gleich seyn. Es kan also die Seite CBA bey den gesetzten Bedingungen keine andere Lage haben, als die, welche die Zeichnung vorstellet. Und eben dieses ist auch von der Seite DBC auf eben die Art einzusehen. Demnach sind auch die Winkel solcher dreyseitigen Ecken gleich, welche aus gleichen Seiten in einerley Ordnung zusammen gesetzt sind.

§. 75. Die dritte Art eine dreyseitige Ecke zusammen zu setzen ist, wenn man zwo Seiten derselben annimmet, und einen Winkel, welcher zwischen diesen zwo Seiten nicht enthalten ist. Aus diesen Dingen aber lassen sich öfters verschiedene Dreyecke verfertigen; und man kan nicht sagen, daß jede zwo dreyseitige Ecken, in welchen zwo Seiten gleich sind, und ein Winkel, welcher nicht zwischen diesen Seiten liegt, auch nothwendig einander selbst gleich seyn müssen. Wir müssen die Umstände, unter welchen aus zwo gegebenen Seiten einer dreyseitigen Ecke, und aus einem Winlel derselben, welcher nicht zwischen den gegebenen Seiten lieget, zwo sol-

solche Ecken von verschiedenen Seiten zusammen gesetzet werden können, etwas genauer betrchten.

[*Fig.* 368.] §. 76. Es sey aus der Seite ABD, aus der Seite CBA und aus dem Winkel D, die dreyseitige Ecke ABCD zusammen gesetzet. Man lege durch AB die Ebene ABE dergestalt, daß sie auf der Seite CBD, welche man bis an d vergrößert hat, perpendicular stehe. Man mache sodann den Winkel EBc dem Winkel EBC gleich, und lege durch AB, Bc die ebene Fläche ABc: so wird die Seite ABc der Seite ABC gleich, und die dreyseitige Ecke ABcD eben so wohl als die vorige ABCD aus dem Winkel D, aus der Seite ABD, und aus der Seite ABc, welche der ABC gleich ist, zusammen gesetzet seyn. Denn in den zwo dreyseitigen Ecken ABCE und ABcE sind die Winkel AEC und AEc gerade, und folgends einander gleich; und die Seiten CBE, CBE hat man einander ebenfals gleich gemacht; die Seite ABE aber ist diesen beiden Ecken gemeinschaftlich; demnach sind auch die übrigen Seiten ABC und ABc gleich, XII, 67. Es sind demnach, unter den Umständen des Satzes, allezeit zwo dreyseitige Ecken möglich, so oft die Art die eine derselben aus der andern zu verfertigen, welche eben gezeiget worden ist, sich anwenden lässet. Man siehet leicht, daß dieses öfters geschehen könne, wenn das Punct C von dem Punct E verschieden ist, und also die Seite ABC nicht selbst auf der Seite DBC perpendicular stehet. Es wäre aber zu weitläuftig, die Umstände genau aus einander zu setzen, bey welchen diese Zusammensetzung zweyer dreyseitigen Ecken angehet, und bey welchen sie nicht statt hat.

§. 77. Das einzige merken wir an, daß, wenn aus dem Winkel D, aus der Seite ABD, und aus der Seite ABC = ABc die zwo dreyseitigen Ecken ABDC, ABDc zusammen gesetzet sind, in der dreyseitigen Ecke ABCc die Winkel ACc und AcC gleich seyn werden. Denn dieses fließet aus dem gegebenen Beweise ebenfals XII, 67. Nun aber ist der Winkel ACc die Ergänzung des Winkels ACD zu zween geraden Winkeln; also ergänzet auch der Winkel AcD den Winkel ACD zu zween geraden Winkeln. Es machen also bey zwo dreyseitigen Ecken ABCD, ABcD, welche aus dem Winkel D und den zwo Seiten ABD und ABC = ABc zusammen gesetzet worden sind, die Winkel C, c, welche Anfangs nicht gegeben waren, und welche nicht zwischen den gegebenen Seiten liegen, wenn man sie zusammen setzet, jederzeit so viel, als zween gerade Winkel.

§. 78. Aus eben der Figur siehet man auch sogleich, daß aus zween Winkeln einer dreyseitigen Ecke, und aus einer Seite derselben, welche

nicht

nicht zwischen den gegebenen Winkeln lieget, öfters zwey dreyseitige Ecken zusammen gesetzet werden können; und daß also nicht alle dergleichen Ecken nothwendig gleich sind, welche aus zween Winkeln zusammen gesetzt sind, und aus einer Seite, welche nicht zwischen diesen Winkeln lieget. Denn die dreyseitigen Ecken ABCD und ABcd sind würklich dergestalt zusammen gesetzet. Weil der Winkel ECA dem Winkel EcA gleich ist, so sind auch die Ergänzungen dieser Winkel DCA und d c A gleich. Da nun über dieses der Winkel d dem Winkel D gleich ist; so haben diese dreyseitige Ecken würklich zween gleiche Winkel, und außer dem ist die Seite des einen cBA der Seite des andern CBA gleich. Dennoch sind weder die übrigen Winkel cAd und CAD, noch die Seiten dBA, DBA einander nothwendig gleich; wie man leicht siehet.

§. 79. Doch machen die zwo Seiten dieser Ecken dBA und ABD mit einander allezeit zween gerade Winkel aus: und diese Seiten sind diejenigen, welche in den zwo dreyseitigen Ecken ABCD und ABcd nicht zwischen den Winkeln liegen, welche einander gleich sind. Denn von den Seiten dBc und DBC, die zwischen diesen gegebenen Winkeln d, c und D, C liegen, ist nichts dergleichen zu sagen.

[*Fig.* 369.] §. 80. Es ist noch eine Art übrig, eine dreyseitige Ecke zusammen zu setzen, wenn nemlich die drey Winkel derselben gegeben oder angenommen sind. Wir werden die dahin gehörige Sätze zu zeigen keine große Weitläuftigkeit brauchen; und es wird sich alles sogleich aus dem vorigen herleiten lassen, wenn wir nur eine besondere Eigenschaft der dreyseitigen Ecken werden erwiesen haben, welche diese ist: es lässet sich zu einer jeden dreyseitigen Ecke ABCD eine andere a b c d beschreiben, deren Seiten a b c, c b d, d b a die Ergänzungen der Winkel C, D und A der vorigen zu zweyen geraden Winkeln sind, und deren Winkel a, c, d hinwiederum die Seiten ABC, CBD und ABD zu zweyen geraden Winkeln ergänzen. Nemlich die Seite a b c ergänzet den Winkel C zu zweyen geraden Winkeln, die Seite a b d den Winkel A, und die Seite c b d den Winkel D. Hingegen ergänzet die Seite ABC den Winkel a, die Seite CBD den Winkel c, und die Seite ABD den Winkel d, ebenfals zu zweyen geraden Winkeln.

§. 81. Man kan die Ecke abcd, welche auf die gegebene ABCD sich dergestalt beziehet, sich nachfolgender maßen deutlich vorstellen. Man nehme innerhalb der gegebenen Ecke ABCD das Punct b nach Belieben, und lasse aus demselben auf jede Seite der ABCD eine Perpendicularlinie fallen. Es sey nemlich b E auf ABC perpendicular, b F auf CBD, und b G auf

ABD. Man verlängere diese Perpendicularlinien nach Belieben in a, c, d, und beschreibe gröſſerer Deutlichkeit halben, um den Mittelpunct b, die Bogen ac, ad, cd: so hat die dreyseitige Ecke abcd, deren Seiten die Ausschnitte abc, cbd, und abd sind, die erzehleten Eigenschaften.

§. 82. Denn wenn die Fläche abc die Fläche ABC in EI schneidet, und die Fläche CBD in IF, und wenn EH, HG die Linien sind, in welchen die Flächen ABC und ABD von der abd geschnitten werden, und GK, KF diejenigen, in welchen die Fläche dbc die beyden ABD und CBD geschnitten hat; und man stellet sich den Cörper IEbFKBHG vor, welcher von den sechs Flächen eingeschlossen wird, die zugleich die Seiten der zwo dreyseitigen Ecken ABCD, abcd abgeben: so siehet man nach einer kleinen Betrachtung, welche sich auf die gewiesene Zusammensetzung gründet, daß bE auf EI und EH perpendicular sey. Denn diese bE ist auf die Fläche EHBI perpendicular. Und aus eben der Ursache sind die Winkel bGH, bGK, wie auch bFK, bFI gerade, X, 29. Demnach ist der Winkel IEH derjenige, welchen die Fläche bEI mit der Fläche bEH machet X, 41. und folgends dem Winkel a gleich, und der Winkel HGK ist aus eben den Gründen dem Winkel d, wie auch IFK dem Winkel c gleich. Weil aber auch daraus, das die Fläche abc auf den beyden Flächen ABC und CBD perpendicular stehet, hinwiederum fließet, daß diese Flächen ABC und CBD beide auf die abc perpendicular sind; und dieselbe einander in CB schneiden, so ist auch diese CB auf die Fläche abc X, 47. und folgends auf IE und IF perpendicular, und die Winkel BIE, BIF sind gerade. Aus eben den Gründen folget auch, daß die Winkel BHE, BHG, wie auch BKG, BKF gerade seyn. Also ist wieder der Winkel EIF der Neigung der Fläche BIE gegen BIF, das ist, dem Winkel C der dreyseitigen Ecke ABCD, gleich, und der Winkel EHG dem Winkel A, wie auch GKF dem Winkel D.

§. 83. Nun sind in einem jeden Vierecke alle vier Winkel allezeit vier geraden Winkeln gleich, IV, 237. wenn also zween derselben selbst gerade sind, so machen die zween übrigen ebenfals zween gerade Winkel mit einander. Diese Umstände aber treffen bey den Vierecken ein, welche den Cörper EK einschlieſſen. In dem Vierecke EbFI sind die Winkel IEb und IFb beyde gerade; in dem Vierecke IEHB sind die zween Winkel EIB, EHB ebenfals gerade, und so ist es bey allen Seiten dieses Cörpers. Es müssen demnach auch die übrigen Winkel dieser Vierecke eine Summe geben, welche zween geraden Winkeln gleich sey. Also ist der Winkel EbF oder abc die Ergänzung des Winkels EIF = C, zu zween geraden Winkeln. Eben so

ergän-

ergänzet EbG oder abd den Winkel EHG = A, und FbG = cbd ergänzet den Winkel D. Das ist, die Seiten der Ecke abcd ergänzen die Winkel der Ecke ABCD zu zween geraden Winkeln. Ferner ergänzet auch in dem Vierecke IBHE der Winkel HBI oder ABC den Winkel HEI = a zu zween geraden Winkeln; HBK oder ABD ergänzet den Winkel HGK = d, und KBI oder DBC ergänzet den Winkel IFK = c. Das ist, ein jeder Winkel des Dreyeckes abcd ergänzet eine Seite des Dreyeckes ABCD, und eine jede Seite des Dreyeckes abcd einen Winkel des Dreyecks ABCD zu zween geraden Winkeln.

§. 84. Hieraus lässet sich dasjenige gar leicht zeigen, warum wir diesen Satz insonderheit erwiesen haben, daß nemlich aus drey gegebenen Winkeln nicht mehr als einerley dreyseitige Ecke zusammen gesetzt werden können. Wenn die Winkel A, C, D, der dreyseitigen Ecke ABCD bestimmet sind, so können die Seiten der dreyseitigen Ecke abcd nicht verändert werden, weil die Seite abd den Winkel A zu zween rechten Winkeln ergänzet, und dbc den Winkel D, wie auch abc den Winkel C. Es sind demnach die Seiten dieser Ecke abcd von bestimter Größe. Also sind auch die Winkel eben dieser Ecke a, c und d von bestimmeter Größe, denn wir haben XII, 73. gesehen, daß, so bald die Seiten einer solchen Ecke gegeben sind, auch die Winkel derselben gegeben werden, und daß sich in denselben nichts verändern lasse, so lange die Seiten nicht verändert werden. Sind nun aber die Winkel a, c, d von bestimter Größe, so sind auch ihre Ergänzungen zu zween geraden Winkeln ebenfals bestimmet. Diese Ergänzungen aber sind die Seiten der Ecke ABCD, die Seite ABC nemlich ist die Ergänzung des Winkels a, die Seite CBD die Ergänzung des Winkels c, und ABD ergänzet den Winkel d. Also werden diese Seiten ebenfals durch die Anfangs angenommenen Winkel A, D, C bestimmet, und so lange jene Winkel nicht verschieden sind, so sind auch diese Seiten nicht verschieden. Das ist, es lassen sich nicht zwo dreyseitige Ecken verfertigen, welche einerley Winkel hätten, und deren Seiten verschieden wären.

Besondere Eigenschaften der geradewinklichten dreyseitigen Ecken.

§. 85. Es werden im übrigen die dreyseittge Ecken in geradewinklichte und schiefwinklichte getheilet. Eine geradewinklichte dreyseitige Ecke ist diejenige, welchen einen geraden Winkel hat; die übrigen Winkel mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, das ist, sie mögen gerade, spitzige oder

stumpfe seyn. Schiefwinklicht aber ist eine dreyseitige Ecke, wenn sie gar keinen geraden, sondern lauter spitzige oder stumpfe Winkel hat. Wir müssen bey beyden noch etwas betrachten, ehe wir diese Abhandlung beschließen.

[*Fig.* 370. 371.] §. 86. Will man eine dreyseitige Ecke verfertigen die geradewinklicht sey, so setze man auf eine beliebige Fläche rMR eine andere rNR perpendicular; dadurch wird der Winkel R oder r gerade. Sodann ziehe man in der Fläche rMR die Linie CM nach Belieben, und lege an CM eine andere Fläche NCM, ebenfals wie man will, welche die rNR in CN schneide: so erhält man zugleich zwo dreyseitige und geradewinklichte Ecken NCMR und NCMr. Wir haben hier wieder vor die Seiten derselben Ausschnitte von gleichen Cirkeln genommen, deren Mittelpunct C ist. Es bekommen alle diese Seiten besondere Namen.

§. 87. Eine der zwo Seiten, welche den geraden Winkel R einschließen, heißet die **Grundseite**. Man kan diese nach Belieben wehlen, ist sie aber einmal angenommen; so heißet die andere dieser zwo Seite die **Perpendicularseite**, und diejenige, welche dem geraden Winkel entgegen gesetzt ist, wird die **Hypotenuse** genant. Wir finden im Teutschen kein recht bequemes Wort sie auszudrücken; vielleicht könte man sie die Gegenseite nennen, weil sie dem geraden Winkel entgegen stehet. Man kan also in der Ecke NCMR die Seite RCM vor die Grundseite annehmen. In dem Falle ist NCR die Perpendicularseite, und NCM die Hypothenuse. Eben so ist es auch in der da nebenstehenden dreyseitigen Ecke NCMr. Nimmet man in derselben die Seite rCM vor die Grundseite an, so ist rCN die Perpendicularseite, und eben die NCM ist die Hypothenuse.

[*Fig.* 372. 373.] §. 88. Man setze an CM die Fläche ACM perpendicular auf die Fläche rMR, wodurch die Winkel AMR und AMr gerade werden, sonst aber bleibe alles wie es XII, 86. angenommen worden ist. Weil nun also die Fläche rNR auf der rMR perpendicular stehet, welche die ACM in AC schneidet, so stehet X, 47. auch AC auf der rMR perpendicular, und die Winkel ACr, ACR, ACM sind alle gerade. Stellet man sich nun die rechtwinklichte dreyseitige Ecke ACMR vor, so siehet man, daß, so bald der Winkel an der Grundfläche AMR gerade wird, auch die Perpendicularseite ACR, welche demselben nothwendig entgegen stehet, ein gerader Winkel werde. Man stelle sich nunmehro vor, daß man die Seite NCM dergestalt an CM gesetzt habe, daß der Winkel an der Grundseite NMR kleiner worden ist, als der gerade AMR: so siehet man sogleich, daß dadurch auch die Perpendicularseite NCR kleiner habe werden müssen, als der gerade Winkel ACR; weil die Fläche NCM ohnmöglich von ACM

nach

nach R geneiget werden kan, ohne daß zugleich die gerade Linie CN in der Perpendicularfläche sich der CR nähere. Wir können also schließen, daß, wenn der Winkel NMR an der Grundseite RCM spitzig ist, auch nothwendig die Perpendicularseite NCR spitzig seyn müsse. Und wenn man zugleich die neben der vorigen stehende dreyseitige Ecke NCMr betrachtet, in welcher der Winkel an der Grundseite NMr stumpf ist, so siehet man sogleich, daß dieses nicht seyn könne, wenn nicht auch die ihm entgegen stehende Perpendicularseite NCr stumpf ist.

§. 89. Man kan aber auch auf eben die Art von der Perpendicularseite NCR auf den Winkel NMR schließen, welcher ihr entgegen stehet. Ist diese Seite NCR spitzig, so kan der Winkel NMR ohnmöglich gerade seyn, sonst wäre auch die Seite ein gerader Winkel: es kan auch der Winkel NMR nicht stumpf seyn, sonst wäre auch die Seite NCR stumpf. Wenn also die Seite NCR spitzig ist, so ist auch der Winkel NMR spitzig. Ist aber im Gegentheile die Perpendicularseite stumpf wie NCr, so kan der ihr entgegen gesetzte Winkel NMr nicht spitzig seyn, sonst wäre auch die Seite spitzig; auch kan er nicht gerade seyn, weil sonst auch die Seite gerade seyn müste. Es ist also dieser Winkel NMr in diesem Fall nothwendig stumpf. Und auf eben die Art sieht man, daß der Winkel AMR gerade seyn müsse, wenn die Seite ACR gerade ist.

§. 90. Was von der Perpendicularseite und dem ihr entgegen gesetzten Winkel gezeiget worden, ist ohne Anstand auf die Grundseite, und den Winkel, welcher derselben entgegen stehet, anzuwenden. Denn diese zwo Seiten sind bloß dem Namen nach, sonst aber gar nicht von einander verschieden, XII, 87. Wenn man sich nun erinnert, daß man drey Arten von Winkeln habe, spitzige, gerade und stumpfe, und daß alle spitzige Winkel von einer Art sind, wie auch alle gerade und alle stumpfe, so kan man alle diese Sätze sich kurz unter diesen Worten merken. In einer jeden geradewinklichten dreyseitigen Ecke, ist eine jede der zwo Seiten, die den geraden Winkel einschließen von der Art des Winkels, welcher ihr entgegen stehet.

§. 91. Sind also die zwo Seiten einer geradewinklichten dreyseitigen Ecke, welche den geraden Winkel einschließen, die Grundseite nemlich und die Perpendicularseite, von einerley Art, wie in der 370 und 372 Zeichnung, so sind auch die Winkel der Ecke, welche ihnen entgegen stehen, von einerley Art: sind aber diese Seiten von verschiedener Art, wie in der 371 und 373 Figur, so sind auch die ihnen entgegen stehende Winkel von verschiedener Art.

§. 92. Was aber die Hypotenuse einer geradwinklichten dreyseitigen Ecke anlanget, so ist dieselbe allezeit ein gerader Winkel, wenn einer von den Winkeln der Ecke, welche an der Hypotenuse liegen, gerade ist, das ist, XII, 88. wenn eine von den übrigen Seiten ein gerader Winkel ist. Sonst aber ist die Hypotenuse spitzig, wenn die beyden Winkel, welche an derselben liegen, von einerley Art sind, das ist, wenn die beyden Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, von einerley Art sind. Und die Hypotenuse ist stumpf, wenn einer der Winkel, die an derselben liegen, spitzig ist, und der andere stumpf, oder wenn eine der Seiten, die den rechten Winkel einschließen, spitzig ist, und die andere stumpf. Dieses alles wird durch die nachfolgende Betrachtungen deutlich werden.

[*Fig.* 374.] §. 93. Man stelle sich wieder vor, daß die Fläche RAr auf der RBr perpendicular stehe, und daß man in dieser Fläche RBr die gerade Linie CM auf Rr schief gezogen, und dadurch den Winkel RCM spitzig gemacht habe, den Winkel MCr aber stumpf. Man ziehe auf diese Linie CM die Linie BCD perpendicular, und setze an diese Linie die Ebene BAD ebenfals auf RBr perpendicular: so wird CM auf diese Ebene BAD perpendicular, X, 44. und ein jeder Winkel, welchen CM mit einer der geraden Linie einschließet, die in der Ebene BAD durch C gezogen werden können, wird gerade seyn. Es schneidet aber diese Ebene BAD die andere RAr, welche ebenfals auf der RBr gerade stehet, in der Linie AC: diese Linie ist demnach ebenfals auf die Fläche RBr perpendicular, X, 47. Leget man nun nach dieser Vorbereitung durch die beyden Linien CA und CM eine Fläche ACM, und machet also die rechtwinklichte dreyseitige Ecken ACMR und ACMr vollkommen, so siehet man sogleich, daß die Hypotenuse dieser Dreyecke ACM ein gerader Winkel seyn werde. Es stehet aber in diesem Falle die Hypotenuse ACM auf der Grundfläche perpendicular, X, 45. und machet also mit derselben bey M gerade Winkel.

[*Fig.* 375.] §. 94. Neiget man aber bey eben der Vorbereitung, welche die gegenwärtige Zeichnung in einer etwas geänderten Lage vorstellet, die Hypotenuse gegen R dergestalt, daß der Winkel NMR spitzig wird (wodurch zugleich die Perpendicularseite NCR spitzig werden muß; XII, 88.) und stellet sich vor, daß man die Ebene, in welcher die Hypotenuse lieget, fortgeführet habe, bis sie die Fläche BAD in EC geschnitten: so ist der Winkel ECM gerade, weil CM auf der Fläche BAD perpendicular stehet, und folgends die Hypotenuse NCM selbst spitzig. Es ist aber diese Hypotenuse den beyden geradewinklichten Ecken NCMR und NCMr gemeinschaftlich. In der ersten ist sowohl die Grundseite MCR als auch die Perpen-

dicularseite NCR spitzig: und bey der darneben stehenden Ecke ist sowohl die Grundseite MCr als auch die Perpendicularseite NCr stumpf. Man muß demnach sagen, daß die Hypotenuse einer geradewinklichten dreyseitigen Ecke spitzig sey, wenn die übrigen Seiten entweder beyde spitzig oder beyde stumpf sind. Und weil die Seiten, welche den geraden Winkel einschließen, nicht beyde spitzig oder stumpf seyn können, wenn nicht auch die Winkel an der Hypotenuse beyde spitzig oder stumpf sind, XII, 91. so drücket man eben dieses aus, wenn man saget, die Hypotenuse sey spitzig, wenn die Winkel, welche an derselben liegen, beyde spitzig, oder beyde stumpf sind.

[*Fig.* 376.] §. 95. Und wenn im Gegentheile die Hypotenuse auf die andere Seite dergestalt geneiget wird, daß der Winkel NMR, und folgends auch die ihm entgegen gesetzte Perpendicularseite NCR stumpf werden, indem die Seite MCR spitzig bleibet: so ist wieder der Winkel MCE gerade: und da die Hypotenuse NCM über die EC bis an NC gehet; so ist dieselbe ein stumpfer Winkel. Man siehet also, daß, wenn in einer geradewinklichten dreyseitigen Ecke NCMR, die eine der Seiten, die den rechten Winkel R einschließen, wie MCR spitzig und die andere NCR stumpf ist, die Hypotenuse NCM stumpf sey. Eben dieses siehet man auch bey der Ecke NCMr; die Seite NCr ist spitzig und die Seite MCr ist stumpf. Die Hypotenuse aber ist hier wieder NCM und folgends stumpf.

§. 96. Auch in diesem Satze kan man an statt der eben gedachten Seiten die Winkel nennen, welche an der Hypotenuse liegen, und sagen, daß die Hypotenuse ein stumpfer Winkel sey, wenn dieser Winkel M und N einer spitzig, und der andere stumpf ist; wie man aus dem vorigen XII, 91. leicht siehet.

§. 97. Es lassen sich aber auch diese Sätze verkehren, und man kan schließen, daß einer der Winkel an der Hypotenuse N, M einer dreyseitigen Ecke gerade sey, wenn die Hypotenuse gerade ist, und daß einer der Winkel an der Hypotenuse spitzig sey, und der andere stumpf, wenn die Hypotenuse stumpf ist, wie auch, daß wenn die Hypotenuse spitzig ist, die beyden Winkel an derselben entweder spitzig oder stumpf seyn. Denn wenn die Hypotenuse stumpf ist, so können nicht die beyden Winkel an derselben spitzig oder stumpf seyn, weil sonst die Hypotenuse spitzig seyn müste: auch kan unter denselben kein gerader Winkel seyn, weil sonst auch die Hypotenuse ein gerader Winkel seyn müste. Es bleibet also allein übrig, daß einer dieser Winkel spitzig und der andere stumpf ist. Ist aber die Hypotenuse spitzig, so kan wieder an derselben kein gerader Winkel liegen, weil sonst die Hypotenuse gerade seyn müste, auch nicht ein spitziger und ein

stumpfer

stumpfer, weil sonst die Hypotenuse stumpf seyn müste, es bleibet also allein übrig, daß die Winkel an der Hypotenuse entweder beyde spitzig oder beyde stumpf seyn. Auf eben die Art schließet man auch das dritte.

§. 98. Man kan aber auch hier an die Stelle der Winkel die Seiten nennen, welche ihnen entgegen stehen, und sagen, daß wenn in einer geradewinklichten dreyseitigen Ecke die Hypotenuse gerade ist, so sey auch eine der Seiten, welche den geraden Winkel der Ecke einschließen, gerade; und wenn die Hypotenuse spitzig ist, so seyn diese Seiten entweder beyde spitzig oder beyde stumpf; und wenn die Hypotenuse stumpf ist, so sey eine von diesen Seiten spitzig, und die andere stumpf.

[*Fig.* 370.] §. 99. Wir haben also zwo Arten von geradewinklichten dreyseitigen Ecken, deren erstere eine spitzige, und die zweyte eine stumpfe Hypotenuse hat. Denn was die dritte Art dieser Ecken anlangt, deren Hypotenuse ein gerader Winkel ist; so stehet dieselbe zwischen den vorigen beyden in der Mitte, und kan mit gleichem Rechte zu der einen oder zu der andern gebracht werden. Und überhaupt ist es nicht nöthig, daß man sich bey dieser Art der Ecken aufhalte, weil sie gar leicht zu übersehen sind. Bey den dreyseitigen Ecken aber, welche eine spitzige Hypotenuse haben, können die übrigen Seiten beyde stumpf seyn, wie bey der NCMr. Man siehet aber unmittelbar aus der Figur, daß an diese Ecke immer eine andere NCMR gesetzt werden könne, die eben die Hypotenuse NCM hat, und deren Seiten NCR und MCR die Ergänzungen der Seiten NCr und MCr der vorigen Ecke, zu zween rechten Winkeln sind. In eben der Ecke NCMR sind auch die Winkel bey N und M spitzig, und ergänzen die Winkel bey N und M der vorigen Ecke NMCr zu zween rechten Winkeln.

[*Fig.* 371.] §. 100. Das aber auch an die Ecke NCMR in welcher eine der Seiten die dem rechten Winkel einschließen, MCR spitzig, und die andere NCR stumpf ist, eine andere geradewinklichte und dreyseitige Ecke gesetzt werden könne, deren Seiten und Winkel alle spitzig, und entweder mit den Seiten und Winkeln dieser NCMR einerley sind, oder dieselben zu zween geraden Winkeln ergänzen: siehet man zwar sogleich aus der Zeichnung nicht. Wenn man aber dieses aus dem vorigen zu schließen sich nicht so gleich im Stand sehen solte, so darf man nur in dieser 371 Zeichnung die gerade Linie NC, von dem Puncte C unterwärts verlängern, und zugleich die Flächen NCR, NCM fort setzen, bis sie einander in dieser Linie schneiden: welches nothwendig geschehen muß, weil diese Linie nicht anders, als die verlängerte NC ist, in welcher sich diese Flächen allerdings schneiden. Dadurch entstehet unter der MCR eine neue dreyseitige

tlae Ecke, welche die Seite MCR mit der Ecke NCMR gemeinschaftlich hat, und deren Hypotenuse die NCM, die dritte Seite aber die NCR zu zween rechten Winkeln ergänzet. Der Winkel aber dieser Ecke, welcher der Seite MCR entgegen stehet, wird dem Winkel N gleich, gleich wie R dem r gleich ist, und der Winkel derselben bey M ist die Ergänzung des Winkels NMR zu zween rechten Winkeln, wie man leicht siehet. Verlängert man die MC bey C, und setzet zugleich die Flächen NCM, MCr nach dieser Seite fort, so bekomt man zu der NCMr eine eben dergleichen Ecke. Also kan man überhaupt zu einer jeden rechtwinklichten Ecke eine andere verfertigen, deren Seiten und Winkel alle spitzig, und theils den Seiten und Winkeln der vorigen gleich sind, theils aber dieselben zu zween geraden Winkeln ergänzen.

Wie die schiefwinklichten dreyseitigen Ecken aus zwoen geradewinklichten entstehen.

[*Fig.* 377. 378.] §. 101. Was nun aber diejenige dreyseitige Ecken anlanget, welche keinen geraden Winkel haben, und welche man dannenhero schiefwinklicht nennet, so pfleget man dieselbe in der Anwendung sich so vorzustellen, als ob sie aus zwo geradewinklichten dreyseitigen Ecken, deren Perpendicularseiten gleich sind, entstanden wären, indem man diese Ecken entweder an einander geschoben, oder die kleinere derselben von der größern weggenommen hat. Es sey NCMm eine dergleichen schiefwinklichte Ecke. Man stelle sich vor, daß durch die Spitze des Winkels N, oder welches auf eines hinaus komt, durch die gerade Linie NC eine Ebene NCR perpendicular auf die entgegen gesetzte Seite MCm gefallen sey, welche MCm man weiter fortführen muß, so oft es nöthig ist, bis sie diese Perpendicularfläche in CR schneidet: so entstehet die schiefwinklichte Ecke der 377 Zeichnung durch die Zusammensetzung der beyden geradewinklichten Ecken NCRM und NCRm; die schiefwinklichte Ecke der 378 Zeichnung hingegen bleibet übrig, wenn man von der größern geradelinichten Ecke NCRM die kleinern NCRm wegnimmet. Es ist noch zu zeigen, in welchem Falle das erstere, und in welchem Falle das zweyte statt finde.

§. 102. Man siehet leicht, daß die Ecke NCMm durch die Zusammensetzung der zwo geradewinklichten Ecken NCRM und NCRm entstehe, wenn die Perpendicularfläche NCR die Seite MCm erreichet, ohne daß man nöthig hat, dieselbe zu erweitern: in welchem Falle der Winkel MNm

die Summe ist der beyden Winkel MNR und mNR, und die Seite MCm die Summe der beyden Seiten MCR und RCm. Soll aber dieses seyn, so ist nicht möglich, daß ein Winkel M und m spitzig und der andere stumpf sey. Denn ist in der geradewinklichten Ecke NCRM der Winkel M spitzig, so ist auch die ihm entgegen gesetzte Seite NCR spitzig. Wäre nun zugleich der andere Winkel m stumpf, so wäre eben die Seite NCR auch stumpf, weil sie in der geradewinklichten Ecke NCRm dem Winkel m entgegen stehet. Dieses aber ist widersinnisch, und es folget also daß NCR selbst in die Seite MCm fället, wenn die Winkel M und m entweder beyde spitzig oder beyde stumpf seyn.

§. 103. Ist aber im Gegentheile in der 378 Zeichnung, da die Perpendicularseite NCR nicht in die Seite MCm der dreyseitigen Ecke NCMm fället, sondern man diese verlängern muß, damit dieses geschehen möge, und da also MNm durch den Abzug des Winkels mNR von dem Winkel MNR entstehet, und die Seite MCm übrig bleibet, wenn man von MCR die Seite mCR wegnimmet: ist, sage ich, in diesem Falle der Winkel M spitzig, so ist auch die Perpendicularseite NCR spitzig. Wäre nun auch der Winkel NmM spitzig, so wäre seine Ergänzung NmR stumpf, und also wäre auch NCR stumpf, XII, 88. welches nicht möglich ist. Es ist demnach bey der gesetzten Bedingung nicht möglich, daß die beyden Winkel M und MmN spitzig seyn solten. Und eben so siehet man auch, daß sie nicht beyde stumpf seyn können. Denn ist M stumpf, so ist auch NCR stumpf. Wäre nun auch MmN stumpf, so wäre die Ergänzung dieses Winkels zu zween geraden, nemlich NmR spitzig, und also wäre auch NCR spitzig, welches dem vorigen widerspricht. Es muß demnach in diesem Falle einer der Winkel M und MmN spitzig, und der andere stumpf seyn.

Drey-

Dreyzehnter Abschnitt.

Gründe der Berechnung ausgedehnter Größen.

Einleitung.

§. 1.

Wir haben bisher die vornehmsten Eigenschaften der ausgedehnten Größen betrachtet, und sind bemühet gewesen zu zeigen, wie die geometrische Aufgaben aufgelöset werden, welche bey den Figuren vorkommen, fals sie die Kräfte der gemeinen Geometrie nicht übersteigen, und keine andere Linien, als die geraden und die Umkreise der Cirkel, erfordern; wie auch keine andere Theilung der Winkel als diejenige, welche wir zu verrichten gelehret haben, da nemlich ein Winkel in zwey gleiche Theile getheilet wird. Außer diesen aber sind noch solche Aufgaben ausgeschlossen worden, welche sich auf die Verhältniß des Umkreises eines Cirkels zu seinem Durchmesser gründen, als welche anzugeben ebenfals in der Gewalt der gemeinen Geometrie nicht ist. Wie wir gesehen haben, so wird zur Auflösung dieser Aufgaben weder die Rechenkunst, noch sonst einige andere Wissenschaft erfordert; sondern die bloße Geometrie ist dazu hinlänglich.

§. 2. Doch haben wir bereits hin und her erinnert, daß der Gebrauch geschickter Instrumente in der Ausübung uns öfters eine große Erleichterung geben könne; und von der Rechenkunst ist eben das zu sagen, wenn man dieselbe gebrauchen will, geometrische Aufgaben aufzulösen. Es geschieht dieses öfters mit gar großer Bequemlichkeit: ja man kan vermittelst der Rechenkunst zuweilen auch solche Aufgaben auflösen, welche in der Gewalt der bloßen Geometrie nicht sind, als zum Beyspiel, diejenige, welche sich auf die Verhältniß des Umkreises eines Cirkels zu seinem Durchmesser gründen, oder, welche eine beliebige Theilung eines Winkels erfordern. Es ist unser Zweck hier nicht, daß wir den Gebrauch der Instrumente weisen, und derselbe ist auch vor sich etwas leichtes, und von demjenigen, welcher die Geometrie gründlich gefasset hat, ohne Schwierigkeit einzusehen. Aber die Auflösungen der geometrischen Aufgaben vermittelst der Rechenkunst, müssen,

wegen ihres ungemeinen Nutzens in der Anwendung dieser Wissenschaft allerdings gezeiget werden, und hiezu haben wir die folgenden Abtheilungen gewidmet.

§. 3. Es sind zwar diese Auflösungen selten vollkommen richtig, so nemlich, daß man bey denselben, wie bey den geometrischen, darthun könte, daß sie gar nicht fehlen. Ja man siehet meistentheils, daß sie würklich fehlen, und man kan dieses erweisen. Allein man ist auch im Stande, diese Fehler zu vermindern, so weit man will, oder wenigstens so weit, daß unsere Sinnen keinesweges hinreichen, einigen Fehler zu bemerken. Und dieses ist bey einer jeden Anwendung der Geometrie auf cörperliche Dinge hinlänglich. Denn ein Fehler, welcher auf keine Weise bemerket werden kan, ist hier vor keinen Fehler zu halten. Und fehlen nicht auch die geometrische Auflösungen, wenn sie nicht in puren Begriffen bestehen, sondern bey etwas cörperlichen angewendet werden? Ist es möglich eine auf das Papier gezeichnete gerade Linie in zwey vollkommen gleiche Theile zu theilen, und kan jemand versprechen dieses dergestalt zu verrichten, daß der eine Theil nicht einmal um den hundertsten Theil der Breite eines Haars größer werde als der andere? Wie genau müsten die äußersten Puncte der Linien bestimmet werden, wenn man dieses verrichten wolte, und wie spitzig müsten die Schenkel des Cirkelinstruments seyn, dessen man sich dazu bedienen könte? Reichen unsere Sinnen zu diese Puncte so genau zu bestimmen, oder uns so zarter Instrumente zu bedienen? Müssen nicht alle Linien, welche wir zeichnen, von einer merklichen Breite seyn, wenn wir sie sehen sollen? Dieses alles macht, daß dasjenige, so wir durch die genauesten Zeichnungen heraus bringen, gar weit von dem entfernet ist, so wir heraus bringen würden, wenn es in unserer Gewalt wäre, den Begriffen, welche wir von der Auflösung geometrischer Aufgaben haben, auf das genaueste zu folgen.

§. 4. Aus der Ursach haben die geometrische Auflösungen, wenn man bloß auf den Nutzen in der Anwendung siehet, vor denen, die vermittelst der Zahlen gemacht werden, gar keinen Vorzug: ja diese letztern bringen vielmehr meistens was gesuchet wird, genauer heraus, als die erstern. Es ist möglich, daß man eine gerade Linie zeichne, welche dem Umkreis eines Cirkels eben so genau gleich ist, als eine gerade Linie der andern; ob man zwar sich zu dem erstern der Rechnung zu bedienen gezwungen ist, und das letztere eine der ersten und leichtesten Ausübungen der Geometrie ausmachet.

§. 5. Damit nun diese Auflösungen vermittelst der Zahlen würklich verrichtet werden können, ist es nöthig, daß man die Dinge, welche in der Geometrie betrachtet werden, die geraden Linien nemlich, die Winkel,

den Cirkelkreis, die Oberflächen, und so weiter, durch Zahlen ausdrücke. Sobald dieses geschehen ist, kan man mit denselben wie mit andern Zahlen umgehen, und vermittelst der bekanten Rechnungsarten aus diesen Zahlen andere heraus bringen, welche Größen ausdrücken, die von jenen auf die Art abhangen, welche in der Geometrie gewiesen wird. Dieses geschiehet, wenn man die ausgedehnten Größen nach einer beliebigen Einheit misset, und dieses ist bey geraden Linien etwas leichtes.

Gerade Linien durch Zahlen auszudrücken.

§. 6. Es sey die gerade Linie A von was Länge man sich dieselbe vorstellen will, durch eine Zahl auszudrücken, welche sich auf eine nach Belieben angenommene Einheit V beziehet: so messe man erstlich die A durch V. Wird nun die V, wenn sie etliche mal, zum Exempel, 5 mal, genommen wird, der A gleich, so drücket die Zahl 5 die Linie A aus. Ist aber dieses nicht, und ist von der A noch ein Stück B übrig geblieben, nachdem man V so oft auf dieselbe geleget hat, als geschehen können, (welches B demnach kleiner syn muß als V,) so kan man dieses Ueberbleibsel durch einen Bruch ausdrücken, der sich auf die V beziehet: und man findet bald einen Bruch, welcher dieses so genau thut als es nöthig ist. Viel bequemer aber ist es, wenn man dazu zehentheilichte Brüche gebrauchet, welches wir demnach hier allezeit thun wollen. Man theile also die V in zehen gleiche Theile, und messe die B, welche kleiner ist als V, durch diese Zehentel der V. Gesetzt, man finde, daß B noch 6 dergleichen Theile der V enthält, so wird A durch 5,6 ausgedrückt. Wäre aber B etwas größer als 0,6 der V, aber kleiner als 0,7; so müste man jedes Theilchen der V wieder in zehen gleiche Theile, und folgends die ganze V in hundert Theilchen theilen, und den nunmehrigen Ueberschuß der B über 0,6 der V, durch diese Theilchen eben so messen, wie man B durch die Zehntel der V gemessen hat, und so immer fort, bis man entweder nicht weiter theilen kan, weil die Theilchen einzeln nicht mehr sichtbar werden würden: oder, bis man auf solche Kleinigkeiten komt, welche in der Anwendung vor nichts zu halten sind, und in Ansehung der V oder der A in keine Betrachtung kommen können. Man sieht leicht, daß man gar bald auf solche Kleinigkeiten hinaus komme. Meistentheils pfleget man den zehentausendsten Theil eines Ganzen in Ansehung desselben auch dann vor nichts zu halten, wenn man noch ziemlich genau verfähret.

§. 7. Man kan auf die geraden Linien, welche dergestalt aus gleichen

Theilchen zusammen gesetzt sind, alles dasjenige anwenden, so VI. von den Verhältnissen solcher Größen gewiesen worden ist, welche aus gleichen Theilchen zusammen gesetzet sind. Man kan zu dreyen graden Linien, welche dergestalt durch Zahlen ausgedrücket sind, die vierte Proportionallinie eben so finden, wie man zu drey gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl findet; VI, 125. Und zwischen zwo Linien, die man durch Zahlen ausgedrücket hat, wird die mittlere Proportionallinie ebenfals gefunden, wenn man aus dem Product dieser Zahlen die Quadratwurzel ziehet, VI, 130. Dieses alles ist leicht einzusehen. Es seyn drey Linien A, B, C, welche, wenn man sie durch eine beliebige Einheit V misset, durch die Zahlen 6, 5; 7, 2 und 8 ausgedrückt werden, so wird die vierte Linie, welche mit den drey gegebenen die Proportion voll machet durch die Zahl $\frac{7,2\times 8}{6,5}$ ausgedrückt. Diese Zahl ist etwas mehr als 8, 86: und wenn man also einer Linie 8, 86 Theilchen von der Größe derjenigen giebet, mit welchen man die gegebenen Linien A, B, C gemessen hat; so ist sie die vierte Proportionallinie zu den gegebenen dreyen. Eben so ist es, wenn zwo Linien durch die Zahlen 4 und 64 ausgedrückt werden, und man sol zwischen denselben die mittlere Proportionallinie finden. Es drücket die mittlere Proportionalzahl zwischen den gegebenen Zahlen 4 und 64, das ist, die Quadratwurzel aus 64×4 oder 256, welche 16 ist, die mittlere Proportionallinie zwischen den zwo gegebenen aus: und eine Linie von 16 solchen Theilchen, deren die erstere der gegebenen 4, und die zweyte 64 hat, ist die mittlere Proportionallinie zwischen den gedachten zwo Linien.

§. 8. Es ist aber auch nicht nöthig, daß alle vier Proportionallinien durch einerley Einheit gemessen werden; sondern, wenn die erste und die zweyte durch einerley Einheiten gemessen werden, wie auch die dritte und vierte, und die Zahlen welche die Linien ausdrücken, sind proportional, so sind die Linien doch proportional, ob zwar die Einheit, mit welcher die letztern zwo Linien gemessen sind, von der Einheit verschieden ist, mit welcher man die erstern zwo gemessen hat. Es sey A=2, und B=3, und die Einheiten in A und B seyn einander gleich. Es sey C=1, und D=1,5 und die Einheiten in C und D seyn einander wieder gleich, aber von den vorigen Einheiten in A und B verschieden: so ist A:B=C:D, weil die Zahlen, welche A, B, C, D dergestalt ausdrücken, proportional sind, $2:3=1:1\frac{1}{2}$. Man siehet dieses daraus ein, weil, da die Verhältniß $1:1\frac{1}{2}$ der Verhältniß 2:3 gleich ist, und C:D sich verhält wie $1:1\frac{1}{2}$, sich

auch

auch C:D wie 2:3 verhalten muß. Ist aber dieses, so muß sich auch C in zwey solche Theile theilen lassen, deren drey auf D gehen, gleich wie A zwey Drittel der B enthält. Und wenn man sich vorstellet, daß diese Theilung würklich verrichtet sey, so siehet man leicht, daß die Verhältnisse A:B und C:D einander gleich sind, VI, 40.

Die Winkel durch Zahlen auszudrücken.

§. 9. Wie die Winkel durch Zahlen auszudrücken sind, haben wir grösten Theils bereits gesehen, VII, 66. Man theilet den Umkreis eines jeden Cirkels in 360 gleiche Theile, deren folgends auf den halben Umkreis 180, und auf den Quadranten 90 gehen werden. Diese Theile nennet man Grade. Einen jeden Grad theilet man wieder in 60 gleiche Theile, welche man Minuten nennet, und einer jeden Minute giebt man 60 Secunden. Denn weiter hat man selten nöthig zu gehen. Man bezeichnet, um sich desto weniger zu verwirren, diese Theile folgender gestalt: $53^{\circ}, 27', 32''$ bedeutet 53 Grade, und 27 Minuten, und 32 Secunden. Durch die Zahl nun der Grade, Minuten und Secunden, welche in dem Bogen enthalten sind, welcher aus der Spitze eines Winkels zwischen seinen Schenkeln beschrieben wird, drücket man die Größe des Winkels aus, und sagt, zum Exempel, der Winkel habe $53^{\circ}, 27', 32''$, wenn der Bogen so viele Grade, Minuten und Secunden enthält. Es ist frey, mit was vor einer Oefnung des Cirkels man den Bogen beschreibe, weil alle Bogen, welche um die Spitze eines Winkels zwischen dessen Schenkeln beschrieben werden können, einerley Verhältniß gegen ihre ganzen oder halben Umkreise haben, VII, 52. und folgends nothwendig durch einerley Zahlen von Graden, Minuten und Secunden ausgedrücket werden, da man die ganzen Umkreise immer durch einerley Zahlen ausdrückt, indem man einen jeden Umkreis in 360 Theile theilet.

§. 10. Wenn man nun die Zahl der Grade eines Winkels weiß, so kan man leicht die Zahl der Grade des dritten oder fünften oder siebenten ꝛc. Theils desselben durch Rechnung finden, und wenn man den Bogen, welchen man um die Spitze des Winkels zwischen dessen Schenkeln beschrieben hat, in seine Grade theilet, so ist es hernach leicht einen Winkel zu machen, welcher der dritte, fünfte oder siebente ꝛc. Theil desselben Winkels sey. Hält zum Exempel ein Winkel $53^{\circ}, 27'$ (wir lassen die Secunden als Kleinigkeiten weg, welche außer der Astronomie selten zu beobachten sind) so hält der dritte Theil desselben $17^{\circ}, 49'$, der fünfte $10^{\circ}, 41'$,

der siebente 7, 38. Und man kan also diese Winkel aus einem getheilten Cirkelkreis leicht haben.

§. 11. Man verfähret aber folgender gestalt, wenn man den Umkr is eines Cirkels in seine 360 Theile, oder in seine Grade, theilen wil. Erstlich theilet man ihn in 6 gleiche Theile vermittelst des Halbmessers, welcher sich in den Umkreis des Cirkels sechs mal herum tragen läst, wie wir V, 89. gesehen haben. Jeden dieser Theile theilet man in zween gleiche Theile, und jeden dieser Theile wieder in zween, welches, wenn man wil, geometrisch geschehen kan: so wird jeder der 6 vorigen Theile in viere getheilet, und es bekomt der ganze Umkreis 24 gleiche Theile. Nun theile man jeden dieser Theile in 3 durch Versetzung des Cirkels, so bekomt man in dem ganzen Umkreis drey mal 24, das ist, 72 Theile. Und wenn man jeden dieser Theile wieder durch die Versetzung des Cirkels in 5 gleiche Theile theilet, so bekomt endlich der ganze Umkreis deren 360, welches seine Grade sind. Auf eben die Art verfähret man, wenn man auch Minuten haben will, fals der Umkreis so groß ist, daß er diese Theilung leidet.

Ausmessung der geradelinichten Figuren.

[*Fig.* 379.] §. 12. Will man die Größen der geradelinichten Figuren durch Zahlen ausdrücken, oder mit einem Worte, messen: so nimmet man darzu wieder eine Oberfläche als die Einheit oder das Maaß an, aus welchem die Größe der Figur bestimmet werden sol, und wie wolte man es anders machen? Die Figur dieses Maaßes ist beliebig, aber meistentheils ein Quadrat V, dessen Seite man vor die Einheit annimt, durch welche die Seiten der, welche durch das Quadrat V zu messenden Figur ausgedrückt werden sollen. Diese Figur nun ist entweder ein geradewinklichtes Viereck, oder kan doch in ein geradewinklichtes Viereck verwandelt werden, IX, 22. Man kan sie auch in Dreyecke zerschneiden, und ein jedes dieser Dreyecke in ein geradewinklichtes Viereck verwandeln, IX, 19. und also die ganze Figur als eine Summe verschiedener geradewinklichter Vierecke ansehen. Also kommet endlich alles darauf hinaus, daß man bloß ein geradewinklichtes Viereck zu messen wisse. Dieses aber erfordert nichts anders, als daß man eine Zahl finde, welche die Verhältniß der Figur zu der Einheit V ausdrücke. Wir haben bereits gewiesen, wie dieses zu thun sey, ohne daß man die V würklich zu wiederholten malen auf die Figur lege, welche auszumessen ist, oder die Figur in Theile von der Größe V theile. Denn dieses lässet sich wohl endlich bey kleinen Figuren thun,

thun, die auf dem Papiere gezeichnet sind Wolte man es aber bey großen Feldern anwenden, so würde man unendliche Schwierigkeiten finden. Ja auch auf dem Papiere wäre die Arbeit fast immer zu langweilig. Man schließet also die Verhältniß der Figuren gemeiniglich aus der Verhältniß ihrer Seiten, welche man viel leichter finden und durch Zahlen ausdrücken kan, und zwar folgender gestalt. Ist die Grundlinie des Viereckes ABC, welche man aus V m ssen sol AB, und die Höhe CB; so ist die Verhältniß des Quadrats V, dessen Seite wir L nennen wollen, zu dem ABC, aus den Verhältnissen L:AB und L:BC zusammen gesetzt, IX, 47. Man drücke beyde Verhältnisse durch Zahlen aus, das ist, man messe AB sowohl als BC aus L. Gesetzt, es sey L:AB = 1:5,3, und L:BC = 1:9,2; so ist die Verhältniß V:ABC = L×L:AB×BC = 1×1:5,3×9,2, VIII, 24. Und wenn man würklich multipliciret, so wird V:ABC = 1:48,76, und ABC enthält das Quadrat V 48 mal, und über dieses noch 7 Zehentel und 6 Hundertel, oder mit einem Wort 76 Hundertel desselben.

§. 13. Ein kleines Nachdenken kan uns an die Hand geben, daß es in der Anwendung eben nicht nöthig sey die Weitläuftigkeit zu machen, welche wir zu desto vollkommenern Verstand dieser Sache beygebracht haben. Man messe die Grundlinie AB durch die Seite des Quadrats V, welches darum nicht eben beschrieben seyn darf, und durch eben die Seite messe man auch die Höhe des Vierecks BC. Hat man nun dadurch wieder gefunden, daß AB = 5,3 und BC = 9,2, dieser Seiten des V enthalte: so multiplicire man diese Zahlen durch einander, und mache dadurch wie vorher 48,76; diese Zahl wird anzeigen, wie oft die Einheit V in dem Viereck ABC enthalten sey, und also wird ABC durch das V gemessen.

[*Fig.* 380.] §. 14. Es ist aber ein Zehentel der quadratischen Einheit, oder des Quadrats EF, dessen Seite EG vor die Einheit angenommen wird, nach welcher die Längen gemessen werden, ein geradewinklichtes Viereck HF, dessen Grundlinie HG dem zehnten Theil der Seite des Quadrats EF, und die Höhe GF dieser Seite selbst gleich ist. Und der zehente Theil eines solchen Vierecks ist das Quadrat FI, dessen Seite der HG, das ist, dem Zehentel der Seite EG, gleich ist. Und eben dieses FI ist der hundertste Theil des Quadrats EF, wie man dieses alles aus der Figur gar leicht siehet. Wenn demnach V das Quadrat EF bedeutet, und es wird eine Figur, die man durch die V gemessen hat, durch die Zahl 48,76 ausgedrücket: so wird dadurch angezeiget, daß diese Figur das ganze V 48 mal enthalte, und über dieses 7 Theile von der Größe HF, und 6 Theile von der Größe FI. Oder man kan auch kürzer sagen, die Figur, welche durch

48,76 ausgedrücket wird, enthalte 48 Quadrate von der Größe der V, und 76 Quadrate von der Größe des FI, dessen Seite der zehente Theil ist, der Seite des Quadrats V. Denn, wie wir gesehen haben, so ist FI der hundertste Theil des V, und die 76 in der Zahl 48, 76 welche sich auf die V beziehet, bedeuten 76 Hundertel der V.

§. 15. Wenn die Figur, welche man durch V ausgemessen hat, durch noch mehrere zehentheilichte Brüche ausgedrückt wird, als zum Exempel, durch diese Zahl 52, 7635, so beziehen sich die zwey Ziffer, welche auf die erstern zwey, die zehentheilichte Brüche bedeuten, folgen, hier 35, auf das Quadrat FI eben so wie sich die vorigen 76 auf das Quadrat EF beziehen. Es bedeuten also diese 35 Quadrate, deren Seiten zehen Theile der HG oder der Seite des Quadrats FI sind. Und so gehet es immer, wenn noch mehr Zahlen unter den zehentheilichten Brüchen vorkommen. In der Zahl 52, 763530 bedeuten die Ziffer vor dem Zeichen der einfachen Einheiten (,) 52 Quadrate der EG, die nächsten zwey 76 bedeuten Quadrate der HG, das ist, Quadrate des zehenten Theils der EG; die darauf folgende zwey, 35, Quadrate des Zehentheils der HG, oder des hunderten Theils der EG, und die zwey nächsten, 30 Quadrate des tausendsten Theils der EG, und so immer fort, wenn noch mehrere Ziffer vorhanden sind. Damit man sich dieses deutlicher vorstellen möge, bezeichnet man zuweilen dergleichen Ziffer auch dergestalt 52°, $76'$, $35''$, $30'''$. Es muß jede Classe zwo Ziffer haben, und fals die Zahl der Ziffer, welche Brüche bedeuten, ungleich ist, muß man am Ende eine o anhängen, damit die Classen voll werden.

§. 16. Es ist in diesem wenigen alles enthalten, so zur Ausrechnung aller geradelinichten Figuren zu wissen nöthig ist, und man kan die kleinen Vortheile, die bey dieser Rechnung vorfallen können, aus demjenigen, so in den vorhergehenden Betrachtungen gewiesen worden ist, gar leicht schließen. Man siehet nemlich, daß überhaupt ein jedes Parallelogrammum zu berechnen, man nur die Grundlinie desselben durch seine Höhe, oder eigentlich zu reden, die Zahl, welche die Grundlinie aus dem angenommenen Maaßstab ausdrücket, durch die Zahl, welche die Höhe aus eben dem Maaßstab angiebt, zu multipliciren habe, um die Zahl zu finden, welche die Größe des Vierecks aus der quadratischen Einheit anzeiget: weil nemlich ein jedes Parallelogrammum einem geradewinklichten Viereck gleich ist, welches eben die Grundlinie, und eben die Höhe hat, IX, 9.

§. 17. Eben so leicht schließet man, daß, wenn man den Inhalt eines jeden Dreyecks haben will, man die Grundlinie desselben durch die halbe Höhe, oder die Höhe durch die halbe Grundlinie, multipliciren müsse:

weil

weil ein jedes Dreyeck einem geradewinklichten Viereck gleich ist, dessen Höhe halb so groß ist, als die Höhe des Dreyecks, und welches mit dem Dreyeck einerley Grundlinie hat, oder dessen Grundlinie halb so groß ist, als die Grundlinie des Dreyecks, und dessen Höhe der Höhe des Dreyecks gleich ist.

§. 18. Hat man eine geradelinichte Figur, von was Art sie auch seyn mag, dergestalt berechnet, und man will ein Quadrat haben, dessen Inhalt so groß als der Inhalt der berechneten Figur ist, so darf man nur aus der Zahl, welche den Inhalt ausdrücket, die Quadratwurzel ziehen, diese ist die Seite des gesuchten Quadrats. Es sey der Inhalt einer Figur 1049,76, wie groß ist die Seite des Quadrats, welches dieser Figur gleich ist? Man nehme die Quadratwurzel der Zahl 1049,76, welche ist 32, 4. Diese ist die Seite des Quadrats genau. Man siehet aber leicht, daß man nicht allezeit auf solche Zahlen kommen werde, welche die gesuchten Seiten genau ausdrücken, weil nicht alle Zahlen, so die Figuren messen, Quadratzahlen seyn können.

§. 19. Dieses kan uns sogleich eine Anleitung dazu geben, wie in einem geradewinklichten Dreyeck aus zwo Seiten desselben die dritte zu finden ist. Es sey in einem solchen Dreyeck die gröste Seite, die nemlich dem geraden Winkel entgegen gesetzet ist, H, die übrigen Seiten, die den geraden Winkel einschließen, seyn B und P. Weil nun $H^q = B^q + P^q$, IX, 66. so siehet man, daß, wenn B und P in Zahlen gegeben sind, man nur die Quadratzahlen aus diesen Wurzeln machen, und nachdem man dieselbe zusammen gesetzt, die Wurzel von der Summe nehmen müsse, um die gröste Seite H zu erhalten. Es sey $B = 3$, $P = 4$, so ist $B^q = 9$, und $P^q = 16$, folgends $B^q + P^q = 25 = H^q$, und demnach H selbst $= 5$.

§. 20. Es sey zweytens in einem geradewinklichten Dreyeck, aus den zwo Seiten H und P, die Seite B zu finden. Weil nun $H^q = P^q + B^q$, so ist hinwiederum $H^q - P^q = B^q$. Wenn man also das Quadrat der gegebenen Seite P von dem Quadrat der grösten Seite H abziehet, so bleibt das Quadrat der Seite B übrig, aus welchem man durch die Ausziehung der Quadratwurzel ferner die Seite B erlangen kan. Es sey $H = 5$, $P = 4$, so ist $H^q = 25$, $P^q = 16$, und $H^q - P^q = 25 - 16 = 9 = B^q$, folgends $B = 3$. Man merke bey dieser Gelegenheit die besondere Eigenschaft dieser Zahlen 3, 4, 5, welche darinne bestehet, daß, wenn man drey Seiten annimt, die sich durch diese Zahlen ausdrücken lassen, und setzet aus denselben ein Dreyeck zusammen, dieses Dreyeck geradewinklicht wird. Es können noch an-

dere dergleichen Zahlen gegeben werden, diese Drey aber sind unter allen die kleinsten.

[*Fig.* 416.] §. 21. Diese Rechnung, vermittelst welcher man aus zwo Seiten eines geradewinklichten Dreyecks die dritte findet, wird sehr gebraucht, und man kan vermittelst derselben sehr viele geometrische Aufgaben, die sich nicht unmittelbar auf Proportionen bringen lassen, in Zahlen auflösen. Es sey zum Beyspiel, die Sehne eines Cirkelbogens AB gegeben, dessen Halbmesser BC bekant ist, und man soll die Sehne des Bogens BD finden, der halb so groß ist, als jener, wie auch die Entfernung dieser Sehne von dem Mittelpunct C; und dieses alles durch die Rechnung, in Zahlen. Es müssen zu dem Ende erstlich die gegebenen Linien BC und AB aus einem beliebigen Maaßstab durch Zahlen ausgedrückt werden, auf welchem Maaßstab sich alsdann auch die Zahlen beziehen werden, welche die gesuchte Linien ausdrücken. Wir wollen aber an statt dieser Zahlen überall die Linien, welche sie ausdrücken, selbst nennen, weil man sich auf die Art etwas kürzer ausdrücket. Nun muß man sich vorstellen, daß aus C auf die AB die Linie CE perpendicular gefallen, und bis in D verlängert sey: wodurch sowohl die Sehne AB als der Bogen ADB in zwo Helften getheilet wird. Ziehet man nun die Sehne DB, und lässet auf dieselbe ebenfalls die CF perpendicular fallen, so ist DF = FB die Helfte der gesuchten Sehne DB, und CF die Entfernung derselben von dem Mittelpunct. Diese nun zu finden, dividire man die Zahl, welche die Sehne AB ausdrücket durch 2, so erlangt man EB. Das Quadrat dieser EB ziehe man von dem Quadrat der gegebenen CB ab, so bleibt das Quadrat der EC, und wenn man aus diesem Quadrat die Wurzel ziehet, so erlangt man EC selbst. Wird nun diese EC von dem Halbmesser DC abgezogen, so bleibt die DE übrig. Das Quadrat aber dieser DE zu dem Quadrat der EB hinzugesetzt, gibt das Quadrat der DB, aus welchem man, durch die Ausziehung der Wurzel die gesuchte DB selbst haben kan: wie auch ihre Helfte DF oder FB. Aus dieser DF aber und aus dem Halbmesser erhält man ferner das Quadrat der CF, wenn man das Quadrat der DF von dem Quadrat des Halbmessers abziehet; und aus dem Quadrat der CF wird die CF selbst wieder durch das Ausziehen der Quadratwurzel gefunden.

§. 22. Es sey, zum Exempel, der Bogen AB der sechste Theil des Umkreises, und halte also 60 Grade, XIII, 9: der halbe Durchmesser CB aber sey 1. So ist auch AB = 1, und EB eine Helfte oder 0,5 das Quadrat also der EB ist 0,25, und wenn man dieses von 1, dem Quadrat aus

CB,

CB, abziehet, so bleibt 0,75, das Quadrat von EC, übrig. Also ist EC=0,8660, und DE=1—0,8660=0,134, ohne sonderliche Fehler. Das Quadrat dieser DE ist 0,0179; setzet man nun hiezu das Quadrat der EB, so wird die Summe 0,2679, welches das Quadrat der DB ist. Also ist DB=0,5176 und FB=0,2588, woraus nun ferner FC=0,9660 auf eben die Art zu finden ist, wie wir die EC gefunden haben.

§. 23. Hat man nun EC, die Entfernung einer Sehne von dem Mittelpunct, so wird ED, der Ueberschuß des Halbmessers über diese Entfernung, wie wir gesehen haben, allzeit gar leicht gefunden. Verfolget man aber diese Rechnung, welche wir bey der Sehne von 60 Graden, oder bey der Seite des in dem Cirkel zu beschreibenden regulären Sechsecks angefangen haben, und bringet durch die Vermehrung der Ziffer alles zu einer größern Richtigkeit, so wird noch folgendes heraus gebracht; wo bey S immer die halbe Seite, die in der Figur mit EB oder FB gezeichnet ist, und V den Ueberschuß des Halbmessers über ihre Entfernung vom Mittelpunct, dergleichen DE ist, bedeutet:

Im Vleck ist	S=0,5000000000,	V=0,1339745962
Im XIIeck ist	S=0,2588190451,	V=0,0340741737
Im XXIVeck ist	S=0,1305261922,	V=0,0085551386
Im XLVIIIeck ist	S=0,0654031292,	V=0,0021410768
Im XCVIeck ist	S=0,0327190828,	V=0,0005354125

und so weiter. Wir werden diese Ausrechnung in dem nachfolgenden gar nützlich gebrauchen.

Ausmessung verschiedener Cörper.

§. 24. Zur Ausmessung der Cörper wird wieder ein Cörper angenommen, weil weder eine Linie noch eine Oberfläche gegen einen Cörper einige Verhältniß haben kan, welche man doch durch die Ausmessung suchet. Und da es auch hier an sich eins ist, was man dem Cörper, welchen man zum Maaß oder zur Einheit annimt, vor eine Figur geben will: so erfordert die Bequemlichkeit meistentheils, daß dieses Maaß die Figur eines Würfels habe. Weil nemlich erstlich ein Würfel unter die Cörper der ersten Art gehöret, welche eine geradelinichte Grundfläche haben, mit welchen man die Cörper der andern und dritten Art leicht vergleichen kan; und weil zweytens ein Würfel durch die einzige Seite desselben gegeben wird, welches in der Anwendung eben die Bequemlichkeit bringt, welche wir von dem Qua-

drate, bey der Ausmessung der Oberflächen, gehabt haben, wie dieses sich sogleich zeigen wird.

[*Fig.* 381.] §. 25. Man kan aber wieder alle Cörper der ersten, zweyten und dritten Art, deren Grundflächen geradelinicht sind, ausmessen, wenn man nur ein gerades Parallelepipedum auszumessen weiß. Dieses aber geschiehet folgendergestalt. Es sey das gerade Parallelepipedum ABCD aus dem Würfel V, als der Einheit, auszumessen. So messe man erstlich die Seite AB aus der Seite des Würfels V, und bemerke die Zahl, welche anzeiget, wie oft diese Seite und deren Theile in der AB enthalten sind; das ist, man suche eine Zahl, welche die Verhältniß der Seite des Würfels V zur AB so genau ausdrücket als es möglich oder nöthig ist. Es sey diese Zahl 6, 5. Eben so messe man auch die Seite BC. Wir setzen, daß vor diese Linie die Zahl 4, 3 gefunden worden sey: und da man eben diese Messung auch bey der Höhe CD vorzunehmen hat, so nehmen wir an, daß die Zahl 5, 4 diese CD ausdrücke. Bedeutet nun L die Seite des Würfels V, so wissen wir aus der Betrachtung, welche wir bey dieser Art Cörper angestellet haben, daß die Verhältniß V: ABCD aus den drey Verhältnissen L: AB, L: BC, und L: CD zusammen gesetzt sey, XI, 39. Da nun alle diese Verhältnisse durch Zahlen ausgedrücket sind, und man zwo Zahlen, deren Verhältniß aus drey gegebenen Verhältnissen zusammen gesetzt ist, durch die gehörige und bekante Multiplication finden kan, VIII, 24: so sind auch zwo Zahlen in unserer Gewalt, welche sich wie V zu ABCD verhalten, deren erste die Einheit seyn, und die zweyte anzeigen wird, wie oft die Einheit V in ABCD enthalten ist, welches dasjenige ist, so man suchte. Es ist nemlich:

$$\left.\begin{array}{l} L : AB = 1 : 6,5 \\ L : BC = 1 : 4,3 \\ L : CD = 1 : 5,4 \end{array}\right\} \text{multipl.}$$

und also V: ABCD = 1: 150,930. Demnach enthält der Cörper ABCD die Einheit V hundert und funfzig mal, und noch über dieses 93 Hundertel derselben.

[*Fig.* 382.] §. 26. Von den zehentheilichten Brüchen, welche hier vorkommen, giebt die 382 Figur einen deutlichen Begrif. Es sey der Würfel, welchen dieselbe vorstellet, die Einheit. Man theile die Seite desselben AB in zehen gleiche Theile, und lege durch den ersten Theilungspunct die Fläche CDE den Seiten des Würfels parallel, welche auf AB perpendicular stehen; so wird dadurch der Cörper CDEF von dem Würfel abgeschnitten, welcher der zehende Theil des Ganzen ist. Ferner schneide

man

man auch von AF den zehenten Theil AG ab, und ziehe durch G die Fläche GHI den zwo Seiten des Würfels parallel, auf welchem AF perpendicular stehet; so ist der Cörper AGHI der zehente Theil des vorigen AFED, und folgends der hundertste Theil des Würfels, welcher vor die Einheit angenommen worden ist. Endlich schneide man auch von der dritten Seite neun Zehentel AK ab, und ziehe eine Fläche der Seite FB parallel, so erhält man den Cörper HIDK, welcher ein Würfel, und der zehente Theil des Cörpers AGHI seyn wird. Folgends ist eben dieses Würfelchen HIDK der hundertste Theil des Cörpers AFE, und der tausendste Theil des Würfels EB, welchen man vor die Einheit angenommen hat.

§. 27. Es ist demnach der zehente Theil der würflichten Einheit ein Parallelepipedon, dessen Länge und Breite die Seite dieses Würfels, und die Höhe der zehente Theil derselben ist: der hundertste Theil der würflichten Einheit ist ein Parallelepipedon, dessen Länge der Seite des Würfels gleich ist, und die Breite und Höhe dem zehenten Theil derselben, und der tausendste Theil der würflichten Einheit ist wieder ein Würfel, dessen Seite der zehente Theil der Seite dieser Einheit ist. Hieraus übersiehet man eine Zahl, welche sich auf eine würflichte Einheit beziehet, und welche wie diese 395, 273 aussiehet, vollkommen. Sie bedeutet 395 Einheiten wie EB, zwey AE, sieben AI und drey KI.

§. 28. Doch pfleget man gemeiniglich auch die Brüche durch Würfel auszudrücken, und dieses ist bequemer als das vorige. Es enthält AI zehen KI, und folgends enthalten sieben AI siebenzig KI. Und da AE zehen AI enthält, so enthält AE hundert KI, und ist also 2AE so viel als 200 KI, daß man also auch den Bruch 0,273 lesen kan zwey hundert, siebenzig und drey KI.

§. 29. Stellet man sich nun die Seite des Würfels KI, welche der zehente Theil der Seiten des Würfels EB ist, wieder in zehen gleiche Theile getheilet vor; so ist ein Würfelchen, dessen Seite der zehente Theil dieser Seite ist, wiederum der tausendste Theil des Würfels KI; und so gehet es ferner, wenn man dieses Zehentel der Seite des Würfels KI wieder in Zehentel theilet, und so immer fort. Dieses giebt uns einen vollständigen Begrif von dem würflichten Maaße. Man nimmet eine gerade Linie an: man theilet diese in zehen gleiche Theile, einen jeden dieser Theile theilet man wieder in zehen gleiche Theile, und so weiter, bis man auf Kleinigkeiten kommet, die in keine Betrachtung gezogen werden können. Man stellet sich Würfel vor, die aus der ganzen Linie und aus ihren Theilchen gemacht worden sind, wie diese auf einander folgen, da denn im-

immer der kleine Würfel der tausendste Theil des nächst größern seyn wird. Durch dergleichen Würfel misset man gemeiniglich alle Cörper. Die Zahlen, welche sie ausdrücken, werden wie gemeine Decimalbrüche geschrieben. Beziehet sich also eine Zahl, als 103, 5729345 auf würflichte Einheiten; so bedeuten die erstern Ziffern, welche von den nachfolgenden durch das (,) abgesondert sind, 103 würflichte Einheiten, wie man sie angenommen hat, zum Exempel solche Würfel, deren Seiten Schuhe sind, die nachfolgende drey Ziffer bedeuten 572 Würfel, deren Seiten den zehenten Theil der Seiten des vorigen ausmachen. Die drey, die auf diese folgen 934, zehlen Würfel, deren Seiten wieder der zehente Theil der Seite der unmittelbar vorhergehenden Würfel ist: und eben so ist die Seite der Würfel, die von den letzten drey Ziffern gezehlet werden: (denn man muß auch hier die Classe dreyer Ziffer mit oo vollmachen, so oft es nöthig ist) der zehente Theil der Seite der Würfel der dritten Größe, und man hat 500 dergleichen Würfel. Damit man dieses desto leichter einsehen könne, pfleget man auch zuweilen dergleichen Zahlen also zu schreiben und abzutheilen; $103^{\circ}\,572'\,934''\,500.'''$

§. 30. Dieses setzet uns genugsam im Stand, alle Cörper der ersten, andern und dritten Art zu berechnen, deren Grundflächen geradelinicht sind. Da man vor einen jeden Cörper der ersten Art ein Parallelepipedum annehmen kan, welches mit demselben gleiche Grundfläche und Höhe hat, XI, 25; so siehet man, daß einen jeden Cörper der ersten Art zu berechnen, nichts erfordert wird, als daß man seine Grundfläche berechne, welche zugleich die Grundfläche des Parallelepipeden seyn wird, und daß man diese sodann durch die Höhe des Cörpers multiplicire.

§. 31. Und da ein Cörper der zweyten Art ein Drittel eines Cörpers der ersten Art ist, welcher mit demselben gleiche Grundfläche und Höhe hat, XI, 61: so wird ein Cörper der zweyten Art, dessen Grundfläche die Zahl B, und dessen Höhe die Zahl A ausdrücket, durch das Product $\frac{1}{3}B \times A$ ausgedrückt; und man erhält dieses Product, wenn man das Product aus der Grundfläche und Höhe $B \times A$ durch 3 theilet; oder wenn man $\frac{1}{3}B$ durch A, oder auch B durch $\frac{1}{3}A$ multipliciret.

§. 32. Ein Cörper der dritten Art ist zweyen Dritteln eines Cörpers der ersten Art gleich, welcher mit dem Cörper der dritten Art gleiche Grundfläche und Höhe hat, XI, 89. und wird demnach durch das Product $\frac{2}{3}B \times A$ ausgedrückt. Man bekommet dieses Product, wenn man $2B \times A$ durch 3 dividiret; oder wenn man $\frac{2}{3}B$ durch A, oder $\frac{2}{3}A$ durch B multipliciret.

§. 33. Alle diese Berechnungen der Cörper der ersten, andern und

drit-

dritten Art haben auch in dem Falle statt, wenn die Grundflächen, Cirkel oder Theile der Cirkel sind. Wir haben aber noch nicht weisen können, wie die Cirkel zu berechnen seyn. Und wir werden dieses erst nach einer weitläuftigen Betrachtung gewisser Eigenschaften der Zahlen thun können, welche sowohl vor sich von großem Nutzen, als insonderheit bey der Messung der krumlinichten Flächen unentbehrlich sind. Doch weil vielleicht diese Berechnung des Cirkels einigen zu mühsam scheinen dürfte, so will ich hier eine andere geben, welche sich bloß auf dasjenige gründet, so bisher in Betrachtung gezogen worden ist, und sehr wenig Rechnung erfordert.

Eine Berechnung des Cirkels.

§. 34. Es gründet sich aber diese Berechnung auf eine gewisse Art eines Cörpers, welchen wir in dem vorigen nicht besonders betrachtet haben, weil er zu keiner der drey Arten, die in dieser Geometrie abgehandelt werden musten, eigentlich gehöret. Dieser Cörper wird also gebildet; oder man kan sich wenigstens denselben, in der Verknüpfung mit dem übrigen, worauf wir unsere Schlüsse gründen werden, also vorstellen. ABCD ist ein rechtwinklichtes Parallelogrammum, welches nach AD viel länger, als nach AB breit ist. An dieses Parallelogrammum ist das geradewinklichte Parallelepipedon AE angesetzt, so daß das Parallelogrammum eine Seite dieses Cörpers ausmachet, welche in unserer Zeichnung die vordere ist. Die Dicke desselben DE kan genommen werden, wie man will, weil darauf gar nichts ankömt. Die Seite BC ist bey F in zwey gleiche Theile getheilet, und um diesen Punct F sind durch B und C die zween Cirkelbogen BH und CG beschrieben worden, welche von den geraden Linien BA und CD bey B und C berühret werden. Durch das Punct G, in welchem einer dieser Bogen die AD schneidet, gehet eine Fläche der Seite CD des Cörpers parallel, welche von demselben das Prisma KIC absondert. An dem Bogen GC aber muß man sich einen Theil der Oberfläche eines geraden Cylinders vorstellen, , in dessen Oberfläche die GK lieget, und welche also von eben dem Parallelepipedon IE den Cörper DEKGC abschneidet, der oben eine rechtwinklichte Grundfläche GE hat, dessen Seite EC ebenfals ein geradewinklichtes Viereck ist, übrigens aber von der ebenen aber krumlinichten Figur GDC und einer andern, von eben der Gestalt und Größe, die dieser entgegen stehet, und endlich von der cylindrischen Oberfläche KGC eingeschlossen wird. Dieser Cörper EGC nun ist mit dem Prisma EGIC zu vergleichen. Es werden uns aber unsere Schlüsse dahin

führen, daß wir einsehen, es sey dieser Cörper immer kleiner als der dritte Theil des Prisma, komme aber diesem dritten Theil desto näher je kleiner man CD in Ansehung des Halbmessers FC machet, so daß bey der beständigen Verminderung dieser CD der Fehler, welchen man begehet, wenn man den Cörper EGC dem dritten Theil des Prisma EGIC gleich setzet, endlich so klein wird, daß er in keine Betrachtung gezogen werden darf.

§. 35. Die Schlüsse, vermittelst welcher dieses erwiesen wird sind nachfolgende. Das Quadrat aus CD ist dem rechtwinklichten Viereck DH×DG gleich, weil DH:CD=CD:DG, VII, 75. und aus eben der Ursache ist auch $CP^q = PX \times PV$, wenn man sich vorstellet, daß die Linie OP nach Belieben der BC parallel gezogen sey. Folgends ist $CD^q : CP^q = DH \times DG : PX \times PV$, das ist, die Verhältniß der Quadrate $CD^q : CP^q$ ist aus den zwo Verhältnissen DH:PX und DG:PV zusammen gesetzt.

§. 36. Man bilde nun auch eine Pyramide deren Grundfläche LM der Grundfläche GE des Cörpers EGC oder des Prisma EGIC gleich ist, und welcher mit jedem dieser Cörper einerley Höhe hat, so nemlich, daß MN=DC. Man bringe die Grundfläche LM dieser Pyramide LMN in die erweiterte Fläche AE, und schneide alsdann beyde Cörper, EGC nemlich und diese Pyramide, durch OP mit einer Fläche, welche der Fläche AE parallel läuft. Die Figur des Schnittes des Cörpers EGC wird ein geradewinklichtes Viereck seyn, dessen Seiten sind VP, PQ; welches sich also zu dem Viereck GDE verhalten wird, wie VP zu GD, weil PQ=DE, IX, 40. Da also die Verhältniß $CD^q : CP^q$ aus den zwo Verhältnissen DH:PX, und GD:PV zusammen gesetzt ist, so kan man, wenn man an die Stelle der letztern die Verhältniß des Viereeks GE zu dem Viereck VQ nimmet, eben die Verhältniß $CD^q : CP^q$ auch aus den Verhältnissen DH:PX und GE:VQ zusammen setzen, und schreiben, $CD^q : CP^q = DH \times GE : PX \times VQ$. In der Pyramide aber ist durch eben dem Schnitt das Viereck RST zum Vorschein gebracht worden, und es ist, wie in einer jeden Pyramide, $NM^q : NT^q = LM : RT$, XI, 58. Es ist aber auch CD:CP=NM:NT, X, 60. und folgends $CD^q : CP^q = NM^q : NT^q$. Also, wenn man die beiden Proportionen zusammen nimmet, $DH \times GE : PX \times VQ = LM : RT$: oder, weil nothwendig $LM : RT = DH \times LM : DH \times RT$, VIII, 44. und die Grundfläche LM, der Grundfläche GE gleich genommen worden, so kan man auch eben die Proportion so setzen $DH \times GE : PX \times VQ = DH \times GE : DH \times RT$, woraus man sogleich sieht, daß die nachfolgenden Glieder dieser Verhältnisse, das zweyte nemlich und das vierte, gleich seyn müssen,

sen, da die vorhergehenden gleich sind. Es ist also PX × VQ = DH × RT, und hieraus folget die Proportion DH : PX = VQ : RT.

§. 37. Aus dieser Proportion nun ist dasjenige, so gezeiget werden soll, gar leicht zu schließen. DH ist immer kleiner als PX, also ist auch der Schnitt VQ immer kleiner als der Schnitt der Pyramide RT. Wäre der Schnitt VQ überall den Schnitt RT gleich, so wäre der Cörper GEC genau so groß als die Pyramide LMN, und folgends XI, 63. genau so groß als der dritte Theil des Prisma EGIC, dessen Grundfläche und Höhe der Grundfläche und Höhe der Pyramide gleich ist, IX, 7. So aber ist der Cörper EGC nothwendig kleiner als die Pyramide, und folgends auch kleiner als der dritte Theil des Prisma. Indessen ist doch die DH niemals viel kleiner als die PX, und der Unterschied dieser Linien ist überhaupt desto geringer, je kleiner man die CD zu eben den Durchmesser BC genommen hat: weil endlich, wenn man CD sehr klein nimt, die Linien DH, PX beyde fast mit diesen Durchmesser zusammen fallen. Also kan auch bey diesem Umstand der Schnitt VQ kaum merklich kleiner seyn als der Schnitt RT und folgends ist der Cörper EGC nur um etwas kaum merkliches kleiner, als die Pyramide LMN oder der dritte Theil des Prisma KGIC.

§. 38. Dieses war unser Satz: nun müssen wir die zween Cörper KGC und KGIC noch von einer andern Seite betrachten, damit wir demjenigen näher kommen, warum es uns eigentlich zu thun ist. Wenn man GICD als die Grundfläche des Prisma EGIC, welches eigentlich ein geradewinklichtes Parallelepipedon ist, und die krumlinichte Figur DGC als die Grundfläche des Cörpers EGC ansiehet, so werden diese Cörper beyde Cörper der ersten Art, welche die Höhe DE gemeinschaftlich haben. Sie verhalten sich also wie ihre Grundflächen, und das Viereck ID ist etwas weniges mehr als dreymal so groß, denn das krumlinichte Dreyeck DGC, weil das Prisma EGIC um etwas weniges größer ist, als der Cörper EGC dreymal genommen. Da also das krumlinichte Dreyeck GCD noch nicht gar den dritten Theil des Vierecks ID ausmacht, so muß im Gegentheil die Figur GIC etwas weniges über zwey Drittel eben des Vierecks enthalten, oder zwey Drittel des Vierecks müssen um etwas sehr weniges kleiner seyn, als die Figur GIC.

[*Fig.* 418] §. 39. Es ist aber diese Figur GIC die Helfte des Abschnittes eines Cirkels, wie man leicht siehet; wir sind also im Stande einen solchen Abschnitt ohne sonderlichen Fehler mit einem geradewinklichten Viereck zu vergleichen. Es sey GIC dieser halbe Abschnitt, so wird derselbe sich zu dem Viereck DI verhalten, wie $2+x$ zu 3, und dieses x wird

desto kleiner seyn, je kleiner der Bogen GC in Ansehung des ganzen Umfangs ist. In eben diesem Verstande drücket auch $2+x:3$ die Verhältniß des ganzen Abschnittes GCH zu dem Viereck DH aus, weil $GCH=2GCI$ und $DH=2DI$: und die Verhältniß 2:3 ist der wahren Verhältniß des Abschnittes zum Viereck gar nahe.

§. 40. Es werden also die Abschnitte, unter der oft wiederhohlten Bedingung gar leicht mit einer hinlänglichen Richtigkeit mit Vierecken verglichen. Ist aber der Bogen eines Abschnittes ein großer Theil des Cirkelkreises; so darf man nur von demselben verschiedene kleinere abschneiden, die man immer einander gleich machen kan. Alsdenn werden diese Abschnitte besonders berechnet, und die übergebliebene geradelinichte Figur auch besonders, so kan man durch die Addition dieser Theile den Inhalt des großen Abschnittes richtig genug heraus bringen, und zwar desto richtiger, je kleiner die Abschnitte angenommen worden sind, welche man von dem größern abgeschnitten hat.

[*Fig.* 419.] §. 41. Hieraus schließet man leicht, wie der Ausschnit eines Cirkels mit einer eben so großen Richtigkeit zu berechnen sey als diejenige ist, mit welcher diese Rechnung den Abschnitt angiebt. Es sey der Ausschnitt AEBC zu berechnen, auf dessen Sehne AB die CD aus dem Mittelpunct perpendicular gezogen ist. Es theilet diese CD bey E auch den Bogen AEB und den Abschnitt in zween gleiche Theile, und man siehet leicht, daß der Ausschnitt aus den Dreyeck ABC und aus dem Abschnitt AEB zusammen gesetzt sey. Wird nun das rechtwinklichte Viereck DF gezeichnet, so ist dasselbe dem Dreyeck ABC gleich, und wenn man ED in drey gleiche Theile theilet, und zeichnet auch das rechtwinklichte Viereck GA, so ist dieses nur um etwas weniges kleiner als die Helfte des Abschnittes AED. Also muß man HG der GD gleich, oder HD doppelt so groß nehmen als GD, wenn man ein Viereck von eben der Höhe, HA, haben will, welches dem ganzen Abschnitt AEB gleich sey. Man kan aber auch nur HE dem dritten Theil der ED, das ist, der EG gleich machen, um das Punct H zu erhalten, welches die Länge der Grundlinie HD von dieser Seite dergestalt bestimmet, daß, wenn man auf diese HD das geradelinichte Viereck HA setzet, dasselbe nur um etwas weniges kleiner wird als der Abschnitt AEB. Und alsdenn ist das ganze Viereck HKFC dem Ausschnitt ABC mit einem eben so kleinen Fehler gleich. Die Grundfläche dieses Vierecks HC ist $EC+HE$, oder $EC+\frac{1}{3}ED$ und seine Höhe AD.

§. 42. Wenn wir also den Halbmesser EC mit dem Buchstaben R benennen, und wie auch vor dem XIII, 23. geschehen ist, AD uns unter S

und ED unter V vorstellen, so wird die Größe des Ausschnittes durch das Product $S \times (R + \frac{1}{3}V)$ ausgedrückt, und wenn sowol R als S und V durch Zahlen gegeben sind, so darf man nur die Rechnungsarten, welche diese Zeichen angeben, verrichten, um die Zahl heraus zu bringen, welche den Ausschnitt mit der angenommenen Einheit vergleichet. Ist nun der Ausschnitt von der Grösse, daß er, etliche mal genommen, einen ganzen Cirkel gibt, welches allezeit zutrift, wenn AB die Seite eines regulären Vielecks ist, so ist es leicht aus der Berechnung desselben die Berechnung des Cirkels heraus zu bringen. Denn man darf nur den Ausschnitt gehörig multipliciren, wenn man die Zahl haben will, welche den Cirkel aus der angenommenen Einheit ausdrückt. Je kleiner aber der Winkel ACB des Ausschnitts genommen wird, je richtiger wird auch diese Zahl herausgebracht.

§. 43. Es sey, damit wir bey etwas sehr leichten anfangen, AB die Seite eines regulären Sechsecks, und der Halbmesser AC sey = 1, so wird wie wir XIII, 23. gesehen haben, AD oder S = 0,5 und ED oder V = 0,133974, denn die übrige Ziffer sind hier unnütze: demnach haben wir $\frac{1}{3}V = 0,044658$ und $R + \frac{1}{3}V = 1,044658$, folgends $S \times (R + \frac{1}{3}V) = 0,522329$. Dieses sechsmal genommen, giebt den Inhalt des Cirkels aus dem Quadrat seines Halbmessers, als der Einheit. Es hält also der Cirkel etwas mehr als 3, 133974 Quadrate seines Halbmessers. Es ist aber diese Rechnung etwas grob, weil der Winkel ACB sehr groß ist. Genauer bekömt man den Cirkel, wenn AB die Seite eines Zwölfecks ist, noch genauer, wenn sie die Seite einer regulären Figur von 24 Ecken ist, und so weiter.

§. 44. Wir wollen, damit wir zu einer hinlänglichen Richtigkeit gelangen, vor AB die Seite einer regulären Figur von 96 Ecken nehmen. So ist wie wir ebenfals XIII, 23. gesehen haben S = 0,0327190828, und V = 0,0005354125, wenn noch immer R durch die Einheit ausgedrückt wird. Also ist $R + \frac{1}{3}V = 1,0001784708$. Man erhält also den Ausschnitt, wenn man die Zahlen S und $R + \frac{1}{3}V$ in einander multiplicirt. Die Rechnung stehet also:

S = ... 0,0327190828
R + ¼V = ... 1,0001784708

26175266240
2290335796000
130876331200
26175266240
2290335796
327190828
327190828000

0,032724922200882258224

Dieses Product ist nun durch 96 zu multipliciren. Weil aber die letzten Ziffer desselben ohne dem nicht richtig seyn können, so kan man davor nur 0,0327249222 nehmen, und zu einiger Erleichterung der Arbeit an statt durch 96 zu multipliciren, diese Zahl erstlich hundert mal nehmen, und dadurch 3,27249222 heraus bringen, alsdenn aber von diesem Product eben die Zahl viermal genommen oder 0,1308996888 abziehen. Denn was alsdenn übrig bleibt, ist allerdings eben die Zahl 96 mal genommen. Diese Rechnung stehet also:

3,27249222
0,13089968

3,14159254

Diese Zahl nun misset den Inhalt eines Cirkels aus dem Quadrat seines halben Durchmessers mit einer sehr großen Richtigkeit, und es ist nur in den letzten zwo Ziffern ein kleiner Fehler, welche man aber ohne Bedenken gar weglassen, und die Verhältniß des Quadrats des Halbmessers zu dem Cirkel also ausdrücken kan 1 : 3,141592. Denn die nachfolgende Ziffer bedeuten Kleinigkeiten, welche kaum jemals in Betrachtung kommen.

§. 45. Eben diese Zahlen drücken auch die Verhältniß des Durchmessers eines Cirkels zu seinen Umkreis aus. Denn da der Cirkel einem rechtwinklichten Viereck gleich ist, dessen Grundlinie dem halben Umfang des Cirkels, und seine Höhe dem Halbmesser gleich ist, so ist die Verhältniß des Cirkels zu dem Quadrat seines Halbmessers der Verhältniß dieses Vierecks zu eben dem Quadrate gleich. Weil aber beyde Vierecke den Halbmesser zur Höhe haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundlinien. Also verhält sich auch der Cirkel zu dem Quadrat seines Halbmessers, wie die Grundlinie des länglichten Vierecks zu der Grundlinie des Quadrats,

das

das ist, wie der halbe Umfang des Cirkels zu seinen halben Durchmesser, oder wie der ganze Umfang zu dem Durchmesser. Diese Verhältniß des Durchmessers zum Umkreis wird also ebenfals durch die Verhältniß der Zahlen 1 : 3, 141592 ausgedrückt.

[F. 420.] §. 46. Vermittelst dieser Zahlen ist es nun leicht eine gerade Linie anzugeben, welche einem jeden Cirkelkreis, dessen Durchmesser bekant ist, und einem jeden Theil dieses Kreises, dessen Verhältniß zu dem ganzen Umkreis gegeben ist, gleich sey. Durch die Zeichnung aber kan man dasselbe noch leichter verrichten, und ohne einem Fehler, welcher auf dem Papier jemals merklich wäre. Man theile den Cirkel in vier gleiche Theile, und ziehe die Sehne eines Quadranten AB. Diese theile man ferner in fünf gleiche Theile, und es sey AC eines dieser Fünftel. So ist der Umkreis des Cirkels so groß als 3AE + AC, das ist, eine gerade Linie, welche dem Durchmesser AE dreymal genommen, und dem Zusatz AC gleich ist, ist um etwas kaum merkliches kleiner als der Umfang des Cirkels.

§. 47. Wie weit diese Auflösung richtig sey, kan man vermittelst der herausgebrachten Verhältniß 1 : 3, 141592 leicht ausmachen. Wird der Durchmesser AE vor die Einheit angenommen, so ist die Helfte desselben AF oder FB, = 0, 5, und das Quadrat einer jeden dieser Linien ist = 0, 25, folgends die Summe beyder Quadrate 0, 5, welche dem Quadrat der Sehne AB gleich ist. Die Sehne selbst ist also die Wurzel des Quadrats, welche man leicht ausziehen kan: und die Ziffer 0, 707106 stellen diese Wurzel sehr genau vor. Der fünfte Theil hievon ist 0, 141421, folgends ist nach der gegenwärtigen Regel der Umkreis 3, 141421. Nach der richtigern Rechnung aber hatten wir denselben 3, 141592, welche Zahl um 0, 000181 größer ist als jene. Es beträget aber dieser Ueberschuß noch nicht 0, 0002, das ist, noch nicht zwey Zehentausentel, oder ein Fünftausentel des Durchmessers, welches in den meisten Fällen unmerklich ist, oder doch kaum in Betrachtung kommen kan. Man kan auch den Umkreis des Cirkels auf $3\frac{1}{7}$ seines Durchmessers schätzen. Weil aber $\frac{1}{7}$ in zehentheilichten Brüchen durch 0, 142857 ausgedrückt wird, so wird dadurch der Umkreis durch die Zahl 3, 142857 gegeben. Diese übertrift die richtigere Zahl 3, 141592, um 0, 001265, welcher Fehler etwas mehr als den tausendsten Theil des Durchmessers beträgt.

§. 48. Da wir also durch diese geometrische Zeichnung, oder durch die Verhältniß des Durchmessers eines Cirkels zu seinem Umkreis, welche die herausgebrachte Zahl ausdrücket, in den Stand gesetzt werden, eine gerade Linie zu machen, welche ohne einen merklichem Fehler so groß ist, als

als der Umkreis eines Cirkels, dessen Durchmesser gegeben ist; so sind wir auch im Stande alle Aufgaben, welche bey der Ausmessung des Cirkels und anderer Flächen, die wir mit dem Cirkel oder einem Theile desselben verglichen haben, ohne merklichen Fehler aufzulösen, wie auch alle Cörper, deren Grundflächen Cirkel oder Theile der Cirkel sind, mit einander zu vergleichen; und es könte, wie dabey zu verfahren ist, nunmehro gezeigt werden. Weil aber weiter unten noch eine andere Anweisung gegeben werden wird, den Umkreis eines Cirkels durch eine Zahl auszudrücken, deren Einheit der Durchmesser ist; so können wir alle diese Kleinigkeiten bis dahin versparen. Wir wenden uns nunmehro zu der Abhandlung, deren XIII, 33. Erwehnung geschehen ist, welche die künftigen Betrachtungen sehr erleichtern wird.

Von der Buchstaben Rechnung. Erklärung des Zeichens.

§. 49. Die Eigenschaften der Zahlen leicht und deutlich einzusehen, sind gewisse Zeichen erfunden worden, deren man sich mit ungemeinem Vortheil bedienet, dem Verstand zu helfen, und das Nachdenken zu erleichtern. Diese müssen wir uns vor allen Dingen bekant machen. Es macht der Gebrauch dieser Zeichen vor sich keinesweges die so genante Algebra aus. Die Seele derselben bestehet in der Art zu schließen, und keinesweges bloß in dem Gebrauch dieser oder jener Zeichen. Wir werden uns von der Art des Vortrages, dessen wir uns bisher bedienet haben, ins künftige keinesweges entfernen; und dieser ist von der Art die Fragen aufzulösen, die die Algebra weiset, sehr verschieden.

§. 50. Was aber diese Art zu zeichnen anlanget; so werden die Zahlen, wie auch sonst oft in diesen Betrachtungen geschehen ist, durch die Buchstaben vorgestellet: vor welche man demnach jede beliebige Zahlen wird setzen können. Doch pfleget man sich, wegen der Bequemlichkeit, der kleinern Buchstaben mehr als der größern zu bedienen. Die Zeichen, welche die Rechnungsarten ausdrücken, die mit den Zahlen vorzunehmen sind, haben wir nicht nöthig zu lernen, weil sie gleich Anfangs gewiesen worden sind. Nur ist zu erinnern, daß die Multiplication der Kürze halber hier meistens blos dadurch ausgedrücket werde, daß man die Buchstaben unmittelbar an einander setzet, welche die Zahlen bedeuten, die in einander zu multipliciren sind. Demnach wird ab das Product aus den zwo Zahlen bedeuten, welche man sich unter den Buchstaben a und b vorstellet; und abb das Product, welches kommet, wenn man die Zahl b in sich selbst;

und

und das Product bb, welches dergestalt heraus gebracht wird, durch a multipliciret, und so ferner.

§. 51. Bey diesen Producten ist noch zu merken, daß, wenn man eine Zahl a in sich selbst, das ist, in a multipliciret, und das dadurch entstehende Quadrat, in eben die Zahl a, und so fort; alle diese Producte die **Dignitäten** der ersten Zahl a genennet werden, welche in Ansehung derselben die **Wurzel** ist. Und zwar ist aa die zweyte Dignität der Wurzel a, und aaa ist die **dritte** Dignität dieser Wurzel; $aaaa$ die **vierte**, $aaaaa$ die **fünfte** und so fort. Diese Redensarten allgemein zu machen, nennet man auch a, die erste Dignität, von eben der Wurzel a, welche also von der Wurzel selbst nicht verschieden ist. Die zweyte und dritte Dignität der Wurzel a kennen wir bereits unter dem Namen der Quadratzahl und der Cubiczahl dieser Wurzel: und es ist überhaupt das Gegenwärtige nichts anderst, als eine Erweiterung der Begriffe, welche wir uns von den Quadrat- und Cubiczahlen gemacht haben.

§. 52. Die Weitläuftigkeit im schreiben, welche die vielfältige Wiederholung eben des Buchstabens verursachen würde, zu vermeiden, pfleget man die Zahl der Buchstaben, welche sonst geschrieben werden müsten, nur oben zur rechten Hand mit einer Ziffer auszudrücken, welche man deswegen den **Exponenten** oder **Namen der Dignität** nennet, weil sie anzeiget, die wie vielste Dignität der Wurzel, an welcher sie stehet, man haben wolle. Demnach schreibet man

vor aa auch a^2

$aaa \ldots a^3$

$aaaa \ldots a^4$

$aaaaa \ldots a^5$ und so fort. Will man aber bloß eine gewisse Dignität der Wurzel a ausdrücken, ohne anzuzeigen, die wie vielste dieselbe eigentlich sey: so bedienet man sich an statt der Zahl eines Buchstabens, welcher eine jede Zahl bedeuten kan, und schreibet also a^n. Uebrigens schließet man hieraus leicht, daß a^1, wie man zuweilen zeichnet, nichts anders bedeuten könne, als selbst die erste Dignität a, oder die Wurzel aller übrigen Dignitäten der a.

§. 53. Wir können eine Sache, die zwar an sich selbst keine Schwierigkeit hat, durch ein Exempel noch deutlicher machen. Wenn a die Zahl 2 bedeutet, so ist $aa = a^2 = 2 \times 2 = 4$, und $aaa = a^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, und $aaaa = a^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, $aaaaa = a^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$, und so fort.

§. 54. Es hat aber dasjenige, so wir eben von der bequemen Bezeich-

nung der Dignitäten, vermittelst der Exponenten derselben, gesaget haben, auch in dem Falle statt, wenn die Dignitäten selbst als Factore in andern Producten vorkommen. Es ist $aaabb$ so viel als $aaa \times bb$: und weil a^3 so viel bedeutet als aaa, und b^2 so viel als bb, so kan auch $a^3 b^2$ nichts anders als $aaabb$ bedeuten. So ist es in allen übrigen dergleichen Fällen. $a^5 b^3 c$ bedeutet so viel als $aaaaabbbc$. Man siehet hieraus deutlich genug, was diese Art, die Dignitäten durch ihre Namen zu bezeichnen, vor eine Bequemlichkeit gebe.

§. 55. Auch ist die Bequemlichkeit, welche man aus dieser Bezeichnung bey der Multiplication und Division der Dignitäten, durch andere Dignitäten von eben der Wurzel ziehet, nicht geringer. Denn gesetzt, es sey a^3 durch a^2 zu multipliciren, so darf man bloß die Exponenten 3 und 2 addiren. Die Summe $3+2$ oder 5 ist der Exponent des Products, und dieses ist demnach a^5. Denn wenn befohlen wird, a^3 durch a^2 zu multipliciren, so ist eigentlich aaa durch aa zu multipliciren. Nun ist das Product $aaa+aa$ ohnstreitig $aaaaa$, denn dieses kan nichts anders als das vorige bedeuten. Eben so viel aber bedeutet auch a^5. So ist es in allen Fällen, und das Product aus a^n in a^m ist überall a^{m+n}.

§. 56. Hieraus siehet man sogleich, daß, wenn man eine Dignität a^n in sich selbst multipliciren sol, man bloß die Exponenten derselben zu sich selbst addiren, oder zweymal nehmen müsse: und daß $a^{n+n} = a^{2n}$ dem Product $a^n \times a^n$ gleich seyn werde. Aus eben der Ursach ist die dritte Dignität der a^n diese a^{3n}. Denn die dritte Dignität von a^n zu erhalten, muß man das Product $a^n \times a^n \times a^n$ machen. Dieses Product aber ist der Dignität a^{n+n+n}, oder a^{3n} gleich. Und überhaupt hat man nur den Exponenten der Wurzel durch den Exponenten der Dignität zu multipliciren, wenn man diese Dignität erhalten will, der Exponent der Wurzel mag seyn so groß er will. Denn man kan eine jede Zahl, und folgends auch eine jede Dignität, als eine Wurzel betrachten. Und es sind demnach die Dignitäten der a^n, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, diese: a^n, a^{2n}, a^{3n}, a^{4n}, a^{5n} und so fort; und a^{mn} bezeichnet überhaupt eine jede Dignität der Wurzel a^n, deren Exponenten die Zahl m ausdrücket. Oder, wenn a^n zu derjenigen Dignität erhaben werden soll, deren Exponent m ist, so ist a^{mn} diese Dignität.

§. 57. Hieraus schließet man leicht, daß, wenn eine Dignität durch eine andere von eben der Wurzel zu dividiren ist, man nur den Exponenten der letztern von dem Exponenten der erstern abziehen müsse, damit der Exponent des Quotienten übrig bleibe. Es sey a^5 durch a^2 zu dividiren, so

ist

ist der Exponent des Quotienten $5-2=3$, und der Quotient ist a^{5-2} oder a^3. Man siehet dieses sogleich, wenn man erweget, daß wenn man a^3 mit der Dignität a^2 multipliciret, durch welche a^5 dividiret worden ist, diese a^5 wieder heraus gebracht werde.

§. 58. Auch dieses können wir durch allgemeine Zeichen ausdrücken, wenn wir sagen, daß, wenn die Dignität a^n, durch diese andere Dignität von eben der Wurzel a^m dividiret wird, der Quotient a^{n-m} heraus komme. Wendet man diese Regel bey einer jeden Dignität an, deren Exponent von bestimmeter Größe ist, als bey dieser a^3, und dividiret sie durch a^1 oder a: und verrichtet alsdenn bey dem Exponenten eben die Division, und so immer fort; so wird $\frac{a^3}{a}=a^{3-1}=a^2$, und $\frac{a^2}{a}=a^{2-1}=a^1=a$, und $\frac{a}{a}=a^{1-1}=a^0$, woraus man siehet, daß diese Bezeichnung a^0 nichts anders bedeuten könne, als die Einheit. Denn $\frac{a}{a}$ bedeutet die Einheit, die Zahl a mag so groß seyn, als sie will, weil ein jeder Bruch, dessen Nenner dem Zehler gleich ist, auch der Einheit gleich ist. Gehet man nun in dieser Division weiter fort, und suchet $\frac{1}{a}$ oder $\frac{a^0}{a}$ nach eben diesen Gesetzen auszudrücken, indem man nemlich den Exponenten des Theilers a von dem Exponenten der 1 oder a^0, welche getheilet werden sol, abziehet, so wird der Quotient also ausgedrückt werden müssen: $a^{0-1}=a^{-1}$. Es kan also a^{-1} nichts anders bedeuten als $\frac{1}{a}$. Eben so findet man, daß $\frac{a^{-1}}{a}=\frac{1}{aa}$ auch dergestalt a^{-2} gezeichnet werden könne: und daß überhaupt die Zeichnung a^{-m} nichts anders bedeute, als $\frac{1}{a^m}$. Gleichwie nemlich der Exponent m bedeutet, daß man die Einheit durch die Zahl a und diese wieder durch a und so ferner, so oft multipliciren müsse, als viele Einheiten in dem Exponenten m enthalten sind: also erfordert im Gegentheil die Zeichnung a^{-m}, daß man die Einheit durch a, und den Quotienten $\frac{1}{a}$ wieder durch a dividire, und dieses so oft, als viele Einheiten in m enthalten sind. Stehet zum Exempel m an statt der Zahl 3, so ist a^m oder $a^3=1\times a\times a\times a$ und a^{-3} ist $=\frac{1}{a\times a\times a}$

§. 59. Und da a^{2n} die zweyte Dignität der Wurzel a^n bedeutet, oder das Quadrat dieser Zahl, so siehet man, daß hinwiederum die Wurzel einer Dignität, die man als die zweyte ansiehet, oder eine Quadratwurzel, dadurch bezeichnet werde, wenn man den Exponenten derselben halb so groß machet, als den Exponenten der Dignität. So ist a^{3n} die dritte Dignität der Wurzel a^n, und der Exponent n der Wurzel der dritten Dignität, oder der Cubicwurzel derselben, ist der dritte Theil des Exponenten der Dignität 3n. Eben so ist es mit der Wurzel der vierten, der fünften und folgenden Dignitäten. Denn a^n ist die Wurzel der vierten Dignität a^{4n}, und der fünften a^{5n}, und so fort. Dieses ist richtig, n mag bedeuten, was man wil. Man bezeichnet also die Wurzel der vierten Dignität, wenn man den Exponenten der Dignität durch 4 theilet, die Wurzel der fünften, wenn man die Division durch 5 verrichtet, und so fort. Und da überhaupt a^{mn} die Dignität der Wurzel a^n vorstellet, deren Exponent die Zahl m ist, so bekömt man überhaupt die Wurzel der Dignität, deren Exponent m ist, wenn man den ganzen Exponenten mn wie er an a stehet, durch den Exponenten m theilet, welcher die Dignität anzeiget, deren Wurzel man haben wil.

§. 60. Eben dieses ist auch richtig, wenn der Exponent durch eine einzelne Zahl oder durch einen einzigen Buchstaben angezeiget wird, ob zwar diese Zahl sich nicht durch den Exponenten der Dignität, von welcher man die Wurzel haben will, genau dividiren lässet. Ein Exempel kan die Sache klar machen. Ich will die Wurzel haben, deren dritte Dignität die Zahl a^5 ist. So betrachte ich 5 als ein Product aus 3 und einer andern Zahl, welche nichts anders als $\frac{5}{3}$ seyn kan, und schreibe also, oder kan wenigstens an statt der 5 in a^5 schreiben $3\times\frac{5}{3}$, daraus folget sogleich, daß a^5 die dritte Dignität der Zahl $a^{\frac{5}{3}}$ sey, weil diese Wurzel $a^{\frac{5}{3}}$, wenn man sie zur dritten Dignität erhebet, a^5 gibt.

§. 61. Aus diesem Beyspiel siehet man zugleich, daß es so leicht nicht sey, einem nach der gewöhnlichen Art geschriebenen Bruch im Druck an die dem Exponenten gehörige Stelle zu setzen. Denn $a^{\frac{5}{3}}$ fällt gar nicht wohl in die Augen. Man pflegt derowegen die gebrochene Zahlen auch anderst zu bezeichnen, und schreibt an statt $\frac{5}{3}$ zu weilen 5:3, wenn man sich hievon eine größere Deutlichkeit verspricht. Da $\frac{5}{3}$ der Quotient ist, welcher heraus gebracht wird, wenn man 5 durch 3 theilet, so kan man auch sagen, daß 5:3 diesen Quotienten bedeute; und in so ferne (:) als das Zeichen der Division ansehen. Ueberhaupt also bedeutet $a:b$ außer

der Verhältniß der Zahl a zur b, auch eben das, was $\frac{a}{b}$ bedeutet. Man siehet aber leicht welche von diesen beyden Bedeutungen in jedem besondern Fall statt habe, und es ist nicht zu befürchten, daß man sich verwirren werde. Wir wollen uns dieser Art die Quotienten zu zeichnen, in den Exponenten vornehmlich, und sonst, wenn sie zur Deutlichkeit etwas beytragen kan, bedienen. Bey dieser Zeichnung bedeutet $a\,b:c$, daß man a durch b multipliciren, und das Product durch c theilen müsse, oder daß a durch den Quotienten $b:c$ zu multipliciren sey. Denn beydes komt auf eines hinaus; und nach diesem Beyspiele sind andere dergleichen Bezeichnungen zu erklären.

§. 62. Vermittelst dieser Art zu zeichnen wird, was bisher von der Ausziehung der Wurzel gesagt worden ist, also ausgedrückt. Die Wurzel, deren Exponent durch m vorgestellet wird, aus einer jeden Dignität, als a^n ist $a^{n:m}$, was auch immer n bedeuten mag. Und man siehet dieses leicht, wenn man erweget, daß, wenn diese Wurzel $a^{n:m}$ zur Dignität, deren Exponent m ist, erhaben werden soll, dadurch nichts anders als $a^{mn:m}$, das ist, das vorige a^n, kommen könne.

§. 63. Es findet dasjenige, so von den Exponenten der Dignitäten und ihrer Wurzeln gesaget worden ist, auch in dem Falle statt, wenn verschiedene Dignitäten von verschiedenen Wurzeln in einander multiplicieret sind. Die zweyte Dignität nemlich von $a^n b^m$ ist $a^{2n} b^{2m}$, die dritte $a^{3n} b^{3m}$, die vierte $a^{4n} b^{4m}$: und so fort. Denn die zweyte Dignität von $a^n b^m$ ist ohnstreitig $a^n b^m \times a^n b^m$, das ist $a^n a^n b^m b^m$, I, 98. Nun ist $a^n a^n = a^{2n}$, und $b^m b^m$ ist b^{2m}, XIII, 56. Also ist die zweyte Dignität von $a^n b^m$ in der That $a^{2n} b^{2m}$. Eben so schließet man auch bey der dritten Dignität, und den übrigen. Und wenn mehr als zwo Dignitäten in einander multiplicieret sind, siehet man auf eben die Art ein, daß noch eben dieses gelte. Ist die Wurzel $a^n b^m c^s$; so ist die Dignität dieser Wurzeln deren Exponent r ist, diese: $a^{rn} b^{rm} c^{rs}$.

§. 64. Hieraus schließet man ferner, daß hinwiederum, wenn aus einer Dignität die Wurzel auszuziehen ist, welche durch die Multiplication verschiedener Dignitäten von verschiedenen Wurzeln entstanden ist; man aus allen diesen Dignitäten die Wurzel ziehen, und diese hernach in einander multipliciren könne. Die Wurzel der Dignität $a^{2n} b^{2m}$, welche man als die zweyte betrachtet, ist $a^n b^m$. Und wenn man $a^{rn} b^{rm} c^{rs}$ als eine Dignität ansiehet, deren Exponent r ist, so ist die Wurzel derselben $a^n b^n c^s$.

Man hat nemlich die Wurzeln der Dignitäten a^{rn}, b^{rm}, c^{rs}, welche in einander multipliciret waren, eine nach der andern ausgezogen, und diese Wurzeln a^n, b^m, c^s nachhero in einander multipliciret. Siehet man also $a^n b^m c^s$ als eine Dignität an, deren Exponent t ist, so ist die Wurzel derselben $a^{n:t} b^{m:t} c^{s:t}$.

§. 65. Daß die Wurzel aus einer Zahl ausgezogen werden sol, welche man als eine Dignität derselben ansiehet, pfleget man auch durch dieses Zeichen $\surd$ auszudrücken, welches man vor dieselbe Zahl, oder das Zeichen, unter welchem man sich eine Zahl vorstellet, setzet; und über demselben bezeichnet man den Exponenten der Dignität, welche man der Zahl giebet, deren Wurzel verlanget wird. Doch wird der Exponent 2 nicht geschrieben. Folgends bedeutet $\surd 3$, daß man 3 als eine Quadratzahl ansehe, und ihre Quadratwurzel verlange, welche irrational ist. $\sqrt[3]{64}$ bedeutet, daß man die Zahl 64 als eine Cubiczahl ansehe, welches sie auch würklich ist, und daß man die Wurzel derselben haben wolle, welche 4 ist. Und so in allen übrigen Fällen. $\sqrt[n]{a^m}$ bedeutet also, daß man a^m als eine Dignität ansehe, deren Exponent n ist, und die Wurzel dieser Dignität ist dasjenige, so man sich unter $\sqrt[n]{a^m}$ vorstellen muß.

§. 66. Verknüpfet man nun dieses mit dem vorhergehenden, so siehet man sogleich, daß überall $\sqrt[t]{a^m}$ so viel bedeute als $a^{m:t}$: woraus ferner folget, daß auch die nachfolgenden Zeichen einerley Bedeutung haben: $\sqrt[t]{a^m b^n c^s} = a^{m:t} b^{n:t} c^{s:t} = \sqrt[t]{a^n} \times \sqrt[t]{b^n} \times \sqrt[t]{c^s} = a^{m:t} \times \sqrt[t]{b^n} \times \sqrt[t]{c^s} = a^{m:t} \times \sqrt[t]{b^n c^s} = a^{m:t} b^{n:t} \times \sqrt[t]{c^s} = \sqrt[t]{a^m b^n} \sqrt[t]{c^s}$. Ein kleines Nachdenken, bey welchem man voraus setzet, daß die Sache nicht die geringste Schwierigkeit habe, kan dieselbe deutlicher machen, als viele Worte.

§. 67. Dieses war dasjenige, so wir von der Bezeichnung zu merken hatten, der man sich bey dergleichen Abhandlungen mit gar großem Vortheil bedienet, als wir vor uns haben. Wir müssen demselben nur noch einen Satz beyfügen. Die Bedeutung der Zeichen + und − ist längst I, 73. deutlich erkläret, und gewiesen worden, daß, wenn sie den Ziffern vorgesetzet werden, und man, zum Exempel, schreibet +15−13; diese Ziffer zwar Einheiten von einerley Art bedeuten können, 15 Thaler zum Exempel und 13 Thaler, aber solche, welche durch anderweitige Bestimmungen

einander dergestalt zuwider sind, daß die kleinere Zahl so viele Einheiten der größern aufhebet und in nichts verwandelt, als sie deren selbst enthält. Dergleichen sind 15 Rthl. Einnahme, 13 Thaler Ausgabe, oder 15 Thaler Ausgabe, 13 Thaler Einnahme, wie auch 15 Meilen Weges vor sich, 13 Meilen zurück, oder 15 Meilen zurück, 13 vor sich, und dergleichen. Eben dieses ist auch auf die Buchstaben oder andere Zeichen anzuwenden, womit die Zahlen oder andere Größen, als Linien, Oberflächen und Cörper bezeichnet werden. Es bedeuten $+a, -a$ Größen von einerley Art, die einander zwar gleich, aber dergestalt zuwider sind, daß $+a$ mit $-a$ zusammen nicht $2a$ giebt, wie geschehen würde, wenn sie einander nicht zuwider wären; sondern es ist $+a$ mit $-a$ eigentlich gar nichts. Eben so ist $+3a-a$ nicht mehr als $+2a$, und $+3a-5a$ giebt $-2a$. Denn es wird durch das kleinere nur ein Theil des größern aufgehoben, welcher dem kleinern gleich ist, und der Ueberschuß ist allezeit von der Art des größern. Eben so ist $a^n-a^n=0$, $3a^n-2a^n=a^n$, und $3a^n-5a^n=-2a^n$. Wie auch $5\sqrt{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$. Denn es ist das gezeigte richtig, von was Art auch im übrigen die Größen seyn mögen, wenn nur die Größen, deren eine mit + bezeichnet ist, nicht von einer andern Art sind, als diejenigen, vor deren Zeichen — stehet.

§. 68. Wenn vor dem Zeichen einer Größe weder + noch — stehet, so kan man allezeit vor dasselbe + setzen, weil dasselbe im Anfang gemeiniglich nie geschrieben wird. Und die Einheit stellet man sich allezeit als mit + bezeichnet vor, außer wenn besondere Umstände ein anders erfordern. Man siehet leicht, daß dieses etwas willkührliches ist.

Vereinigung der Zahlen so durch Buchstaben angezeiget werden, und deren Subtraction.

§. 69. Hieraus ist alsobald zu begreifen, wie man die Zahlen vereinigen müsse, welche durch Buchstaben bedeutet werden, vor welchen diese Zeichen + und — stehen, welche Arbeit man gewisser maßen als eine Addition ansehen kan, und auch also nennet. Gesetzt, man habe $5a-3b+2c$, und noch über dieses $3a+2b-c$, wie viel macht dieses zusammen? Die Antwort ist ungemein leicht: es machet, $5a-3b+2c+3a+2b-c$, oder in einer andern Ordnung $5a+3a-3b+2b+2c-c$, denn man siehet sogleich, das an der Ordnung hier nichts gelegen sey. Man siehet aber auch, daß man eben dieses kürzer ausdrücken könne. Denn $5a+3a$ ist eigent-

gentlich so viel als $8a$, und $-3b+2b$ ist $-b$, eben so ist $2c-c=c$. Man kan also kurz sagen, daß alle die vorgelegte Größen mit einander vereiniget oder zusammen gesetzet, diese bringen $8a-b+c$. Und man erhält diese Verkürzung, wenn, nachdem man die Größen mit ihren Zeichen zusammen gesetzet hat, man alle diejenigen weglässet, welche einander gleich sind, und wegen der widrigen Zeichen + und — einander aufheben, diejenigen aber zusammen zehlet, welche von einerley Art sind, und, weil sie mit einerley Zeichen + oder — bezeichnet sind, einander vermehren.

§. 70. Es kan hierinn die anderweitige Bezeichnung nichts ändern. Als $3a^3-5a^2+b^2+2c$ mit $a^3-a^2-2b^2-3c$ zusammen giebt $3a^3+a^3-5a^2-a^2+b^2-2b^2+2c-3c$. Das ist, wenn man dasjenige weglässet, so einander vernichtet, und die gleichen Größen, welche einander nicht zuwider sind, zusammen setzet, $4a^3-6a^2-b^2+2c-3c$. Wenn man diese Exempel erweget, so wird man mit geringem Nachsinnen alles dasjenige aus demselben einsehen, was bey dieser Sache zu sagen ist.

§. 71. Mit der Subtraction hat es eben so wenig Schwierigkeit. Es wird hier eine Zahl A gegeben, zusamt einer andern B, und eine neue Zahl gesucht, welche mit der B vereinget, die A wieder heraus bringt. Man siehet leicht, daß diese keine andere seyn könne, als A—B. Denn setzt man zu derselben die B, so komt A—B+B, das ist A. Und so ist es in allen Fällen. Es sey $3a+2b-c$ gegeben, und man sol von demselben $2a-b+e$ wegnehmen: so verändere man nur die Zeichen desjenigen, so man von dem erstern abziehen sol, indem man an statt + setzet —, und an statt — das gegenseitige +, und mache dadurch aus demselben $-2a+b-e$, vereinige aber sodann XIII, 69. diese letzteren Größen mit denjenigen, von welchen man subtrahiren solte; so ist die Subtraction geschehen, und der Unterschied ist $3a+2b-c-2a+b-e$, das ist kurz $a+3b-c-e$. Denn wenn man zu $3a+2b-c-2a+b-e$ wieder dasjenige, dessen Zeichen man verkehret hat, hinzu setzet, nemlich $2a-b+e$, so muß allerdings wieder $3a+2b-c$ kommen, welches im Anfang da war. Uebrigens ist, was bey der Addition gesagt worden ist, auch hier anzuwenden. Wenn von $3a^3+2b^2-7b+c$ zu subtrahiren ist $2a^3-a^2+5b+c$, so wird dadurch erhalten $3a^3+2b^2-7b+c-2a^3+a^2-5b-c$, das ist kurz $a^3+a^2+2b^2-12b$, und so in allen dergleichen Fällen. Nemlich auch hier ist es einerley wie die Zahlen ausgedrückt sind, auf welche sich die Zeichen + und — beziehen.

Die

Die Producte aus zusammen gesetzten Factoren durch Buchstaben auszudrücken.

§. 72. Was die Multiplication anlangt, so haben wir bereits XIII, 50. erwehnet, daß das Product, dessen Factore man sich unter den Buchstaben a, b vorstellet, kurz ausgedrücket werde, indem man diese Buchstaben unmittelbar an einander setzet, also, ab. Es ist aber noch die Frage übrig, welches von den Zeichen +, — diesem Producte müsse vorgesetzt werden, wenn einer oder der andere Factor a, b, dieses oder jenes dieser Zeichen vor sich hat. Wenn wir auf den Grund der Multiplication zurück gehen, werden wir diese Frage ohne Weitläuftigkeit beantworten können.

§. 73. Man kan I, 82. sich eine jede Multiplication als eine Erfindung der vierten Proportionalzahl zu drey gegebenen vorstellen, deren erstere die Einheit ist, und die zweyte und dritte die gegebene Zahlen, diejenigen zum Exempel, welche wir uns unter a und b vorstellen. Es kan die Einheit eben so wie eine jede andere Zahl entweder mit + oder mit — bezeichnet seyn; ordentlicher Weise aber, und wenn man Freyheit hat dieses oder jenes anzunehmen, bezeichnet man die Einheit allezeit mit +, oder man nimmet sie von der Art derjenigen Dinge an, welche man sich als positiv vorstellet, I, 77. und so ist es auch bey der gegenwärtigen Proportion. Man könte bey derselben die Einheit allezeit mit — bezeichnen, oder bald mit +, bald mit —. Allein dieses würde unnöthige Weitläuftigkeit geben, und zu nichts nutzen, als uns mit einer Menge von Regeln zu überhäufen, deren man gar wohl entbehren kan. Da aber ein jeder von den Factoren a und b jedes der zwey Zeichen haben kan, von welchen die Rede ist, so siehet man, daß die Frage, welche wir zu entscheiden haben, diese ist: man stellet sich die Proportion $1 : a = b : ab$ vor, und wil wissen, was das vierte Glied derselben so durch ab bedeutet wird, vor ein Zeichen, + nemlich oder —, haben werde, wenn das zweyte a, wie auch das dritte b das erstere oder das andere dieser Zeichen hat. Die Größe nemlich dieses vierten Gliedes wird als bekant angenommen, weil man es aus denen Gliedern a und b, die als gegeben betrachtet werden, allezeit finden kan, und es ist bloß die Frage, ob dasselbe positiv oder negativ seyn werde. Es wird nemlich nunmehro bey der Proportion nicht allein auf die Größe der Glieder, sondern auch auf die Beschaffenheit derselben gesehen, welche die Zeichen + und — ausdrücken.

§. 74. Die Fälle, welche hier vorkommen können, sind diese viere:

$$1 : +a = +b : \text{---} \; ab$$
$$1 : +a = -b : \text{---} \; ab$$
$$1 : -a = +b : \text{---} \; ab$$
$$1 : -a = -b : \text{---} \; ab.$$

Es kan nemlich a entweder das Zeichen + oder das Zeichen — haben, und in einem jeden dieser Fälle ist b wieder entweder mit + oder mit — bezeichnet. In dem ersten Fall nun siehet man gar leicht ein, daß das Product ab ebenfals mit + bezeichnet seyn muß. Wenn man sagt: wie 1 Thaler Einnahme sich zu 5 Thalern Einnahme verhält: so verhalten sich sieben Thaler Einnahme zu 35 Thalern, so sind diese 35 Thaler gewiß keine Ausgabe, oder Schuld oder etwas dergleichen. Eben so leicht ist auch der andere Fall zu beantworten. Es ist in demselben das Product mit — zu bezeichnen, und daß dieses seyn müsse, siehet man wieder bloß aus einem Exempel. Wie sich 1 Thaler Einnahme zu 5 Thalern Einnahme verhält, so verhalten sich 7 Thaler Schuld, zu 35 Thalern Schuld, nicht aber zu 35 Thalern Einnahme, denn sonst wäre das vierte Glied aus dem dritten nicht so entstanden, wie das zweyte aus dem ersten entstanden ist.

§. 75. Will man aber eine etwas tiefere Einsicht in diese Dinge haben, so hat man zu betrachten, daß in dem Fall, wenn der Factor a mit + bezeichnet ist, welches Zeichen auch die Einheit hat, die Größe a entstehe, indem die Einheit nach und nach wächset, oder dergestalt abnimt, daß doch allezeit etwas übrig bleibe, und die Größe, welche durch dieses Wachsthum oder Abnehmen der Einheit entstanden ist, ist eben diejenige, welche a bedeutet. Fünf Thaler Einnahme entstehen, indem die Einnahme von einem Thaler wächset, und 5 Groschen Einnahme entstehen, indem die Einnahme eines Thalers abnimt: aber so, daß sie nicht gar vernichtet wird. Eben so aber wie a aus 1 entstehet, muß auch das Product ab aus dem andern Factor b entstehen. Es muß also derselbe ebenfals wachsen oder abnehmen, wie die Einheit gewachsen oder abgenommen, ohne daß er gar verschwinde. Wächset aber b auf die Art beständig, oder nimt es bis auf eine gewisse Größe ab, und man bezeichnet die Größe, welche durch dieses Wachsthum oder Abnehmen entstanden ist mit ab; so ist dieses ab gewiß von der Art des b, und folgends hat ab das Zeichen + wenn b dieses Zeichen hat, und ab ist mit — zu bezeichnen, wenn vor b dieses Zeichen stehet. Eine Schuld welche dreymal größer oder dreymal kleiner worden, ist noch allezeit eine Schuld, gleichwie das Vermögen Vermögen bleibt,

es

es mag wachsen oder abnehmen wie es will, wenn es nur nicht so sehr abnimt, daß es gar nichts wird.

§. 76. Die zween letztern Fälle scheinen eine etwas größere Schwierigkeit zu haben: doch ist die Betrachtung, welche wir eben gemacht haben, hinlänglich dieselbe bald zu heben. Will man sich die Verhältniß $1:-a$ vorstellen, so muß man betrachten wie $-a$ aus der Einheit entstehe, welches wir in einem Exempel am besten werden zeigen können, weil uns sonst die Worte mangeln dürften, uns recht deutlich auszudrücken. Ich gehe eine Meile von Morgen gegen Abend. Diese Meile ist 1, und ich kan mir sie als positiv vorstellen. Um diese Meile bin ich nunmehro von dem Ort gegen Abend zu entfernt, von welchem ich ausgegangen bin. Ich kan noch weiter nach Abend fortgehen, und wenn ich mich endlich aufhalte, so kan der Weg, welchen ich auf die Art zurück geleget habe, und meine ganze Entfernung von dem Orte, aus welchem ich ausgegangen bin, durch a bedeutet werden. Alsdann hat dieses a das Zeichen $+$, weil es zu der Einheit hinzu gesetzt dieselbe vermehret. Gehe ich nun auf meinen Weg zurück, und nähere mich also wieder dem Ort, aus welchem ich gegangen bin beständig, so wird a immer kleiner und kleiner: gleichwohl behält es das Zeichen $+$, bis ich endlich wieder daselbst angelanget bin, wo ich ausgegangen war. So bald dieses geschehen ist, verschwindet a, oder meine Entfernung von diesem Ort nach Abend zu, ganz und gar, und wird zu nichts. Gehe ich nun auf eben den Wege fort, so entferne ich mich wieder von demselben Orte, aber gegen Morgen, und die Größe dieser Entfernung kan ebenfals durch den Buchstaben a ausgedrücket werden. Auch ist nicht nöthig etwas weiter hinzu zu setzen, so lange man bloß auf diese Entfernung siehet. Will man aber auch darauf Acht haben, daß dieser Weg ein Rückweg ist, von Abend gegen Morgen, welcher den vorigen von Morgen gegen Abend vermindert, indem er selbst wächst, und ihn endlich gar vernichtet, mich aber, wenn er noch größer wird, von meinem ersten Ort nach Morgen entfernet; so muß dem Buchstaben a noch das Zeichen $-$ vorgesetzet werden. Es entstehet also allezeit $-a$ aus der 1, indem die Einheit nach und nach vernichtet wird, und indem diejenige Größe, welche die Einheit vernichtet hat, so dann auf eben die Art noch weiter wächst.

§. 77. Ist nun also die Verhältniß $1:-a$ gegeben, und man sol aus b die Größe ab eben so machen, wie $-a$ aus 1 wird, so muß b, von was Art sie auch seyn mag, immer abnehmen bis es endlich nichts wird, und die Größe, welche sie dergestalt vernichtet, muß von dar an noch immer

mer zunehmen bis die Verhältniß $ab : b$ der Verhältniß $a : 1$ gleich werde. Hieraus aber siehet man, daß wenn b das Zeichen + hat, wie in dem dritten Falle, ab das Zeichen — haben werde. Denn diejenige Größe welche $+b$ vernichten soll, muß nothwendig das Zeichen — haben, und von der Art ist in diesem Fall ab. Hat aber b das Zeichen — wie in dem vierten Falle; so ist die Größe, welche es vernichten kan, von der Art derjenigen, die mit + bezeichnet sind. Dieses Zeichen muß also auch ab haben, weil ab von der Art derjenigen Größen ist, so die b vernichten. Wie sich ein Thaler Vermögen verhält zu 5 Thaler Schuld, so verhalten sich 7 Thaler Vermögen zu 35 Thaler Schuld. Denn gleichwie 5 Thaler Schuld aus einem Thaler Vermögen entstehen, wenn man sechs mal so viel anwendet als man im Vermögen hat; eben so entstehen 35 Thaler Schuld aus 7 Thaler Vermögen, weil derjenige der 7 Thaler besitzt, wieder sechs mal so viel anwendet, wenn er sein Vermögen vernichtet, und noch über das 35 Thaler Schulden auf sich ladet. Eben so verhält sich auch ein Weg von 7 Meilen vorwärts, zu einem Rückweg von 35 Meilen; und so ist es auch in dem folgenden Exempel. Wie sich ein Thaler Vermögen zu 5 Thaler Schuld verhält, so verhält sich 7 Thaler Schuld zu 35 Thaler Vermögen. Denn gleichwie derjenige, welcher 1 Thaler hat, sechs mal so viel anwenden muß, bis er 5 Thaler schuldig wird: so muß auch derjenige, welcher 7 Thaler schuldig ist, sechs mal so viel erwerben, bis er seine Schuld tilgen kan, und noch über das 35 Thaler reich wird.

§. 78. Nehmen wir nun dieses alles zusammen, so sehen wir, daß in den gegebenen vier Fällen die Zeichen so stehen müssen.

$$1 : +a = +b : +ab$$
$$1 : +a = -b : -ab$$
$$1 : -a = +b : -ab$$
$$1 : -a = -b : +ab.$$

In dem ersten und letzten dieser Fälle haben die beyden Factorn a und b einerley Zeichen, + in dem ersten, und — in dem letzten; und in beyden Fällen ist das Product ab mit + bezeichnet. In dem zweyten und dritten Fall aber haben die beyde Factore verschiedene Zeichen, und das Product hat —. Man muß demnach diese Regeln fest setzen: das Product hat das Zeichen +; wenn beyde Factore einerley Zeichen haben, und das Product hat das Zeichen —, wenn die beyden Factore verschiedentlich bezeichnet sind.

§. 79. Man kan dieses gar leicht umkehren und schließen, daß wenn das

das Product das Zeichen + hat, die zween Factore desselben ohnmöglich verschiedene Zeichen haben können. Denn wäre dieses, so hätte das Product das Zeichen —. Und durch einen eben dergleichen Schluß siehet man, daß wenn das Product das Zeichen — hat, die beyden Factore nicht einerley Zeichen haben können, weil sonst das Product das Zeichen + haben müste. Dieses kan uns dienen, wenn wir die Producte in ihre Factore zu zerfällen haben. Nur müssen wir dabey bemerken, daß die Factore von $+ab$ sowohl $+a, +b$ als $-a, -b$ seyn können, und das von $-ab$ nicht nur $-a$ und $+b$ sondern auch $+a$ und $-b$ Factore abgeben können. Daß man also ein jedes Product auf zweyerley Art in zween Factore zerfällen kan, und man in diesem Stücke Freyheit hat. Selbst diese Freyheit, welche die Sache erleichtert, könte uns anstößig seyn, wenn wir sie nicht zum Voraus bemerket hätten.

§. 80. Ist nun einer der Factore aus zween Theilen zusammen gesetzet, es mögen dieselben Theile mit + oder mit — bezeichnet seyn, wie man will; so bestehet das Product aus den Producten dieser Theile, und dem andern Factor: und die Zeichen der Theile dieser Producte sind aus demjenigen, so gewiesen worden ist, abzunehmen. Es sey erstlich $+a+b$ durch $+c$ zu multipliciren, so setze man, demjenigen, so XIII, 73. gewiesen worden ist, gemäß, $1:+c=+a:+ca$,

$1:+c=+b:+cb$, und nehme die Summe der dritten und vierten Glieder dieser Proportionen, so erhält man $1:+c=+a+b:+ca+cb$; VI, 105. Woraus man siehet, daß allerdings $+ca+cb$ das rechte Product aus den Factoren $+c$ und $+a+b$, sey. Setzet man aber in dieser Proportion an statt + vor das zweyte Glied das gegenseitige Zeichen —, so muß auch das Zeichen des vierten Gliedes — werden, XIII, 78. und es wird dadurch die Proportion in die nachfolgende verwandelt: $1:-c=+a+b:-ca-cb$. Woraus man siehet, daß das Product aus den zwey Factoren $-c$ und $+a+b$ sey $-ca-cb$. Und wenn man das Zeichen des zweyten Gliedes, + stehen lässet, verändert aber die Zeichen des dritten; so müssen wieder auch die Zeichen des vierten Gliedes verändert werden. Es wird dadurch $1:+c=-a-b:-ca-cb$. Das Product also aus $+c$ und $-a-b$ ist $-ca-cb$. Endlich, wenn man in dieser letzten Proportion auch das Zeichen des zweyten Gliedes verändert und an statt desselben $-c$ setzet, so muß wieder auch das Zeichen des vierten Gliedes verändert werden. Die Proportion wird dadurch $1:-c=-a-b:+ca+cb$, und das Product aus $-c$ und $-a-b$ ist $+ca+cb$.

§. 81. Es sey zweytens $a-b$ durch c zu multipliciren, und a sey grö-

ßer als b: so ist auch ca größer als cb, und $a-b$, sowohl als $ca-cb$ ist von der Art derjenigen Größe, die mit + bezeichnet werden, $-a+b$ aber, und $-ca+cb$ sind von der Art derjenigen, vor welchem das Zeichen — stehet. Setzet man nun wieder.

$$1:+c=+a:+ca,$$

und $1:+c=+b:+cb$, nimmet alsdenn den Unterschied der letztern Glieder dieser Proportionen, a, b, wie auch ca, cb, und bringet dadurch die Proportion $1:+c=+a-b:+ca-cb$ heraus; so siehet man, daß $+ca-cb$ das richtige Product, aus den Factoren c und $a-b$, sey. Verwechselt man aber wiederum das Zeichen des zweyten Gliedes + mit dem gegenseitigen —, so muß auch das Zeichen des letzten Gliedes dergestalt verwechselt werden; dieses Glied wird also $-ca+cb$. Demnach ist das Product aus $-c$ und $+a-b$ dieses $-ca+cb$. Lässet man aber das Zeichen des zweyten Gliedes stehen, und verwechselt die Zeichen des dritten Gliedes, indem man aus demselben $-a+b$ machet, so müssen wieder die Zeichen des vierten Gliedes ebenfals gewechselt werden; und es ist demnach das Product aus $+c$ und $-a+b$ wieder $-ca+cb$. Verwechselt man endlich in dieser letzten Proportion $1:+c=-a+b:-ca+cb$ auch das Zeichen des zweyten Gliedes, so müssen die Zeichen des vierten nochmals gewechselt werden. Es wird also dieses vierte Glied $+ca-cb$. Und dieses ist das Product aus den Factoren $-c$ und $-a+b$.

§. 82. Hieraus fließen die Producte, welche entstehen, wenn man einen aus zweyen oder mehr Theilen zusammen gesetzten Factor durch einen andern dergleichen Factor multipliciren sol, ohne große Weitläuftigkeit. Man muß dergleichen Producte heraus zu bringen, einen jeden Theil des einen Factors durch einen jeden Theil des andern multipliciren, und diese Producte vermittelst der Zeichen zusammen hängen, welche durch die Multiplication der Theile heraus kommen. Es sey $a-b+c$ durch A zu multipliciren, so wird das Product, wie wir gesehen haben, $Aa-Ab+Ac$. Ist nun $A=a-d$, und also auch der zweyte Factor zusammen gesetzt, so ist

$$Aa = aa - ad$$
$$-Ab = -ab+bd$$
$$+Ac = +ac-cd, \text{ folgends,}$$
$$Aa-Ab+Ac = aa-ad-ab+bd+ac-cd.$$

Dieses ist also das Product aus $a-b+c$ und $a-d$.

§. 83. Nach eben dieser Regel bringt man das Product aus $a^2-2ab+3bc$ und $2a+b-3c$ heraus. Wobey zu merken ist, daß gemeiniglich die Zahlen, welche in den Factoren vorkommen, würklich in einander multipli-

ipliciret, und nicht, wie die Buchstaben, nur neben einander gesetzt werden. Das Product aber aus diesen Zahlen wird vor die Buchstaben geschrieben. Das gegenwärtige Product ist:

$$2a \times (a^2 - 2ab + 3bc)$$
$$+b \times (a^2 - 2ab + 3bc)$$
$$-3c \times (a^2 - 2ab + 3bc)$$

bey welcher und dergleichen Zeichnungen die Klammern () bedeuten, daß alle das, so in dieselbe eingeschlossen ist, und folgends hier das Ganze $a^2 - 2ab + 3bc$, durch dasjenige zu multipliciren sey, so vor demselben stehet, und mit demselben vermittelst des Zeichens der Multiplication verknüpfet ist, und nicht etwa bloß der erste Theil desselben als a^2. Multipliciret man aber würklich, so wird

$$2a \times (a^2 - 2ab + 3bc) = 2a^3 - 4a^2b + 6abc$$
$$+b \times (a^2 - 2ab + 3bc) = a^2b - 2ab^2 + 3b^2c.$$
$$-3c \times (a^2 - 2ab + 3bc) = -3a^2c + 6abc - 9bc^2.$$

Und dieses ist das gesuchte Product, welches man kürzer schreiben kan, wenn man dasjenige weglässet, so einander aufhebet, und zusammen zehlet was zusammen gezehlet werden kan. Thut man dieses, so wird das gesuchte Product nachfolgender maßen ausgedrückt: $2a^3 - 3a^2b + 12abc - 2ab^2 + 3b^2c - 3a^2c - 9bc^2$.

§. 84. Man siehet bloß hieraus, daß es nicht eben leicht sey hinwiederum die zween Factore eines gegebenen Products zu finden. Derjenige, welcher die Multiplication nicht erst selbst verrichtet hat, wird nicht leicht errathen, daß die Factore des Products $2a^3 - 3a^2b + 12abc - 2ab^2 + 3b^2c - 3a^2c - 9bc^2$, diese zween $a^2 - 2ab + 3bc$ und $2a + b - 3c$ sind, aus welchen wir es herausgebracht haben. Doch kan einiges Nachsinnen, welches sich auf die Regeln der Multiplication gründet, die wir eben gegeben haben, uns in den Stand setzen, die Factore eines gegebenen Products öfters zu errathen, und die Probe kan bald weisen, ob wir in Annehmung derselben uns nicht verstoßen haben. Diese Arbeit, da man aus einem Product und aus einem gegebenen oder angenommenen Factor desselben den andern findet, nennet man hier eine Division.

§. 85. Es sey das Product $a^2 - b^2$ gegeben, man sol die Factore desselben nicht sowohl finden als errathen. Setzet man daß dieselben seyn $a + b$ und $a - b$, und multipliciret diese Zahlen in einander, so wird das Product $a \times (a - b) + b \times (a - b)$ das ist, $aa - ab + ab - bb$, oder kürzer $aa - bb$. Es sind also die Factore $a + b$ und $a - b$ richtig angenommen worden, weil durch die Multiplication aus denselben das gegebene Product $aa - bb$ heraus komt. Dieses Product ist der Unterschied der Qua-

drat-

drate oder der zweyten Dignitäten von a und b, und man siehet hieraus, daß wenn man die Summe zweyer Zahlen $a+b$ in ihren Unterschied $a-b$ multiplicirt, das Product dem Unterschied der Quadrate aus eben den Zahlen a und b gleich werde.

§. 86. Wir sehen in diesem Exempel, wie leicht man vermittelst des Gebrauchs der bequemen Zeichen, welche wir, so weit wir sie im nachfolgenden gebrauchen werden, zu erklären bemühet gewesen sind, und vermittelst der Verknüpfung derselben, die schönste und nützlichste Sätze heraus bringen könne, wenn man ihrer nur erst etwas gewohnet ist. Es wird sich aber dieses in dem folgenden viel deutlicher zeigen, denn wir können uns nunmehro zu den Abhandlungen wenden, welche wir uns hauptsächlich vorgenommen haben. Wir werden bey der Betrachtung der so genanten Zahlreihen anfangen müssen.

Zahlreihen. Die Arithmetische.

§. 87. Man nennet aber eine Zahlreihe oder eine **Progression**, eine Menge von Zahlen, welche nach einem gewissen beliebig angenommenen Gesetz in unveränderter Ordnung auf einander folgen. Es sind dergleichen Gesetze viele, und man kan sich deren immer noch mehrere vorstellen. Also giebt es auch unendliche Arten von Zahlreihen. Wir werden uns begnügen lassen, deren zwo zu betrachten, unter welchen insonderheit die letztere von unbeschreiblichen Nutzen ist. Diese sind, die Arithmetische und die Geometrische Reihe.

§. 88. Will man eine **Arithmerische Reihe** machen, so fange man bey einer beliebigen Zahl an, 5, zu dieser Zahl setze man eine andere beliebige Zahl hinzu, oder nehme sie von derselben weg, diese mag 2 seyn. Auf die Art bekomt man das zweyte Glied $5+2=7$, oder wenn man sich der Subtraction bedienet $5-2=3$. Aus diesem zweyten Glied wird nun das dritte auf eben die Art gemacht, wie das zweyte aus dem ersten gemacht worden ist. Man setzet eben die Zahl 2 zu dem zweyten Glied 7 hinzu, wenn man sich im Anfang der Addition bedienet, oder man subtrahiret diese Zahl 2 von dem zweyten Glied 3, wenn man zuerst die Subtraction gebrauchet hat. Auf eben die Art mache man aus dem dritten Glied das vierte, aus dem vierten das fünfte, und so ferner. Die erstere der Arithmetischen Reihen, welche wir angefangen haben, wird dadurch diese:

5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 und so fort.

§. 89.

§. 89. Man siehet bald daß man eine solche Reihe auch nach forne zu fortsetzen könne, wenn man eben die Zahl 2, welche man addiret hatte, aus dem kleinern Gliede das nächste Größere zu erhalten, von dem größern abziehet, und also das nächste Kleinere heraus bringt. Es wird also diese Reihe von 5 zurück folgender maßen stehen:

$$-5, -3, -1, 1, 3, 5.$$

Und wenn man dieses zu dem vorigen hinzu setzet, so bekomt man die verlängerte Reihe:

$$-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17.$$

Woraus man siehet, daß eine Arithmetische Reihe vor sich und zurück immer weiter fortgesetzet werden könne, weil uns nichts zwinget dieselbe jemals zu enden, und daß die Glieder derselben von der 0, welche man sich in der gegenwärtigen Reihe zwischen -1 und $+1$ vorstellen muß, zu beyden Seiten beständig wachsen, doch so, daß die Glieder, welche an der einen Seite der 0 stehen, alle mit dem Zeichen $+$ versehen sind, und die gegenseitige das Zeichen $-$ haben.

§. 90. Ferner aber schließen wir eben hieraus, daß die zweyte Art, eine Arithmetische Reihe heraus zu bringen, von der ersten im Grunde nicht verschieden sey, und daß eben die Reihe durch die beständige Addition einerley Zahl sowohl als durch die beständige Subtraction heraus gebracht werden könne, indem, wenn man sich, an statt der Addition, der Subtraction bedienet, bloß die Glieder in verkehrter Ordnung zu stehen kommen, wie in dem gegebenen Exempel augenscheinlich ist.

§. 91. Will man indessen eine Arithmetische Reihe schreiben, so muß man sie irgendwo anfangen, ob sie zwar ihrer Natur nach, weder Anfang noch Ende hat. Man stelle sich das erste Glied einer solchen Reihe unter a vor, und der Unterschied zweyer unmittelbar auf einander folgenden Glieder derselben sey d, so wird das zweyte Glied derselben $a+d$, und das dritte $a+d+d$, das ist, $a+2d$, und das vierte $a+3d$, die Reihe also stehet folgender gestalt:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d,$$

und so fort. Gehet aber die Reihe unterwärts, das ist, ist das erste Glied größer als das zweyte, und das zweyte größer als das dritte, so kan man die Reihe am deutlichsten bezeichnen, wenn man setzet:

$$a, a-d, a-2d, a-3d, a-4d, a-5d$$

und so fort.

§. 92. Man siehet hieraus sogleich wie man aus dem ersten Glied einer Reihe, und aus dem Unterschied der Glieder, ein jedes Glied finden

sol, dessen Entfernung von dem ersten gegeben ist. Gesetzt, wir wollen das fünfte Glied von dem ersten finden, so ist dasselbe $a+5d$; wenn die Reihe aufsteigt, und $a-5d$ wenn sie niedersteigt. Man muß also in dem ersten Fall den Unterschied fünfmal genommen, das ist $5d$, zu dem ersten Gliede a addiren: und in dem zweyten Fall von demselben subtrahiren, wenn man das fünfte Glied haben wil. So ist es in allen Fällen, und wenn also m überhaupt bedeutet, um wie viel Glieder dasjenige von dem ersten entfernet sey, welches man suchet, so ist das Glied, welches man suchet, $a+md$, oder $a-md$, nachdem die Reihe auf oder nieder steiget.

§. 93. Die Zahl m ist allezeit um eins kleiner als die Zahl aller Glieder der Reihe, zu welcher man das letzte suchet. Denn das zweyte Glied der Reihe $a+d$ ist das erste von a, das dritte ist das zweyte von a, und das vierte ist das dritte von a, und so fort. Wenn demnach die Zahl aller Glieder der Reihe durch n bedeutet wird, so ist $n-1=m$, und $n=m+1$. Es ist gar leicht in allen Fällen die eine dieser Zahlen an die Stelle der andern zu gebrauchen.

§. 94. Da nun also bey den Bedeutungen, welche wir angenommen und beständig in dieser Abhandlung gebrauchen werden $a+md$ das letzte Glied einer aufsteigenden Arithmetischen Reihe bedeutet, so kan $a+md-d$ nichts anders bedeuten, als das nächste Glied vor dem letzten, weil dieses komt, wenn von dem letzten Glied der Unterschied d abgezogen wird, und das Glied vor diesen, oder das zweyte von dem letzten ist $a+md-2d$, das dritte von dem letzten $a+md-3d$, und so fort. Daß also, wenn man nur die erstern und die letztern Glieder einer solchen Reihe bezeichnen will, mit Auslassung der mittlern, man so schreiben muß:

$$a, a+d, a+2d, \ldots\ldots, a+md-2d, a+md-d, a+md.$$

Und eben dieses kan auch eine niedersteigende Reihe bedeuten, wenn man das letzte Glied vor das erste hält, und die Glieder zurück zehlet.

§. 95. Hieraus aber siehet man sogleich in einem Blick, das in einer jeden Arithmetischen Reihe die Summe des ersten und des letzten Gliedes so groß seyn müsse, als die Summe des zweyten und des nächsten an dem letzten, oder die Summe des dritten und des zweyten von dem letzten: ja daß überhaupt die Summe jeder zwey Glieder, die von den äußersten Gliedern der Reihe gleichweit entfernet sind, einer jeden andern dergleichen Summe gleich sind. Denn die Summe des ersten und letzten Gliedes ist $a+a+md=2a+md$, und die Summe des zweyten und des nächsten an dem letzten ist $a+d+a+md-d=2a+md$, und also so groß als die erstere. Die Summe der Glieder, welche zunächst auf diese folgen, ist

$a+3d$

$a+3d+a+md-3d=2a+md$, wie vorher. Man siehet, daß diese Summen deswegen gleich werden, weil dasjenige, was dem Gliede, welches von dem letzten zurück gezehlet worden, an $a+mb$ fehlet, durch dasjenige ersetzet wird, so das Glied, welches man von a an vor sich gezehlet hat, über das a enthält. Eine kleine Ueberlegung desjenigen, so gezeiget worden ist, machet dieses klärer als viele Worte.

§. 96. Wenn man eine Arithmetische Reihe von dem ersten Glied nach dem letzten, und wieder von dem letzten nach dem ersten, fortführet, so daß man wechselsweise einem jeden Theil der Reihe ein Glied zusetzet; und also auf der einen Seite immer so viele Glieder machet, als auf der andern: so muß die Reihe endlich voll werden; und zwar kan dieses auf zweyerley Art geschehen. Es kan erstlich das letzte Glied der Reihe, welche von a anfängt und beständig aufsteiget, nach und nach so groß werden, daß es unmittelbar vor den ersten Glied des andern Theils der Reihe, welchen man von dem letzten Glied $a+md$ zurück geführet hat, vorher gehe, wie dieses geschiehet, wenn in der Reihe, die wir zum Exempel angenommen haben, m die Zahl 5 bedeutet, da dann die ganze Reihe sechs Glieder bekomt. In diesem Fall verwandelt sich diese Reihe in die nachfolgende:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots\ a+3d,\ a+4d,\ a+5d,$$

und das erste Glied des letztern Theils derselben $a+3d$ folget unmittelbar auf das letzte Glied des erstern Theils $a+2d$.

§. 97. In einer dergleichen Reihe ist die Zahl aller Glieder nothwendig gerade, denn es stehen deren so viel in der einen Helfte von dem ersten Glied an, als in der andern Helfte stehen, die man von dem letzten Glied zurück geführet hat. Und wenn man demnach die Summe des ersten und letzten Gliedes, und aller übrigen machet, die von dem ersten Glied gleichweit entfernet sind, so bekomt man halb so viel dergleichen Summen, als Glieder in der ganzen Reihe sind. In unserm Exempel, da der Glieder an der Zahl sechse sind, sind der Summen drey. Da diese Summen einander gleich sind, darf man dieselbe nur durch die Zahl derselben, das ist, durch die Helfte der Zahl aller Glieder in der Reihe multipliciren, so bekomt man die Summe aller dieser Summen aus zwey und zwey Gliedern der Reihe, das ist, die Summe aller Glieder der ganzen Reihe. Und dieses ist die gemeine Regel, welche die Summen der Glieder Arithmetischer Reihen zu finden angegeben wird, deren Richtigkeit wir dergestalt in den Umständen gezeiget haben, wenn die Zahl der Glieder gerade ist. Man setzet das erste Glied der Reihe zu dem letzten, und multipliciret diese Summe durch die Helfte der Zahl aller Glieder, so hat man die Sum-

me aller Glieder der Reihe. Es sey zum Exempel das erste Glied einer Arithmetischen Reihe 5, und der Unterschied 3. Sind nun in dieser Reihe 12 Glieder, so wird das letzte $5+11\times3=38$: die Summe des ersten und letzten Gliedes ist demnach $5+38=43$; diese Summe durch die Helfte von 12, das ist, durch 6 multiplicirt, giebt 258, die Summe aller Glieder der Reihe.

§. 98. Es kan aber auch eine dergleichen Reihe, welche man von dem ersten Glied nach dem letzten, und zugleich von dem letzten nach dem ersten dergestalt fortgeführet hat, sich auf eine andere Art schließen, indem nemlich das letzte Glied der vordern Helfte selbst dem ersten Glied der hintern Helfte gleich wird. Dieses geschiehet allezeit, wenn m eine gerade Zahl bedeutet, und folgends die Zahl aller Glieder in der Reihe ungerade ist, wie in dem nachfolgenden Exempel:

$$a,\ a+d,\ a+2d\ \ldots\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,$$

da das letzte Glied der ersten Helfte $a+2d$, dem ersten Glied der zweyten Helfte gleich ist. In diesem Falle ist das zweymal stehende Glied, als hier $a+2d$, das mittelste unter allen: und weil alles dasjenige, so von den Summen zweyer Glieder erwiesen worden ist, die von dem äußersten gleich weit abstehen, auch hier zutreffen muß, so ist das mittlere Glied zweymal $2a+4d$ genommen, so groß als die Summe der äußern Glieder $a+a+4d$. Will man also die Summe aller Glieder der Reihe finden, so multiplicire man erstlich die Summe aller Glieder durch die Zahl m halb genommen, welche Zahl hier gerade, und um eines kleiner ist, als die Zahl aller Glieder, so erhält man die Summe aller Glieder, außer dem mittelsten: und wenn man zu dieser Summe noch das mittelste Glied hinzu setzet, so erhält man die Summe aller Glieder überhaupt.

§. 99. Stellet man sich diese Rechnungsart etwas genauer vor, so findet man, daß sie mit der vorigen im Grunde überein komme, und nach eben den Regeln verrichtet werden könne. Es sey die Summe des ersten und des letzten Gliedes einer dergleichen Reihe s; so ist das mittelste Glied derselben $\frac{1}{2}s$, weil dieses Glied gedoppelt, der gedachten Summe gleich ist. Die Summe aller Glieder der Reihe ist demnach $\frac{1}{2}ms+\frac{1}{2}s$, nach der Regel, die wir eben XIII, 98. gesehen haben, welches Product man auch so schreiben kan: $\frac{m+1}{2}\times s$. Denn wenn man die Summe s würklich durch $\frac{m+1}{2}$ oder, welches eben so viel ist, durch $\frac{m}{2}+\frac{1}{2}$ multipliciren wil, so

muß

muß man diese s sowohl durch $\frac{m}{2}$ als durch $\frac{1}{2}$ multipliciren, XIII, 81. Da- durch aber erhält man $\frac{1}{2}ms+\frac{1}{2}s$. Es drucket also $\frac{m+1}{2}\times s$ die Summe aller Glieder der Reihe aus. Bedeutet aber n noch die Zahl aller Glieder der Reihe, wie wir dieses gleich Anfangs angenommen haben; so ist $m+1=n$, und wenn man also das letztere an die Stelle des erstern schreibet, so wird die Summe aller Glieder der Reihe $\frac{n}{2}\times s$, das ist, die Summe aller Glieder wird auch nunmehro gefunden, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes s durch die Helfte der Zahl der Glieder $\frac{n}{2}$ multiplici- ret; wie man dieses thun muß, wenn die Zahl aller Glieder gerade ist, XIII, 97.

§. 100. Es sey zum Exempel die Reihe, deren Summe man finden sol, die nachfolgende 3, 5, 7 und so fort, bey welcher also $a=3$ und $d=2$, man sol die Summe von 13 Gliedern dieser Reihe finden, deren erstes die 3 ist; so ist $m=12$, und das letzte Glied $a+md$ ist $3+24=27$, fol- gends die Summe des ersten und des letzten Gliedes $3+27=30$; dieses durch $\frac{13}{2}$, als die Zahl aller Glieder, multipliciret, giebet $\frac{13\times 30}{2}=13\times 15=195$: dieses ist die Summe aller Glieder dieser Reihe.

§. 101. Wenn wir nochmals die Reihe betrachten, welche eine jede arithmetische Progression vorstellet,

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ a+5d,\ a+6d,$$

so sehen wir, daß in derselben der Unterschied eines jeden Gliedes von dem- jenigen, welches von jenem das zweyte ist, doppelt so groß sey, als der Un- terschied eben des Gliedes von dem nächst folgenden. Der Unterschied des ersten und dritten Gliedes ist $2d$, eben so groß ist auch der Unterschied des zweyten und des vierten, des dritten und des fünften Gliedes, und dieser Unterschied ist doppelt so groß als d, der Unterschied eines jeden Gliedes von dem nächst folgenden. Ziehet man aber ein nach Belieben angenom- menes Glied eben der Reihe von demjenigen ab, so in der dritten Stelle darauf folget, a von $a+3d$, oder $a+d$ von $a+4d$, so wird der Unterschied dreymal so groß als der einfache d, denn es bleibt nach diesem Abzuge $3d$. Auf eben die Art siehet man, daß, wenn man das nachfolgende Glied noch

um eine Stelle weiter von dem ersten nimmet, der Unterschied viermal so groß werden müsse, und so immer fort.

§. 102. Hieraus folget, daß, wenn man aus einer arithmetischen Reihe verschiedene auf einander folgende Glieder dergestalt ausziehet, daß zwischen jedem Paare dieser Glieder gleich viele Glieder der vorigen Reihe zurück bleiben, diese ausgezogene Glieder ebenfals eine dergleichen Reihe geben müssen. Lässet man zwischen jeden zwey Gliedern der vorigen Reihe zwey stehen, und nimt die übrigen, so bekomt man diese neue Progression

a, $a+3d$, $a+6d$, $a+9d$ und so ferner, in welcher der Unterschied jeder zwey Glieder, die unmittelbar auf einander folgen, dreymal so groß ist, als der Unterschied in der vorigen. Also kan man auch umgekehrt aus dieser Reihe wieder die vorige machen, wenn man den Unterschied zu der letztern $3d$ in drey gleiche Theile theilet, und diesen dritten Theil d vor den Unterschied nimt. Alsdenn wird die Reihe leicht vollständig geschrieben, wenn man von einem beliebig angenommenen Glied der letzten Reihe, als $a+3d$ anfängt, und den Unterschied d, zu demselben hinzu setzet, oder davon abziehet, wie dieses die Gesetze einer arithmetischen Reihe erfordern.

§. 103. Und überhaupt ist es leicht aus einer solchen Reihe eine andere zu machen, welche zwischen jeden zwey Gliedern, die den zwo Reihen gemeinschaftlich sind, und in der gegebenen Reihe unmittelbar auf einander folgen, so viele Glieder hat als man will. Es seyn 20 und 60 zwey Glieder, die in einer gewissen arithmetischen Reihe unmittelbar auf einander folgen. Diese Reihe wird eben dadurch gegeben: Denn das nächste Glied derselben ist 100, darauf folget 140, und so weiter. Man soll aber aus dieser Reihe eine andere machen, in welcher die Glieder 20 und 60 ebenfals vorkommen, aber so, daß zwischen denselben sieben, und also von dem ersten an bis an das letzte, dieses mitgerechnet, acht Glieder stehen. So nehme man den Unterschied der zwey gegebenen Glieder 20 und 60, welcher 40 ist, und theile ihn in acht gleiche Theile. Der Quotient 5 ist der Unterschied der gesuchten Reihe, und dieselbe gehet von 20 bis 60 also fort: 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, da allerdings von 20 bis zu dem Gliede 60 acht Glieder stehen. Auf diese Art kan man immer verfahren. Sind in einer arithmetischen Reihe die zwey Glieder a und b gegeben, die unmittelbar auf einander folgen, und man soll aus denselben eine andere machen, in welcher von a bis an b so viele Glieder stehen, als viele Einheiten die Zahl r hat, so mache man den Bruch $\frac{b-a}{r}$. Dieser ist

der

der Unterschied der Glieder zu der verlangten Reihe: und dieselbe wird also aus dem Gliede a und diesem Unterschied gar leicht gemacht. Es ist leicht eben das zu verrichten, wenn in der gegebenen Reihe die Glieder a und b nicht unmittelbar auf einander folgen: aber es ist nicht nöthig, daß wir uns dabey aufhalten.

Von den geometrischen Zahlreihen.

§. 104. Die zweyte Reihe, welche wir insonderheit zu betrachten haben, ist die geometrische. Sie wird wieder aus zwey Gliedern verfertiget, welche gegeben, oder nach Belieben angenommen seyn können. Aus diesen zwey Gliedern wird das dritte gemacht, wenn man demselben gegen das zweyte eben die Verhältniß giebet, welche das zweyte gegen das erste hat: so, daß das erste, das zweyte und das dritte Glied eine zusammenhangende oder stetige Proportion! ausmachen. Auf eben die Art wird aus dem dritten Glied das vierte. Man macht nemlich das vierte Glied so groß, daß das dritte Glied sich zu demselben verhalte, wie sich das erste zu dem zweyten verhält, und so gehet man weiter fort. Daß demnach in einer geometrischen Reihe alle Glieder gegen diejenigen, welche in der Reihe unmittelbar auf dieselben folgen, einerley Verhältniß haben.

§. 105. Gesetzt, es bedeute a das erste Glied einer solchen Reihe, und b das zweyte, so wird das dritte $\frac{bb}{a}$, denn diese Zeichnung bedeutet die vierte Proportionalgröße zu a, b und b; und das vierte Glied wird $\frac{b^3}{a^2}$, welches die vierte Proportionalgröße ist zu a, b, und dem dritten Gliede $\frac{b^2}{a}$. Das fünfte ist $\frac{b^4}{a^3}$ und so fort, VI, 127, daß demnach die Reihe folgendergestalt stehet:

$$a,\quad b,\quad \frac{b^2}{a},\quad \frac{b^3}{a^2},\quad \frac{b^4}{a^3},\quad \frac{b^5}{a^4},\quad \frac{b^6}{a^5},\text{ und so weiter.}$$

Es sey zum Exempel $a=2$, $b=3$, so ist die Reihe $2, 3, \frac{9}{2}, {}^{2}\frac{7}{4}, {}^{8}\frac{1}{8}, {}^{2}\frac{43}{16}, {}^{7}\frac{29}{32}$ und so weiter.

§. 106. Man siehet hieraus so gleich, daß ein jedes Glied einer geometrischen Reihe, welches von dem ersten um eine Zahl von Gliedern entfernet ist, die man sich unter m vorstellen kan, oder zwischen welchem

und

und dem ersten die Zahl der Glieder $m-1$ stehet, nachfolgendergestalt ausgedrücket werden könne: $\frac{b^m}{a^{m-1}}$. Stehet nemlich m vor die Einheit, und wil man also das nächste Glied nach dem ersten haben, welches vom Anfang der Reihe das zweyte ist, so ist dasselbe $\frac{b^1}{a^{1-1}} = \frac{b}{a^0} = \frac{b}{1} = b$. Vor das dritte, vom Anfang der Reihe ist $m=2$, und es wird also $\frac{b^m}{a^{m-1}}$ nunmehro $\frac{b^2}{a^{2-1}} = \frac{b^2}{a}$. Eben so wird das fünfte Glied von dem ersten gefunden, wenn man vor m in der allgemeinen Bezeichnung $\frac{b^m}{a^{m-1}}$ die Zahl 5 setzet. Dadurch wird dieses Glied $\frac{b^5}{a^4}$, und $\frac{b^5}{a^4}$ bedeutet also das fünfte Glied von dem ersten, oder überhaupt das sechste Glied einer geometrischen Reihe, deren erstes Glied durch a, und das zweyte durch b bezeichnet wird. Man findet also nach dieser Regel ein jedes Glied der Reihe, wenn die zwey ersten Glieder derselben gegeben sind, und angezeiget wird, um wie viele Glieder dasjenige, so zu finden ist, von dem ersten abstehe.

§. 107. Man kan sich auch der nachfolgenden Anweisung bedienen, aus etlichen Gliedern einer geometrischen Reihe das nachfolgende heraus zu bringen, und also die Reihe so weit fortzusetzen, als man wil. Gesetzt, A sey das erste Glied der Reihe, und B das zweyte. C aber sey ein jedes anderes Glied eben der Reihe, das dritte, vierte, fünfte, und so fort, oder auch das zweyte. Man nehme den Unterschied der ersten zwey Glieder A—B, oder B—A, und suche zu dem ersten Gliede A, zu diesem Unterschied, und zu dem Gliede C, die vierte Proportionalzahl. Diese ist der Unterschied des Gliedes C von demjenigen, so in der Reihe zu nächst auf C folget. Und wenn man also diesen Unterschied zu dem Gliede C hinzu setzet, oder von demselben abziehet, nachdem die Reihe steiget oder fället, so erhält man das auf C folgende Glied der Reihe, welches wir mit D bezeichnen wollen. Da in einer solchen Reihe man ein jedes Glied vor das erste annehmen kan; so siehet man, daß man vor A ein jedes Glied der Reihe, und vor B dasjenige nehmen könne, so zunächst darauf folget.

§. 108. Es sey das erste Glied der Reihe 8, das zweyte 12; so ist der Unterschied dieser Glieder 4. Man sage, wie das erste Glied 8 zu diesem

sem Unterschied 4, so die zweyte 12 zu 6; diese 6 setze man zu dem zweyten Gliede hinzu, so erhält man das dritte Glied der Reihe 18. Ferner sage man, wie 8 zu 4, so das dritte Glied 18 zu 9 dem Unterschied des dritten und vierten. Dieser Unterschied giebet mit dem dritten Gliede das vierte Glied der Reihe 27, und eben so erhält man das fünfte $40\frac{1}{2}$, und die folgende. Steiget die Reihe niederwärts, und ist das erste Glied derselben 18, das zweyte 12, und folgends der Unterschied dieser Glieder 6: so sage man, wie 18 zu 6, das ist, wie 3 zu 1, so das zweyte Glied 12 zu 4; diese Zahl von dem zweyten Gliede abgezogen, läst 8, das dritte Glied der Reihe. Auf eben die Art findet man aus dem dritten Gliede das vierte, und so fort.

§. 109. Die Richtigkeit dieser Anweisung ist gar leicht einzusehen. Wenn die Progression aufsteigen soll, so wird gemacht $A:B-A=C:D-C$. Spricht man nun in dieser Proportion, VI, 92. wie das erste Glied, zu der Summe des ersten und des zweyten, so das dritte zu der Summe des dritten und vierten, so erhält man allerdings $A:B=C:D$. Soll aber die Progression niedersteigen, so wird gemacht $A:A-B=C:C-D$, woraus ebenfals die Proportion $A:B=C:D$ folget, wenn man VI, 101. saget: wie das erste Glied A, zu dem Unterschied des ersten und zweyten Gliedes $A-A+B$; so das dritte C, zu dem Unterschied des dritten und vierten $C-C+D$. Es wird demnach durch diese Regel die Reihe so fortgesetzet, daß das Glied D, welches zu nächst auf C folget, gegen das Glied C sich so verhält, wie das zweyte Glied der Reihe B gegen dem ersten. Sie muß also XIII, 104. nothwendig eine geometrische Reihe werden.

Geometrische Reihen zu summiren.

§. 110. Was aber die Summen der Glieder der geometrischen Reihen anlanget, so kan uns die nachfolgende Betrachtung zu deren Erfindung leiten. Es haben in einer geometrischen Reihe alle Glieder gegen dasjenige, so unmittelbar auf dieselben folgen, einerley Verhältniß; und wenn man also die Glieder, wie folget, unter einander setzet:

$$\begin{array}{ccc} a & : & b \\ b & : & \frac{bb}{a} \\ \frac{bb}{a} & : & \frac{b^3}{a^2} \\ \frac{b^3}{a^2} & : & \frac{b^4}{a^3} \end{array}$$

da jedes Glied, außer dem ersten und letzten, zweymal vorkomt, so sind diese Verhältnisse alle gleich. Es verhält sich also die Summe aller ersten Glieder $a+b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{a^2}$ zu der Summe aller letztern $b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{a^2}+\frac{b^4}{a^3}$, wie sich a zu b verhält, VI, 113. Die erstere Summe ist die Summe aller Glieder der Reihe außer dem letzten, und die letzte Summe ist die Summe aller Glieder der Reihe ausser dem ersten. Demnach verhält sich in einer jeden geometrischen Reihe das erste Glied zu dem zweyten, wie die Summe aller Glieder der Reihe außer dem letzten, zu der Summe aller Glieder außer dem ersten.

§. 111. Man bezeichne die Summe aller Glieder mit s, und das letzte Glied der Reihe, welches wir sonst mit $\frac{b^m}{a^{m-1}}$ bezeichnet haben, stelle man sich der Kürze halben unter u vor; behalte aber die Bedeutung der a und b, so wird die Proportion, welche eben mit Worten ausgedrückt worden ist, durch diese Zeichen also müssen ausgedrückt werden: $a:b=s-u:s-a$: und wenn man die erstern Glieder dieser Proportion von dem letztern abziehet, so wird VI, 101. $b-a:a=s-a-s+u:s-u$, das ist, $b-a:a=u-a:s-u$. Es ist demnach $a\times\frac{u-a}{b-a}=s-u$, und folgends $a\times\frac{u-a}{b-a}+u=s$.

§. 112. Hieraus lässt sich die Summe aller Glieder einer Progression s finden, wenn die ersten zwey Glieder derselben a und b, zusamt der Zahl der Glieder, deren Summe man suchet, gegeben ist. Denn aus diesen Zahlen kan man das letzte Glied u finden, XIII, 106. und hat man dieses, so hat man alles, was zur Erfindung der Summe nöthig ist. Die Regel, welche wir eben durch Zeichen ausgedrückt haben, weiset die Rechnungsarten, welche dazu erfordert werden, deutlich. Es sey in einer Progression $a=1$, und $b=5$, man will die Summe der fünf erstern Glieder derselben haben,

haben, so ist $u = \frac{b^4}{a^3} = \frac{5\times5\times5\times5}{1\times1\times1} = 625$, und $u-a = 624$, $b-a = 4$, folgends $\frac{u-a}{b-a}\times a = \frac{624}{4} = 156$, und wenn man demnach noch das letzte Glied hinzu setzet, so wird die Summe der Glieder, welche man suchte $= 781$.

§. 113. Will man bequem und ohne vieles Nachsinnen rechnen, so muß in der Reihe, deren Summe man finden soll, das zweyte Glied größer seyn als das erste, weil man angenommen hat, daß sich dieses von einem abziehen lasse. Und man thut besser, wenn man vor solche Reihen, bey welchen die Glieder immer kleiner werden, die Regel etwas anders setzet. Wenn man nemlich wieder die Proportion annimt, welche XIII, 111. erwiesen worden ist $a:b = s-u:s-a$, und ziehet nunmehro die letztern Glieder von den erstern ab, so bekomt man $a-b:a = s-u-s+a:s-u$, das ist, $a-b:a = a-u:s-u$, folgends ist hier $\frac{a-u}{a-b}\times a = s-u$, und demnach $\frac{a-u}{a-b}\times a+u = s$. Vergleichet man diese Regel mit der vorigen, so findet man, daß beyde zugleich ausgedrückt werden, wenn man saget: man müsse zu dem Unterschiede des ersten und zweyten Gliedes $b-a$, oder $a-b$, zu dem Unterschiede des ersten und letzten Gliedes $u-a$ oder $a-u$, und zu dem ersten Glied a die vierte Proportionalzahl finden, und derselben noch das letzte Glied u zusetzen, damit man die Summe aller Glieder s erhalte.

§. 114. Es sey zum Exempel die Reihe, welche zu summiren ist, von 5 Gliedern, und das erste Glied derselben sey $5 = a$, das zweyte $1 = b$, so wird das letzte $\frac{b^4}{a^3} = \frac{1}{125}$, und demnach $a-u = 5-\frac{1}{125} = \frac{625-1}{125} = \frac{624}{125}$, und $a-b = 5-1$ das ist 4, demnach $\frac{a-u}{a-b}\times a = \frac{624\times5}{125\times4} = \frac{156\times5}{125} = \frac{780}{125}$. Setzet man nun hierzu noch das letzte Glied $\frac{1}{125}$, so komt die Summe aller Glieder der Reihe, welche demnach ist $\frac{781}{125}$ oder $6\frac{31}{125}$.

§. 115. Es ist bey dergleichen Reihen das letzte Glied allezeit in Ansehung der erstern und der Summe klein, insonderheit, wenn die Reihe geschwinde absteiget, das ist, wenn das erste Glied in Ansehung der zweyten groß ist, und wenn der Glieder viele sind. In derjenigen Reihe, welche wir

wir eben zum Exempel angenommen haben, war das fünfte Glied schon nur $\frac{1}{1\,2\,3}$, da das erste 5 war, weil nemlich das zweyte Glied 1 in Ansehung des ersten merklich klein ist. Wie sehr klein muß denn also das hundertste Glied einer solchen Reihe seyn? In diesem Falle also kan man die Summe ohne merklichen Fehler finden, wenn man das letzte Glied gar weglässet, oder wenn man dasselbe überall als nichts ansiehet. Nimt man dieses an, so wird die Regel, nach welcher die Summe aller Glieder einer solchen Reihe gefunden wird $\frac{a-u}{a-b} \times a + u = s$, in die nachfolgende verwandelt $\frac{aa}{a-b} = s$, und die Summe alle Glieder der Reihe ist die dritte Proportionalzahl zu dem Unterschiede der zwey ersten Glieder der Reihe $a-b$ und zu dem ersten Gliede derselben a.

§. 116. Wir wollen nach dieser Regel unser voriges Exempel rechnen. Es war in demselben $a-b=4$ und $a=5$, und es ist demnach $s=\frac{25}{4}=6\frac{1}{4}$ $=6\frac{3\,1}{1\,2\,4}$. Nach der genauen Regel war $s=6\frac{3\,1}{1\,2\,5}$, woraus man siehet, wie gering der Fehler sey, welchen man, auch bey so wenigen Gliedern begehet, und also die Kleinigkeit desselben bey den Umständen, wenn entweder der Glieder der Reihe gar sehr viele sind, oder wenn dieselbe sehr stark abnehmen, gar leicht ermessen kan. Wenn in der geometrischen Reihe, die sich mit 5, 1 anfängt, hundert Glieder wären, so wäre $\frac{aa}{a-b}$ oder $\frac{25}{4}$ der wahren Summe gar sehr nahe, noch näher aber, wenn der Glieder tausend wären, ungemein näher, wenn ihrer eine Million wäre, und so fort.

§. 117. Indessen fehlet man bey dieser Art Rechnung immer um eine Kleinigkeit, und zwar ist dieser Fehler der Unterschied der wahren Summe $\frac{a-u}{a-b} \times a+u$ und dasjenige, so man vor die Summe annimt $\frac{aa}{a-b}$, und wenn man das erstere von dem letztern abziehet, so hat man diesen Fehler. Dieses zu verrichten, muß man diese Zahlen in Brüche von einerley Benennung verwandeln, welches geschiehet, wenn man in der erstern u durch $a-b$ multipliciret, II, 20. Sie wird dadurch $\frac{aa-au+au-bu}{a-b}$, das ist, weil $-au+au=0$, so ist die rechte Summe $\frac{aa-bu}{a-b}$. Diese nun von

der-

derjenigen, welche wir davor angenommen haben $\frac{aa}{a-b}$, abgezogen, lässet $\frac{aa-aa+bu}{a-b}$, das ist $\frac{bu}{a-b}$. Es verhält sich also der Unterschied der zwey-ersten Glieder $a-b$ zu dem zweyten Gliede b, wie das letzte Glied u zu dem Fehler um welchen man zu viel genommen, indem man $\frac{aa}{a-b}$ vor die Summe aller Glieder der Reihe gesetzet hat: woraus man vollkommen sehen kan, wie gar sehr klein dieser Fehler bey den gesetzten Umständen seyn müsse. In unserm Exempel, da $a-b=4$, $b=1$ und $u=\frac{1}{1\,2\,5}$, ist der Fehler $\frac{1}{4\times 125}=\frac{1}{500}$, welches mit dem vorigen überein komt. Denn wenn man von $6\frac{1}{4}$ diesen Fehler $\frac{1}{500}$ abziehet, so bleibt $6\frac{124}{500}$, welches so viel ist als $6\frac{31}{125}$, wie vorher XIII, 116. gefunden worden.

§. 118. Es ist also, wenn wir diesen kleinen Fehler bey den bestimmten Umständen verachten, $\frac{aa}{a-b}$ allezeit der Reihe $a+b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{a^2}+$ &c. ohne merklichen Fehler gleich, wie viele Glieder derselben man auch annehmen will. Und wenn man beyderseits durch eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl n multipliciret, so wird auch $n.\frac{aa}{a-b}$ der Reihe $na+nb+\frac{nb^2}{a}+\frac{nb^3}{a^2}+$ &c. ohne sonderlichen Fehler gleich. Man kan allezeit eines vor das andere setzen: den Bruch vor die Reihe, und die Reihe vor den Bruch.

§. 119. Es kommen zuweilen auch dergleichen geometrische Reihen vor, bey welchen die Zeichen der Glieder abwechseln, als $a-b+\frac{b^2}{a}-\frac{b^3}{a^2}+\frac{b^4}{a^3}-\frac{b^5}{a^4}$ und so fort. Die Summirung der Glieder solcher Reihen kan man aus den gegebenen Regeln unmittelbar herleiten. Denn wenn man nur in denselben vor $+b$ setzet $-b$, so hat man die Regeln, nach welchen dergleichen Reihen berechnet werden müssen. Weil aber diese Veränderung der Zeichen bey denjenigen, vor welche wir schreiben, noch vielleicht einige Schwierigkeit lassen dörfte, so wollen wir die Gründe dieser neuen Regel auf eine andere Art aus demjenigen herleiten, so gewiesen worden ist. Wir bemerken zu dem Ende, daß, wenn man die Glieder einer geometrischen Reihe

wechselsweise nimmet, nemlich das erste a, das dritte $\frac{b^2}{a}$, das fünfte $\frac{b^4}{a^3}$ und so fort: diese Glieder wieder eine geometrische Reihe geben; und daß eben dieses geschehe, wenn man das zweyte Glied b und das vierte $\frac{b^3}{a^2}$ und das sechste $\frac{b^5}{a^4}$ und so fort annimmet. Die zwo Reihen, die auf diese Art aus der gegebenen entsprungen sind, sind diese:

$$a \quad \frac{b^2}{a} \quad \frac{b^4}{a^3} \quad \frac{b^6}{a^5} \text{ u. s. w.}$$

$$b \quad \frac{b^3}{a^2} \quad \frac{b^5}{a^4} \quad \frac{b^7}{a^6} \text{ und so fort.}$$

Man siehet leicht, daß dieses geometrische Reihen sind, und zwar am allerleichtesten, wenn man betrachtet, daß jedes Glied einer jeden dieser Reihe entstehet, wenn man dasjenige, so unmittelbar vorher gehet, mit $\frac{b^2}{a^2}$ multipliciret, das ist, wenn wenn man zu aa, bb und dem vorhergehenden Glied die vierte Proportionalgröße suchet. Auf die Art wird $\frac{b^2}{a}$ aus a, und $\frac{b^3}{a^2}$ aus b, und so weiter. Es hat demnach ein jedes Glied dieser Reihen gegen dasjenige, so unmittelbar auf dasselbe folget, die Verhältniß, welche $aa : bb$ hat.

§. 120. Hieraus schließen wir, daß die Summe aller Glieder einer solchen geometrischen Reihe, in welcher die Zeichen + und — beständig abwechseln, als $a - b + \frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3}$ und so fort, dem Unterschied der Summe der Glieder dieser zwo Reihen $a + \frac{b^2}{a} + \frac{b^4}{a^3}$, und $b + \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^5}{a^4}$ &c. gleich sey, und dieses siehet man sogleich aus der Betrachtung dieser Reihen. Man darf also nur nach den gegebenen Regeln die eine und die andere dieser Summen berechnen, und sodann die letzte von der ersten abziehen. Wir erachten nicht nöthig, uns hiebey auf etwas weiters einzulassen, als daß wir zeigen, wie in dem Fall zu verfahren ist, wenn die Reihen absteigen, und deren letzte Glieder so klein werden, daß man sie vor nichts halten kan.

§. 121. In diesem Falle verhält sich der Unterschied der zwey ersten

Glie-

Glieder der Reihe zu dem ersten, wie das erste zur Summe, XIII. 115. und demnach ist die Summe aller Glieder der Reihe $a + \frac{b^2}{a} + \frac{b^4}{a^3} + \frac{b^6}{a^5}$, und so fort, bis man das letzte Glied vor nichts halten kan, diese $\frac{aa}{a - \frac{b^2}{a}}$. Wenn man aber den Zehler und Nenner durch a multipliciret, so wird diese Summe $\frac{a^3}{a^2 - b^2}$. Die Summe der zweyten Reihe $b + \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^5}{a^4}$ wird durch einen eben dergleichen Schluß gefunden. Man muß sagen, wie der Unterschied des ersten und zweyten Gliedes $b - \frac{b^3}{a^2}$ zu dem ersten Gliede b, so das erste Glied b zur Summe: diese ist demnach $\frac{bb}{b - \frac{b^3}{a^2}}$. Multipliciret man nun hier den Zehler und Nenner durch a^2, so wird diese Summe $\frac{a^2 b^2}{a^2 b - b^3}$; oder wenn man beyde Glieder durch b dividiret, so wird eben diese Summe also ausgedrückt $\frac{a^2 b}{a^2 - b^2}$. Ziehet man nun diese letztere Summe von der erstern ab, so bekommet man die Summe der Glieder der Reihe mit abwechselnden Zeichen, $a - b + \frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2}$ und so fort. Demnach ist diese Summe $\frac{a^3}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 b}{a^2 - b^2}$, das ist, weil die Nenner einerley sind, $\frac{a^3 - a^2 b}{a^2 - b^2}$.

§. 122. Der Zehler in dieser Regel $a^3 - a^2 b$ ist ein Product aus den zwo Zahlen a^2 und $a - b$, wie man leicht siehet. Und der Nenner kan durch die Multiplication dieser zwo Zahlen $a + b$ und $a - b$ entstehen, XIII, 85. Zerfället man also die Glieder dieses Bruchs $\frac{a^3 - a^2 b}{a^2 - b^2}$ welcher die Summe aller Glieder der Reihe ausdrücket, die wir betrachten, in die Zahlen, aus deren Multiplication sie entstanden sind; so wird diese Summe also ausgedrückt $\frac{a^2}{(a+b)} \times \frac{(a-b)}{(a-b)}$. Und wenn man die Glieder beyde durch $a - b$ divi-

dividiret, so zeigt sich die Summe, welche wir suchen aufs kürzeste folgendergestalt $\frac{a^2}{a+b}$. Es verhält sich also die Summe des ersten und zweyten Gliedes einer Reihe, deren Glieder bey abwechselnden Zeichen +, — immer kleiner werden, indem sie sich von dem ersten entfernen, zu dem ersten Gliede; wie dieses erste Glied zu einer vierten Zahl, welche der Summe aller Glieder der Reihe desto näher kommet, je mehr der Glieder an der Zahl sind, und je geschwinder sie absteigen.

§. 123. Es sey zum Exempel die Reihe diese nachfolgende: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$, und so fort, man will die Summe von den hundert ersten Gliedern derselben ohne sonderlichen Fehler haben, so ist $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, und $a+b = \frac{3}{2}$, demnach die Summe $\frac{a^2}{a+b} = \frac{2}{3}$. Und diesem Bruch $\frac{2}{3}$ komt die Summe der Reihe noch näher, wenn man die tausend erstern Glieder derselben nimt, und so fort. Nemlich die Summe der zwey erstern Glieder der Reihe $1 - \frac{1}{2}$ ist $= \frac{1}{2}$, und das dritte Glied $\frac{1}{4}$ dazu, giebt $\frac{3}{4}$ oder $\frac{6}{8}$. Ziehet man hievon das vierte Glied $\frac{1}{8}$ ab, so bleibt $\frac{5}{8}$ oder $\frac{10}{16}$, und das fünfte dazu giebt $\frac{11}{16}$. Dieses ist von $\frac{12}{16} = \frac{2}{3}$ schon nicht sehr verschieden, und dieser Unterschied wird immer kleiner, je weiter man gehet.

§. 124. Und so viel von den Summen der Glieder der geometrischen Reihen. Es ist übrig, daß wir zeigen, wie aus jeden zwey Gliedern einer solchen Reihe, deren Entfernung von einander bekant ist, ein jedes anderes Glied zu finden sey, welches von dem ersten Glied der Reihe um so viel Glieder entfernet ist, als man wil. Es sey eine Reihe, deren erstes Glied 1; und das achte 128 ist, wie groß ist das fünfte Glied dieser Reihe, oder das eilfte? Wie diese und dergleichen Fragen zu beantworten sind, haben wir noch zu weisen. So trocken auch diese Abhandlung scheinen mag, so ist sie doch von ganz ungemeinen Nutzen, und wir sind dem großen **Newton**, welcher uns hiezu eine gar bequeme Anweisung gegeben hat, auch davor vielen Dank schuldig.

§. 125. Es ist aber diese Aufgabe nicht in allen Fällen so schwer, daß sie nicht durch die Sätze aufgelöset werden könte, die wir uns bisher bekant gemacht haben. Wenn verlangt wird, daß man zwischen jede zwey Glieder einer geometrischen Reihe ein neues setzen soll, welches mit denen vorigen wieder eine dergleichen Reihe ausmache, so darf man nur zu diesen Gliedern die mittlere Proportionalzahl finden, welche das verlangte Glied seyn wird. Gesetzt es stellen die einzelne Buchstaben

A,

A, C, E, G, I,

einen Theil einer geometrischen Reihe vor, und B sey die mittlere Proportionalzahl zwischen A und C, D sey die mittlere Proportionalzahl zwischen C und E, F die zwischen E und G, und so weiter, so stehen auch diese Zahlen:

A, B, C, D, E, F, G, H, I,

in einer geometrischen Reihe. Denn wenn B die mittlere Proportionalzahl ist zwischen A und C, so ist die Verhältniß A:B der Verhältniß B:C gleich; und aus eben dem Grunde ist C:D=D:E und so fort. Die Verhältniß A:C aber ist aus den Verhältnissen A:B und B:C zusammen gesetzt, oder weil diese Verhältnisse einander gleich sind, so ist die Verhältniß A:C doppelt so hoch, als die Verhältniß A:B oder B:C. Eben so entstehet die Verhältniß C:E, indem man die Verhältnisse C:D und D:E zusammen setzet, oder eine derselben C:D oder D:E verdoppelt. Wären nun diese Verhältnisse, die man verdoppeln muß, damit die Verhältnisse A:C und C:E heraus kommen, einander nicht gleich, so wäre die erste Progression

A, C, E, G, I,

nicht richtig, weil alsdenn die Verhältnisse A:C und C:E einander nicht gleich wären. Es sind also die Verhältnisse A:B, B:C, C:D, D:E einander alle gleich; und weil von den folgenden eben das erwiesen werden kan, so ist die Reihe

A, B, C, D, E, F, G, H, I,

allerdings geometrisch.

§. 126. Nunmehro kan man zwischen jede zwey Glieder dieser neuen Reihe ein anderes auf eben die Art setzen, und dadurch die Zahl der Glieder, die zwischen A und I stehen, aufs neue vermehren, und so immer fort. Steiget nun diese Reihe, so daß C größer ist als A, so übertrift zwar die zwischen A und C gesetzte Zahl B die A ebenfals, aber nicht so sehr als die C eben die Zahl A übertrift; und wenn die Reihe niedersteiget, so ist noch die größere B von der A weniger unterschieden, als die kleinere C. Demnach werden, indem man zwischen die Glieder einer geometrischen Reihe immer mehrere setzt, diese Glieder einander immer näher gebracht, so daß sie endlich einander fast gleich werden.

§. 127. Es sey zum Beyspiel diese geometrische Reihe gegeben

2 . 32 . 512 . 8192.

Setzet man nun zwischen jedes Glied derselben ein anderes nach der gegebenen Anweisung, so erhält man diese neue Reihe:

2 . 8 . 32 . 128 . 512 . 2048 . 8192.

deren Glieder einander schon viel näher kommen, als die Glieder der vorigen. Zwischen die Glieder dieser Reihe kan man nun auf eben die Art andere setzen, und dadurch die Reihe.

2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. 2048. 4096. 8192.

heraus bringen, und so immer fort.

§. 128. Aus dieser Betrachtung siehet man zugleich, daß in der geometrischen Reihe, welche diese Buchstaben vorstellen

A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N

alle Glieder, die gleich weit von einander entfernet sind, wieder eine dergleichen Reihe geben, wenn man sie besonders schreibt. Werden in dieser Reihe zwischen jeden zwey Glieder, zwey ausgelassen, so erhält man die Reihe

A, D, G, K, N.

Und daß diese geometrisch seyn müsse siehet man daraus, weil vermöge der vorigen, die Verhältniß A:D aus den drey gleichen Verhältnissen A:B, B:C, C:D zusammen gesetzet wird, die Verhältniß aber D:G durch die Zusammensetzung der drey Verhältnisse D:E, E:F, F:G entstehet, welche den erstern gleich sind, und mit denen übrigen es eben die Bewantniß hat. Denn die Verhältnisse, welche durch die Zusammensetzung gleicher Verhältnisse entstehen, sind einander nothwendig gleich. Ist aber die Verhältniß A:D gleich der Verhältniß D:G und diese wieder gleich der Verhältniß G:K und so fort, so ist die Reihe A, D, G, K, N allerdings geometrisch.

Wie oft eine beliebige Zahl von zweyerley Buchstaben versetzet werden könne.

§. 129. Nun wenden wir uns zu den Sätzen, welche bekant seyn müssen, wenn man deutlich begreifen soll, wie zwischen zwey Glieder einer geometrischen Reihe ein jedes anderes zu setzen sey, so von denen gegebenen um so viele Glieder entfernet ist, als man will. Wir müssen aber noch einige kleine Betrachtungen von der Versetzung zweyer Buchstaben oder anderer Dinge machen, ehe wir diese Betrachtung würklich anfangen können. Es seyn die zween Buchstaben, welche zusammen zu setzen sind *a* und *b*, man sol *a* sowohl als *b* so oft nehmen als man wil, *a* zum Beyspiel ein mal und *b* zwey mal, und dieselbe folgender gestalt *abb*, *bba*, *bab* zusammen setzen. Die Frage ist, wie oft dieses bey einer jeden angenommenen Zahl des Buchstabens *a*, und bey jeder angenommenen Zahl des

Buch-

Buchstabens *b* geschehen könne, und wie viele verschiedene Ordnungen der Buchstaben man dadurch heraus bringe? Wird *a* nur ein mal und *b* zwey mal gesetzet, so siehet man leicht daß sich diese Buchstaben nach nicht mehr verschiedenen Arten zusammen setzen lassen, als nach den dreyen, die wir eben gehabt haben, *abb*, *bba*, *bab*. Wie ist es aber, wenn der *a* zwey, drey, vier oder mehrere sind, wie auch der *b*?

§. 130. Diese Frage leicht zu beantworten bemerken wir erstlich, daß eine jede Ordnung von Buchstaben von der Art derjenigen, die wir betrachten, als *ababba*, aus einer jeden andern Ordnung von eben so vielen Buchstaben entstehen könne, in welcher vor ein *b* der gegenwärtigen Ordnung ein *a* stehet, weil man nemlich vor ein jedes solches *a* wieder das *b* setzen kan. Diese Ordnungen sind: *aaabba*, *abaaba*, *ababaa*. Wenn man in der ersten dieser Ordnungen vor das zweyte *a*, oder in der zweyten vor das dritte *a*, ein *b* setzet; wie auch, wenn man in der dritten in die Stelle des dritten *a* ein *b* bringet, so erhält man immer die erst gegebene Ordnung der Buchstaben *ababba*.

§. 131. Die Anwendung dieses Satzes wird erleichtert, wenn wir ihn also ausdrücken: eine jede Ordnung von zween Buchstaben *ababba*, kan durch die Verwechselung eines einzigen *a* mit einem *b* aus so viel andern Ordnungen eben so vieler *a*, *b*, deren jede aber ein *b* weniger hat, entstehen, als vielmal in der ersten *b* enthalten ist. Nemlich da in der Ordnung, die wir zum Exempel aufgenommen haben, der Buchstabe *b* drey mal stehet, übrigens aber dieselbe überhaupt sechs Buchstaben hat, so kan dieselbe aus drey Ordnungen von sechs Buchstaben, unter welchen sich aber nur zwey *b* befinden, heraus gebracht werden, welche diese sind: *aaabba*, *abaaba*, *ababaa*. Man siehet leicht, daß dieses mit andern Worten eben das sage, so wir eben gewiesen haben.

§. 132. Zweytens bemerken wir, daß aus einer jeden Ordnung zweyer Buchstaben *aabbaa* eine andere Ordnung von eben so vielen Buchstaben, unter welchen aber ein *b* mehr anzutreffen ist, als in der vorigen, so oft könne heraus gebracht werden, als oft in derselben *a* anzutreffen ist. Und dieses deswegen, weil man vor jedes *a* der gegebenen Ordnung ein *b* setzen kan. Es können aus der Ordnung der vier *a*, und zwey *b* welche wir angenommen haben, *aabbaa* nachfolgende vier Ordnungen von dreyen *b* und dreyen *a* gemacht werden: *babbaa*, *abbbaa*, *aabbba*, *aabbab*.

§. 133. Es seyn nunmehro fünf Buchstaben zusammen zu setzen, von zweyerley Benennungen *a* und *b*, so siehet man so gleich, daß, wenn man bloße fünf *a* und gar kein *b* nehmen will, man aus denselben nicht mehr als

eine einzige Ordnung heraus bringen könne, nemlich diese *aaaaa*. Und dieses ist richtig, es maa die Zahl aller Buchstaben so groß oder so klein seyn als man wil. Die Ordnung, welche man aus zwanzig *a* an einander gesetzt machen kan, ist ebenfals nur eine einzige. Denn es wird gesetzt, daß man ein *a* von dem andern, und ein *b* von dem andern, nicht unterscheide.

§. 134. Will man nun aus dieser Ordnung *aaaaa* eine andere machen, in welcher noch fünf Buchstaben, aber unter derselben ein *b* vorkomt: so kan vermöge des Satzes XIII, 132. dieses so oft geschehen, als viel mal in dieser Ordnung *a* vorkomt, das ist, so viel mal, als viele Buchstaben in derselben stehen, weil man an die Stelle eines jeden *a* ein *b* setzen kan. Dadurch kommen diese fünf Ordnungen

baaaa
abaaa
aabaa
aaaba
aaaab.

Und man siehet überhaupt, daß, wenn man sich die Zahl der Buchstaben, deren hier fünfe sind, unter den Buchstaben *n* vorstellet, welcher eine jede Zahl bedeuten kan: die Zahl der Ordnungen, die aus einem *b* und einer Zahl der *a*, die um eins kleiner ist als *n*, gemacht werden können, allezeit der *n* gleich seyn werde.

§. 135. Aus einer jeden dieser fünf Ordnungen kan man nun andere machen, welche zwey *b* und nur drey *a* enthalten. Und zwar, weil in jeder der vorstehenden Ordnungen vier *a* stehen, so giebt eine jede derselben vier Ordnungen von drey *a* und zwey *b*, XIII, 132. Die beystehende Tafel weiset deutlich wie dieses zu verrichten sey. Die vorigen fünf Ordnungen stehen oben, und diejenigen, die aus einer jeden heraus gebracht werden, unter denselben:

baaaa	*abaaa*	*aabaa*	*aaaba*	*aaaab*
bbaaa	*bbaaa*	*babaa*	*baaba*	*baaab*
babaa	*abbaa*	*abbaa*	*ababa*	*abaab*
baaba	*ababa*	*aabba*	*aabba*	*aabab*
baaab	*abaab*	*aabab*	*aaabb*	*aaabb*

Will man demnach die Zahl aller dergestalt heraus gebrachter Ordnungen, in welchen *b* zweymal vorkomt, geschwind haben, so multiplicire man die Zahl aller Ordnungen, in welchen ein *b* vorkommet, 5, durch die Zahl der *a* welche in diesen Ordnungen vorkommen, welche allezeit um 1 kleiner

und

und also hier 4 ist, so ist 5×4 die Zahl aller Ordnungen, in welchen a drey mal und b zwey mal vorkomt, welche dergestalt heraus gebracht werden. Wir werden aber so gleich sehen, daß noch etwas bey dieser Rechnung zu bessern sey. Indessen siehet man nach einem kleinen Nachdenken, daß dieses überall statt haben müsse. Und da wir gefunden haben, daß, wenn n immer die Zahl der Buchstaben einer jeden Ordnung bedeutet, eben diese Zahl n auch die Zahl der Ordnungen sey, in welchen nur ein b anzutreffen ist, und da die Zahl der a in diesen Ordnungen nothwendig $n-1$ ist; so ist beständig die Zahl aller Ordnungen von eben so vielen Buchstaben, unter welchen aber zwey b vorkommen, welche wir zur Zeit heraus gebracht haben, dem Product $\frac{n \times n-1}{2}$ gleich.

§. 136. Allein wenn wir einen Blick auf die Tafel XIII, 135. zurück werfen, in welcher alle Ordnungen dreyer a und zweyer b vorgestellet werden, so sehen wir, daß diese Ordnungen nicht alle verschieden sind: sondern daß in der Tafel eine jede Ordnung zweymal vorkomme. Und aus dem vorhergehenden kan uns leicht beyfallen, warum dieses geschehen müsse. Da diese Ordnungen von zweyen b und dreyen a aus den erstern, in welchen nur ein b vorkomt, gemacht worden sind; so ist jede Ordnung so oft heraus gebracht worden, als oft in diesen heraus gebrachten Ordnungen b stehet, nemlich zwey mal, XIII, 131. Will man also nur die Zahl derjenigen Ordnungen haben, die von einander verschieden sind, um welche es uns auch eigentlich zu thun ist; so muß man die vorige Zahl durch 2 theilen. Es wird also in unserm Exempel die eigentliche Zahl der verschiedenen Ordnungen $5 \times \frac{4}{2} = 10$, und überhaupt $\frac{n \times n-1}{2}$. Diese verschiedene Ordnungen sind die nachstehende:

bbaaa			
baba a	*abbaa*		
baaba	*ababa*	*aabba*	
baaab	*abaab*	*aabab*	*aaabb*

§. 137. Es wäre zu weitläuftig, wenn wir die folgende Ordnungen, in welchen immer ein b mehr und ein a weniger vorkomt, ebenfals alle würklich darstellen wolten. Wir haben das bisherige nur zum deutlichern Verstand angebracht, und können nunmehro leicht schließen, daß aus einer jeden der gefundenen Ordnungen dreyer a und zweyer b wir drey Ordnungen machen können, in welchen drey b vorkommen, weil wir nemlich vor ein jedes a einer jeden der letzt gefundenen Ordnungen ein b setzen kön-

nen, XIII, 132. Dadurch wird die Zahl aller Ordnungen dreyer b und zweyer a, die gefundene $5 \times \frac{4}{2}$ dreymal, das ist $5 \times \frac{4}{2} \times 3$. Oder überhaupt: $\frac{n \times n-1 \times n-2}{2}$. Da aber in den Ordnungen, welche dergestalt heraus gebracht werden, das b dreymal vorkomt, so kan eine jede derselben aus drey Ordnungen, in welchen zwey b vorkommen, gemacht werden, oder drey verschiedene Ordnungen, in welchen zwey b vorkommen, geben allemal, bey dieser Art die Ordnungen hervor zu bringen, nur eine Ordnung, in welcher b dreymal vorkomt, XIII, 131. Es ist demnach die Zahl der wahrhaftig verschiedenen Ordnungen, in welchen drey b vorkommen, dreymal kleiner, als die Zahl welche gefunden worden ist, $5 \times \frac{4}{2} \times 3$ oder überhaupt $\frac{n \times n-1 \times n-2}{2}$, und man muß diese Zahl durch 3 theilen, wenn man die Zahl der verschiedenen Ordnungen dieser Art haben will. Sie wird dadurch in unserm Exempel $5 \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} = 10$, und überhaupt in allen möglichen Fällen $\frac{n \times n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$.

§. 138. Aus einer jeden Ordnung zweyer a und dreyer b, dergleichen diese ist: $aabbb$, können nunmehro wieder zwey Ordnungen von einem einzigen a und vieren b, gemacht werden; und es komt demnach überhaupt die Zahl aller Ordnungen eines a und vierer b, die dergestalt heraus gebracht werden können, wenn in unserm Exempel die vorige Zahl $5 \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3}$ noch durch 2, oder überhaupt $\frac{n \times n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, durch $n-3$ multipliciret wird. Allein da in diesen Ordnungen das b viermal vorkomt, so kommen je vier und vier dieser Ordnungen vollkommen mit einander überein, und geben nur eine Ordnung von vier b und einem a. Die durch die angewiesene Multiplication gefundene Zahl ist also viermal zu groß, wenn von solchen Ordnungen die Rede ist, die würklich von einander unterschieden sind. Dieses zu vermeiden, multiplicire man in unserm Exempel nicht durch 2, sondern durch $\frac{2}{4}$, und überhaupt nicht durch $n-3$, sondern durch $\frac{n-3}{4}$, so wird die richtige Zahl der Ordnungen, in welchen vier b anzutreffen sind, $5 \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} = 5$, oder überhaupt $\frac{n \times n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$.

§. 139. Nach eben diesen Regeln muß man fortfahren, wenn man die

die Zahl der Ordnungen finden wil, in welchen noch ein b mehr und ein a weniger stehet, als vorher. Unter den Ordnungen von einem a und vier b, deren Zahl wir bereits gefunden haben, ist diese $abbbb$. An die Stelle eines jeden a kan man b setzen, und weil nur ein a vorhanden ist, so können der Ordnungen, in welchen b fünfmal stehet, nur so viele heraus gebracht werden, als viele der Ordnungen von vier b, und einem a sind. Diesem zu folge wäre die ganze Zahl aller Ordnungen, in welchen fünf b und kein a anzutreffen, die Zahl der vorigen von vier b $5 \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{4}$ durch 1 multipliciret. Weil aber in diesen Ordnungen fünf b vorkommen, so geben fünf der vorigen Ordnungen nur eine der gegenwärtigen, und man muß nicht durch 1 sondern $\frac{1}{5}$ multipliciren, wenn man die eigentliche Zahl der verschiedenen Ordnungen, die aus fünf b gemacht werden können, haben wil. Es wird demnach diese Zahl $\frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{5}$, das ist 1, und man siehet vor sich leicht, daß dieses seine Richtigkeit habe, weil man die Ordnung $bbbbb$ nicht verändern kan. Ueberhaupt aber wird die Zahl der verschiedenen Ordnungen der Buchstaben a und b, wenn unter denselben fünf b vorkommen, und folgends $n-5$ die Zahl der a ausdrücket, diese $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5}$. Und dieses ist hinlänglich einzusehen, wie diese Regel weiter fortzusetzen ist.

§. 140. Wir können diese Sache, nachdem die Gründe davon, wie wir hoffen, nunmehro vollkommen klar sind, auch kürzer fassen. Es sey in einer beliebigen Menge von zweyerley Buchstaben a und b, die Zahl aller Buchstaben, wie bishero immer, n, und die Zahl der b in dieser Menge sey m: so ist die Zahl der a welche in derselben befindlich sind $n-m$. Die Zahl aller Ordnungen aber, welche man den Buchstaben geben kan, wenn m die Zahl der b und $n-m$ die Zahl der a ausdrücket, sey P. Sol man nun hieraus die Zahl aller möglichen Ordnungen finden, welche eben die zwey Buchstaben haben können, deren Zahl noch die vorige n ist, unter welchen aber ein b mehr, und folgends ein a weniger vorkomt als vorher, so daß die Zahl der b, welche nunmehro in den Ordnungen vorkommen, durch $m+1$ auszudrücken ist: so muß man die Zahl der möglichen Ordnungen P, welche wir als bekant angenommen haben, durch die Zahl der a multipliciren, welche in denselben Ordnungen vorkommen, das ist, durch $n-m$, und nachdem man dadurch das Product $P \times (n-m)$ erhalten, so muß dasselbe durch die Zahl der b getheilet werden, welche in den neuen Ordnungen vorkommen, das ist, durch $m+1$. Dadurch erhält man die Zahl aller möglichen Ordnungen die man suchet, und es ist demnach dieselbe

P×

$P \times \frac{n-m}{m+1}$. Es verhält sich also bey den öfters erwähnten Umständen, und wenn man die Ordnungen, in welcher ein b mehr vorkomt, die Nachfolgenden nennet, und die andere in welcher ein a mehr vorkomt als in der folgenden, die Vorhergehenden: es verhält sich, sage ich, die Zahl der b in den Nachfolgenden Ordnungen nemlich $m+1$, zu $n-m$, der Zahl der a in den vorhergehenden, wie sich die Zahl aller möglichen vorhergehenden Ordnungen P, zu der Zahl aller möglichen nachfolgenden Ordnungen verhält.

§. 141. Es sey unter einer beliebigen Zahl n von Buchstaben gar kein b, und folgends sey $m = 0$, so wissen wir bereits, daß sich die Buchstaben von einerley Art nicht in verschiedene Ordnungen, dergleichen wir hier betrachten, setzen lassen, XIII, 133. und daß folgends P die Einheit bedeute. Will man nun die Zahl aller möglichen Ordnungen haben, in welchen b einmal vorkomt, so schreibe man in $P \times \frac{n-m}{m+1}$ an statt P die 1, und an statt m setzet man 0, so wird $1 \times \frac{n}{1}$. Diese ist die Zahl aller möglichen Ordnungen von zweyerley Buchstaben a und b unter welchen b nur einmal vorkomt, wie wir sie bereits oben gefunden haben.

§. 142. Will man aus der Zahl dieser Ordnungen, als den vorhergehenden die Zahl aller möglichen Ordnungen finden, welche darauf folgen, in welchen nemlich zwey b vorkommen, so ist P nunmehro gefunden $= 1 \times \frac{n}{1}$, m aber ist nunmehro $= 1$, und n behält seine Bedeutung, denn die Zahl aller Buchstaben bleibt beständig einerley. Wenn man demnach in $P \times \frac{n-m}{m+1}$ vor P, $1 \times \frac{n}{1}$, und vor m die 1 schreibet, so bringet man die Zahl aller Ordnungen heraus, in welcher zwey b vorkommen, und diese ist $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$.

§. 143. Auf eben die Art findet man aus der Zahl aller möglichen Ordnungen der Buchstaben, unter welchen zwey b sind, die Zahl aller möglichen Ordnungen der Buchstaben, unter welchen drey b vorkommen. P ist nunmehro $= 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$, und $m = 2$. Setzet man nun dieses beydes an

seine Stelle in der Regel $1 \times \frac{n-m}{m+1}$, so wird die Zahl aller möglichen Ordnungen bey drey b, diese $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$.

§. 144. Nicht anders schließet man auch die Zahl der möglichen Ordnungen der Buchstaben bey vier, fünf und sechs b, aus den vorigen. Es gehet alles beständig nach einerley Gesetzen fort. Die Nenner der Brüche, welche in einander zu multipliciren sind, werden immer um eins größer, und die Zehler nehmen um 1 ab: vor jedes b aber, welches in der Menge der Buchstaben, deren mögliche Ordnungen man suchet, an statt eines a gesetzt wird, muß ein dergleichen Bruch zu den vorigen, als ein Factor, hinzukommen.

§. 145. Wird nun die Bedeutung des Buchstabens n bestimmet, und also die Zahl der Buchstaben, welche in ihre Ordnungen zu bringen sind, würklich angezeiget: so findet man alles in würklichen Zahlen. Die möglichen Ordnungen z. E. aus fünf Buchstaben von zweyerley Art a und b sind diese. Sind alle fünf Buchstaben a, so ist die Summe aller möglichen Ordnungen 1.

Ist unter denselben ein b, und sind die übrigen vier Buchstaben a, so ist die Summe aller möglichen Ordnungen $1 \times \frac{n}{1}$, das ist, weil $n = 5$,

$1 \times \frac{5}{1} = 5$.

Sind unter den Buchstaben zwey b, und sind die übrigen drey Buchstaben a, so ist die Zahl der möglichen Ordnungen $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$, das ist, $1 \times \frac{5}{1} \times \frac{4}{2} = 10$.

Sind unter denselben drey b, und sind die übrigen zwey Buchstaben a, so ist die Zahl der möglichen Ordnungen $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, das ist,

$1 \times \frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} = 10$.

Sind unter den Buchstaben vier b, und nur ein a, so ist die Zahl der möglichen Ordnungen $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$, das ist $1 \times \frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} = 5$.

Sind endlich unter diesen Buchstaben fünf b und also kein a, so ist die Zahl aller möglichen Ordnungen $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5}$, das

ist $1 \times \frac{1}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{5}$, welches nicht mehr als die Einheit bringet. Weiter kan man nicht kommen, weil, wenn man einen Schritt weiter thun wolte, der Bruch, welchen man noch zu dem vorigen als einen Factor hinzu setzen müste, 0 werden, und dasselbe durch die Multiplication gänzlich vernichten würde. Es sind demnach alle mögliche Ordnungen aus fünf Buchstaben von zweyer Benennung gefunden, welche wir suchten.

§. 146. Aus diesem allen nun können wir sehen, durch wie vielerley Multiplicationen ein Product, in welchen zween Buchstaben in gewissen Dignitäten vorkommen, entstehen könne, dergleichen Producte sind ab^2, a^2b^3, und überhaupt $a^{n-m}b^m$. Das erstere dieser Producte kan auch so geschrieben werden, abb, wie auch bab und bba, und wenn man nach Maaßgebung einer jeden Ordnung, diesen Buchstaben multipliciret, so entstehet immer eben das Product ab^2, weil die Ordnung in der Multiplication nichts ändert, I, 98. Nemlich, wenn man erstlich b durch b, und das Product durch a multipliciret, oder wenn man b durch a und das Product durch b multipliciret, oder auch wenn man a durch b multipliciret, und das Product nochmals durch b, so entstehet allezeit eben das Product ab^2. Hieraus schließet man sogleich, daß das Product ab^2 durch so vielerley Multiplicationen entstehen könne, als vielmal sich die drey Buchstaben abb versetzen lassen. Und so ist es in allen dergleichen Fällen. Das Product a^2b^3 kan durch so vielerley Multiplicationen entstehen, als vielmal sich die Buchstaben $aabbb$ versetzen lassen, und das Product $a^{n-m}b^m$, in welchem die Exponenten mit denjenigen Buchstaben ausgedrücket sind, deren wir uns XIII, 140. bey der Regel bedienet haben, die eben zu Ende gebracht worden ist, entstehet durch so vielerley Multiplicationen, als viele der Ordnungen sind, in welche sich die Buchstaben $aaa \ldots$ und $bb \ldots$ setzen lassen, deren Zahl überhaupt n ist, und unter welchen die Zahl m der b vorkommet.

§. 147. Diese Betrachtungen können wieder sehr trocken scheinen. Es wird sich aber der Nutzen derselben so gleich zeigen, indem wir sie auf die Dignitäten solcher Wurzeln, welche aus zwey Theilen bestehen, anwenden, und zeigen wollen, wie solche Dignitäten zusammen zu setzen sind: welches jedoch der geringste Nutze ist, welchen diese Lehre bringen wird. Die nützlichsten und tiefsten Betrachtungen gründen sich darauf, deren einige im Nachfolgenden vorkommen werden.

Die

Die Dignitäten einer zweytheiligen Wurzel.

§. 148. Es bedeute $a+b$ eine Wurzel von zwey Theilen. Wir werden hernach an statt der $+b$ auch $-b$ setzen. Vors erste aber können wir es bey der angenommenen Zeichnung bewenden lassen. Die zweyte Dignität dieser Wurzel entstehet ohnfehlbar, wenn man sie mit sich selbst, das ist, mit $a+b$ multipliciret. Man verrichte diese Multiplication, aber man verfahre dabey dergestalt, daß man die Buchstaben, mit welchen man multipliciret, allezeit den andern vorsetze, welche man multipliciret, so wird die Rechnung, oder vielmehr die Bezeichnung der Rechnung, welche man vornehmen müste, wenn an der Stelle der Buchstaben die Zahlen stünden, welche die Buchstaben bedeuten können, diese seyn:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab+ba+bb \end{array}$$

Das Product ist die zweyte Dignität der Wurzel $a+b$. Betrachtet man dasselbe etwas genauer, so siehet man, daß es aus allen Producten bestehe, welche entstehen können, wenn man zwey der Buchstaben a und b in allen möglichen Ordnungen, die von einander verschieden sind, in einander multipliciret. Denn man hat in denselben würklich a mit a, b mit a, a mit b, und b mit b multipliciret, und auf mehrere Arten kan man zween Buchstaben von zweyerley Benennung nicht mit einander multipliciren.

§. 149. Will man nun die dritte Dignität von eben der Wurzel $a+b$ haben, so muß man die zweyte, welche eben gefunden worden ist, nochmals durch die Wurzel multipliciren. Man verfahre bey dieser Multiplication wieder wie gewiesen ist, und schreibe die Buchstaben, durch welche man multipliciret, vor diejenigen, welche man multipliciret, so stehet die Rechnung in folgender Ordnung:

Die zweyte Dignität: $aa+ab+ba+bb$

Die Wurzel $a+b$

$$\begin{array}{l} aaa+aab+aba+abb \\ +baa+bab+bba+bbb \end{array}$$

Wenn man nun das Product, welches die dritte Dignität der Wurzel $a+b$ ist, ebenfals betrachtet, so findet man, daß bey demselben eben dergleichen richtig sey, als wir eben bey der zweyten Dignität bemerket haben. Es bestehet dieses Product aus allen Producten, welche aus den Buchstaben a und b entstehen können, wenn man derselben drey nimt, wie man

nur kan, nemlich entweder drey a, oder zwey a und ein b, oder ein a und zwey b, oder drey b, und multipliciret jede drey angenommene Buchstaben in so mancher Ordnung in einander als möglich ist. Denn wenn man die zween Buchstaben a und b mit einander verknüpfet, wie man nur kan, wie dieses bey der zweyten Dignität geschehen ist, und man setzet hernach einer jeden Verknüpfung sowol a als auch b vor, so ist klar, daß dadurch alle Verknüpfungen dreyer Buchstaben entstehen müssen, die nur möglich sind. Dieses aber ist geschehen, indem aus der zweyten Dignität die dritte gemacht worden.

§. 150. Wir hatten die zween Buchstaben a, b. An der Stelle eines jeden kan entweder a oder b stehen. Dieses sind die Ordnungen alle, welche diese Buchstaben haben können, wenn man sie zwey und zwey mit einander verknüpfet. Und diese Verknüpfungen zusammen machen die zweyte Dignität der Wurzel $a+b$. In derselben sind also die letzten Buchstaben so oft verändert als möglich ist, und die erstern sind auch so oft verändert als möglich ist, Will man also noch einen der angenommenen zween Buchstaben vor die vorigen setzen, und denselben wieder so oft verändern als möglich ist, so hat man nur einer jeden der vorigen Verknüpfungen aa, ab, ba, bb sowol a als auch b vorzusetzen. Dadurch wird auch der erste der drey Buchstaben, welche man dergestalt zusammen setzet, so oft verändert, als bey den gesetzten Bedingungen, daß nemlich nur die beyden Buchstaben a und b gebraucht werden sollen, möglich ist. Und man bekomt also wieder alle Ordnungen, in welche sich die drey Buchstaben setzen lassen, oder alle Producte, welche aus diesen Buchstaben gemacht werden können, wenn man sie in allen möglichen Ordnungen mit einander multipliciret. Nun aber entstehet die dritte Dignität der Wurzel $a+b$ wenn man allen Theilen der zweyten Dignität, sowol a als auch b als einen Multiplicator vorsetzet. Demnach enthält diese dritte Dignität alle Producte, die aus dreyen Buchstaben, von der Benennung a und b, entstehen können, wenn man sie in allen möglichen Ordnungen in einander multipliciret.

§. 151. Dieses kan genug seyn uns weiter zu führen. Alle mögliche Ordnungen aus vier Buchstaben, deren keiner von a oder b verschieden ist, entstehen aus allen Ordnungen dreyer dieser Buchstaben, wenn man einer jeden dieser Ordnungen sowol a als auch b vorsetzt, und eben diese Ordnungen bezeichnen alle Producte, welche man aus diesen vier Buchstaben machen kan, wenn man sie in allen möglichen Ordnungen in einander multipliciret. Es wird aber durch diese Multiplication aller möglichen Producte aus dreyen Buchstaben, erstlich durch a, und sodann auch durch b, die vier-

te Dignität der Wurzel $a+b$ hervorgebracht: weil, indem man diese Multiplication verrichtet, ein jedes der Producte, aus welchen die dritte Dignität bestehet, sowol durch a als durch b multipliciret wird. Demnach bestehet die vierte Dignität von $a+b$ aus allen Producten von vier Buchstaben, deren keiner von a oder b verschieden ist, welche entstehen können, wenn diese Buchstaben in jeder möglichen Ordnung in einander multipliciret werden.

§. 152. Und eben so bestehet die fünfte Dignität der Wurzel $a+b$ aus allen Producten aus fünf Buchstaben, deren keiner von a oder b verschieden ist, die entstehen können, wenn man diese Buchstaben in einer jeden möglichen Ordnung in einander multipliciret. Man kan die Rechnung, welche wir XIII, 148. angefangen haben, leicht fortsetzen, wenn man noch einigen Anstand bey diesen Dingen haben solte, und dadurch alles den Augen deutlich vorstellen, so der Verstand begreifen soll. Thut man dieses, so siehet man gar leicht, daß eine jede Dignität der Wurzel $a+b$ zu erhalten, man so viele Buchstaben a und b auf alle mögliche Arten nehmen müsse, als viele Einheiten der Exponent der Dignität hat, welche man schaffen soll, und daß aus denselben alle Producte zu machen seyn, welche daraus entstehen können, wenn man sie in allen möglichen Ordnungen in einander multipliciret.

§. 153. Ich will die fünfte Dignität aus $a+b$ haben, so nehme ich $aaaaa$, $aaaab$, $aaabb$, $aabbb$, $abbbb$, $bbbbb$, oder a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5. Der ersten Producte a^5 nehme ich so viele, als vielmal dieses Product aus seinem einfachen Factoren a heraus gebracht werden kan, wenn man die Ordnung der Multiplication verändert so oft man kan. Es kan aber dieses nur einmal geschehen: ich nehme also auch nur ein a^5. Ferner nehme ich der Producte a^4b so viele, als vielmal sich die einfachen Factore desselben a und b verwechseln lassen. Diese Verwechselung kan fünf mal geschehen, also nehme ich fünf a^4b. Eben so verfähret man mit den übrigen. Das Product a^3b^2 kan aus seinen einfachen Factoren a und b auf zehen verschiedene Arten entstehen, also nehme ich $10a^3b^2$, XIII, 145. Verfolgt man diese Arbeit, so bekomt man endlich die fünfte Dignität von $a+b$ welche diese ist: $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

§. 154. Will man also überhaupt die Dignität von $a+b$ haben, deren Exponent n ist, welche man gemeiniglich so ausdrücket $(a+b)^n$, so wird dieselbe:

$$a^n + \frac{n.}{1}a^{n-1}b + \frac{n.}{1}\frac{n-1.}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n.}{1}\frac{n-1.}{2}\frac{n-2.}{3}a^{n-3}b^3. \text{ und so}$$

fort. Denn dieses sind alle Producte, welche entstehen können, indem man von den Buchstaben a und b die Zahl n nimmet, wie man nur kan,

und dieselbe in allen möglichen Ordnungen in einander multipliciret: weil n die Zahl aller möglichen Multiplication ausdrücket, durch welche $a^{n-1}b$ entstehen kan, und $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}$ die Zahl derjenigen, durch welche man $a^{n-2}b^2$ erhält, und so fort. Dieses ist die Newtonische Regel eine jede Dignität einer Wurzel zu finden, welche aus zweyen Theilen bestehet.

§. 155. Hat in der Wurzel b das Zeichen —, und ist also die Wurzel $a-b$, so bekommen alle Dignitäten der b, deren Exponent ungerade ist, eben das Zeichen, die übrigen aber behalten das Zeichen +. Denn das Product $1\times-b$ ist $-b$, aber das Product $-b\times-b$ ist b^2, und das Product $-b\times b^2$ ist $-b^3$. Diese Zeichen werden durch die übrige Multiplicationen, welche die Regel vorzunehmen weiset, nicht verändert, und man kan also die Regel leicht machen, nach welcher man die Dignität, deren Exponent n ist, von der Wurzel $a-b$ findet, wenn man nur in der eben gegebenen Regel die Zeichen derjenigen Glieder verändert unter deren Factoren eine Dignität von b mit einem ungeraden Exponenten, 1 oder 3 oder 5 und so fort, vorkommet: demnach ist $(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}\cdot a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\cdot a^{n-4}b^4 - \&c.$

§. 156. Wir wollen, ehe wir weiter gehen, die Anwendung dieser Regel in einem Exempel weisen, welches zum deutlichern Verstand des folgenden vieles beytragen wird. Man soll die sechste Dignität der Zahl 11 schaffen: so theile man diese Zahl 11 in zwey bequeme Theile, welche hier 10 und 1 sind, mit welchen jede Multiplication gar leicht zu verrichten stehet, und da also hier $(a+b)^n = (10+1)^6$, und folgends in der XIII, 154. gegebenen Regel $a = 10$, $b = 1$ und $n = 6$, so mache man nach Anleitung derselben

$a^n = 10^6 =$ - - - - - - - - 1000000.

$n\times a^{n-1}b = 6\times 100000 =$ - - - - - - 600000.

$n\times\frac{n-1}{2}\times a^{n-2}b^2 = \frac{6\times 5}{2}\times 10000 =$ - - - - 150000.

$n\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times a^{n-3}b^3 = \frac{6\times 5\times 4}{2\times 3}\times 1000 =$ - - 20000.

$n\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}\times a^{n-4}b^4 = \frac{6\times 5\times 4\times 3}{2\times 3\times 4}\times 100 =$ 1500.

$n\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}\times\frac{n-4}{5}\times a^{n-5}b^5 = \frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2}{2\times 3\times 4\times 5}\times 10 =$ 60.

$n\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}\times\frac{n-4}{5}\times\frac{n-5}{6}\times a^{n-6}b^6 = \frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{2\times 3\times 4\times 5\times 6}\times 1 = 1.$

Die

Die Summe aller dieser Zahlen ist die verlangte sechste Dignität der Zahl 11, oder es ist $11^6 = 1000000 + 600000 + 150000 + 20000 + 1500 + 60 + 1$, das ist 1771561.

§. 157. Soll man an statt der $10+1$ oder 11 die Zahl $10-1$ oder 9 zur sechsten Dignität erheben, so bleiben die Zahlen alle wie wir sie gefunden haben; nur bekomt die zweyte Zahl 600000 das Zeichen —, wie auch die vierte und die sechste, und wird demnach die sechste Dignität der Zahl 9 diese $1000000 - 600000 + 150000 - 20000 + 1500 - 60 + 1 = 53144$. Es ist bey der Anwendung dieser Regeln nicht außer Acht zu lassen, was oben XIII, 58. erinnert worden ist, daß nemlich a^0 nichts anders bedeuten könne, als 1. Denn in dem gegenwärtigen Exempel, da $n=6$, wird $a^{n-6} = a^{6-6} = a^0$: und dieses könte einem ohne diese Anmerkung anstößig seyn.

§. 158. Man siehet aus diesem Exempel gar leicht, was auch aus der allgemeinen Betrachtung der Regel fließet, daß, wenn b viel kleiner ist als a, die nachfolgenden Glieder in Ansehung der vorhergehenden gar klein werden: wie denn in unserm Exempel das dritte Glied 150000 noch nicht der zehente Theil ist des ersten und andern zusammen genommen 1600000. Ist demnach das zweyte Glied b in Ansehung des ersten gar sehr klein, so kan man sich bloß an dem ersten und zweyten Gliede begnügen lassen. Und es ist in diesem Falle $(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}b$, ohne einen sonderlichen Fehler, welcher desto kleiner wird, je kleiner b in Ansehung des a ist. Eben so ist bey diesem Umstand $(a-b)^n$ fast $= a^n - na^{n-1}b$, und man fehlet, indem man dieses annimmet, desto weniger, je kleiner b in Ansehung des a ist. Ist zum Exempel $a = 1000$ und $b = 1$, und man soll die dritte Dignität von $a+b$ oder 1001 schaffen, so ist $a^n = 1000^3 = 1000000000$, und $na^{n-1}b = 3000000$. Die Summe dieser zwey Glieder kan man vor die verlangete Cubiczahl annehmen, Sie komt in der That derselben gar nahe. Die Summe der gefundenen zwey Glieder ist 1003000000 und die Cubiczahl von 1001 ist eigentlich 1003003001. Man siehet, daß der Unterschied dieser zwo Zahlen 3001 in Ansehung des Ganzen in keine sonderliche Betrachtung könne gezogen werden. Wir werden künftig diese Anmerkung zu den wichtigsten Erfindungen gebrauchen. Sie ist also nicht außer Acht zu lassen, so gering sie auch den ersten Anblick nach scheinen möchte.

Ein jedes Glied einer geometrischen Reihe zu finden.

§. 159. Wir können uns nun wieder zu der Aufgabe wenden, von wel-

welcher wir XIII, 124. abgegangen sind. Es ist diese Aufgabe bereits in einigen besondern Fällen aufgelöset worden, XIII, 125. die Sätze aber die wir eben betrachtet haben, setzen uns in den Stand, daß wir einsehen können, wie überhaupt aus zwey Gliedern einer geometrischen Reihe, deren ersteres die Einheit ist, und aus der Entfernung eines dieser Glieder von dem andern, ein jedes anders Glied dieser Reihe zu finden sey, dessen Entfernung von dem ersten Glied der Reihe ebenfals gegeben ist. Denn ob wol dieses auf mehrere Arten geschehen kan; so lassen sich doch auch die Glieder einer solchen Reihe auf eben die Weise zusammen setzen, wie nach denen XIII, 154. 155. erwiesenen Sätzen die Dignitäten einer zweytheilichten Wurzel $a+b$ oder $a-b$ aus den Theilen dieser Wurzel a und b und aus dem Exponenten der Dignität, herausgebracht werden.

§. 160. Man mag aber vor a und b annehmen was man will, und was auch e bedeuten mag; so wird durch

$$(a+b)^{0}, \quad (a+b)^{e}, \quad (a+b)^{2e}, \quad (a+b)^{3e}, \quad (a+b)^{4e} \text{ &c.}$$

immer eine geometrische Reihe vorgestellet, in welcher diese Glieder unmittelbar auf einander folgen. Denn es entstehet ein jedes Glied dieser Reihe aus den unmittelbar vorhergehenden, wenn man dieses durch $(a+b)^{e}$ multipliciret. Theilet man also den Exponenten e wie man will, zum Beyspiel, in fünf gleiche Theile, und nennet der Kürze wegen $\frac{1}{5}e = v$, so bekomt man eine andere Reihe, in welcher von der Einheit $(a+b)^{0}$ bis an das Glied $(a+b)^{e}$ fünf Glieder stehen. Diese Reihe ist

$$(a+b)^{0}, \quad (a+b)^{v}, \quad (a+b)^{2v}, \quad (a+b)^{3v}, \quad (a+b)^{4v}, \quad (a+b)^{5v}$$

und in derselben ist $5v = e$. Auf eben die Art können aus der ersten noch andere geometrische Reihen herausgebracht werden, indem man e nach Belieben theilet, und die Theile multipliciret: das ist, indem man nach Belieben nimt $v = \frac{1}{2}e$, oder $v = \frac{2}{3}e$, oder $v = \frac{3}{4}e$, oder $v = 5e$, oder was man sonst annehmen will.

§. 161. Es werden aber alle diese Reihen, welche man dergestalt aus der zuerst angenommenen heraus bringen kan, indem man an statt des Exponenten e einen andern v setzet, auch selbst durch die erstere Bezeichnung

$$(a+b)^{0}, \quad (a+b)^{e}, \quad (a+b)^{2e}, \quad (a+b)^{3e}, \quad (a+b)^{4e} \text{ &c.}$$

ausgedrückt, wenn man sich nur vorbehält, den Werth oder die Bedeutung des Buchstaben e nach Belieben zu verändern. Denn dieses komt mit dem auf eines hinaus, was man thut, wenn man an statt desselben v setzet, dessen Werth aus dem e so oder so bestimmet ist. Ja, wenn man setzet $e = 1$, und dieser Einheit nicht eine gewisse bestimte Größe giebt, sondern sich vorbehält sie anzunehmen wie man will, oder nachdem man sie von dieser

oder

oder jener Größe angenommen hat, hernach nach Belieben zu verändern: so können die Reihen sämtlich aufs aller einfachste auf diese Art vorgestellet werden:

$$(a+b)^0,\ (a+b)^1,\ (a+b)^2,\ (a+b)^3,\ (a+b)^4 \text{ \&c.}$$

dadurch wird das Glied der Reihe, dessen Entfernung von dem ersten durch die ganze Zahl m ausgedrückt wird, $(a+b)^m$; und wenn eine andere ganze Zahl n, welche sich auf eben die unbestimte und nach Belieben anzunehmende Einheit beziehet, die Entfernung eines andern Gliedes der Reihe von dem ersten $(a+b)^0$ anzeigen soll; so wird dieses andere Glied durch $(a+b)^n$ vorgestellet. In beyden Ausdrücken kan auch vor $+b$ gesetzt werden $-b$. Die Entfernungen aber von dem ersten Gliede werden immer so gezehlet, daß dieses erste Glied $(a+b)^0$ ausgeschlossen bleibt, wie dieses die Natur der Sache erfordert.

§. 162. Es ist aber nach den erwiesenen Sätzen:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \text{\&c.}$$

und

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2 + \text{\&c.}$$

welche Reihen dergestalt fortgesetzt werden müssen, wie wir oben XIII. 154. 155. gesehen haben. Es sind auch hier die Einheiten, auf welche sich die Zahlen m und n beziehen, ganz und gar willkührlich, und man kan sie von der Größe annehmen, welche zu den Zweck, den wir vor uns haben, der bequemste ist. Man muß sich nemlich vorstellen, daß n so viel bedeute als $n.1$, wie auch daß $m = m.1$, und daß die hier gebrauchte und durch 1 bezeichnete Einheit, zwar an sich von beliebiger Größe, doch aber bey der einen Zahl n nicht größer oder kleiner sey, als bey der andern, m. Man verkleinere also die nach Belieben anzunehmende Einheit, indem man sie durch die Zahl m dividiret, oder in so viele gleiche Theile theilet, als viele Einheiten in der Zahl m enthalten sind. So wird diese neue Einheit $\frac{1}{m}$,

und wenn man dieselben in den beyden Ausdrücken $n.1$ und $m.1$ an statt der in denselben befindlichen 1 setzet, so erhält man an statt des ersten $n.\frac{1}{m}$ oder $\frac{n}{m}$, und an statt des zweyten $m.\frac{1}{m}$ oder $\frac{m}{m}.1$, das ist 1. Es kan dem-

nach überall in den eben wiederhohlten Ausdrücken, XIII, 162. an statt des Buchstaben n der Bruch $\frac{n}{m}$, und an statt des Buchstaben m, die 1 gesetzt werden.

Dieser Veränderung ohngeachtet, wird sich die Entfernung des erstern Gliedes, welches durch diese Veränderung wird $(a+b)^{n:m}$, von dem erstern Glied der Reihe $(a+b)^{\circ}$ zu der Entfernung des zweyten, welches nunmehro durch $(a+b)^{1}$ ausgedrückt wird, von eben dem ersten Gliede $(a+b)^{\circ}$ wie n zu m; und die letztere Entfernung zu der erstern, wie m zu n verhalten.

§. 163. Man kan in denen zwo Zahlreihen XIII, 162. durch welche die Dignitäten $(a+b)^{n}$ und $(a+b)^{m}$ ausgedrückt werden, ebenfals an statt n, den Bruch $\frac{n}{m}$, und an statt m die 1 schreiben. Weil aber dadurch die erstere dieser Reihen ein etwas verworrenes Ansehen bekommen möchte; so thut man am besten, wenn man sich merket, daß, wenn $\frac{n}{m}$ ein würklicher Bruch ist, dennoch $(a+b)^{n:m}$ wie auch $(a-b)^{n:m}$ durch eben die Regeln XIII, 154. 155. herausgebracht werden, indem man nur überall an statt des daselbst gebrauchten Exponenten n den Bruch $\frac{n}{m}$ setzet. Woraus folgt, daß diese Regeln richtig sind, es mag der in denselben mit n bezeichnete Exponent ganz oder gebrochen seyn. Setzt man aber in

$$(a+b)^{m} = a^{m} + \frac{m}{1} a^{m-1}b + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2} \cdot a^{m-2}b^{2} + \text{&c.}$$

anstatt m die Einheit, so erhält man

$$(a+b)^{m} = a + a^{\circ}b + 0 \cdot a^{-1}b^{2} = a+b,$$

denn alle nachfolgende Glieder verschwinden, weil sie eben so wol als das dritte mit der 0 multipliciret werden müssen. Dieser sehr einfache Ausdruck des einen Gliedes, welcher dadurch erhalten wird, daß man an statt der Einheit $\frac{1}{m}$ setzet, ist die Ursache dieser Veränderung, da man sich sonst einer jeden andern Einheit eben sowol hätte bedienen können.

§. 164. Wenn nemlich in einer von der Einheit angehenden geometrischen Reihe ein Glied gegeben ist, welches von dieser Einheit um so viele Glieder entfernet seyn soll, als viele Einheiten in der Zahl m enthalten sind, und man will ein anders Glied dieser Reihe haben, dessen Entfernung von dem ersten Glied der Reihe durch die Zahl n ausgedrückt wird: so darf

man

man nur seßen das erste dieser Glieder sey $a+b$, und das zweyte sey $(a+b)^{n:m}$, oder das erste sey $a-b$, und das zweyte $(a-b)^{n:m}$; sodann aber dieses zweyte Glied, nach Newtons Regel, in eine Reihe auflösen, indem man überall den durch $\frac{n}{m}$ angezeigten Bruch an statt des Exponenten n in dieser Regel seßet. Alsdenn ist $a+b$ oder $a-b$ gegeben, man kan aber einen dieser Theile a oder b nach Belieben annehmen, und den andern dadurch bestimmen: wiewol in der Ausübung gar viel darauf ankömt, was man dem a vor einen Werth giebt, und die Arbeit dadurch sehr verkürzt werden kan, wenn man die Bedeutung dieses Buchstabens geschickt annimt, wie dieses ein oder anders Beyspiel zeigen wird.

§. 165. Es wird aber auch die Arbeit dadurch etwas erleichtert, wenn man in der Regel vor a^{n-1} schreibt $\frac{a^n}{a}$, und vor a^{n-2} seßet $\frac{a^n}{a^2}$, und so in den übrigen Gliedern der Reihe XIII, 58. Denn dadurch wird a^n ein gemeinschaftlicher Factor aller Glieder der Reihe, und man kan die Regel XIII, 154. also schreiben:

$$(a+b)^n = a^n \times \left(1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{b}{a} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3} + \text{&c.}\right.$$

Die Regel zu der negativen b aber folgender gestalt:

$$(a-b)^n = a^n \times \left(1 - \frac{n}{1}\cdot\frac{b}{a} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3} + \text{&c.}\right.$$

Man siehet gar leicht, daß durch diesen neuen Ausdruck die Regeln selbst nicht geändert werden; die Rechnungen aber, welche darauf gegründet werden, fallen etwas leichter aus.

§. 166. Es sey, zum Beyspiel, die Zahl 5 gegeben, und man soll das zweyte Glied einer geometrischen Reihe finden, deren erstes Glied die Einheit, das dritte aber die gegebene Zahl 5 ist. Seßt man nun $a=4$, und $b=1$, so wird $a+b=5$, und die Reihe stehet also:

$$(a+b)^0,\ (a+b)^{1:2},\ (a+b)$$

denn es ist hier $m=2$, und $n=1$, folgends $\frac{n}{m}=\frac{1}{2}$. Seßet man nun alles dieses in der Regel an den gehörigen Ort, so wird $a^n = a^{1:2} = 2$;

$\frac{b}{a} = \frac{1}{4}$, $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{16}$, $\frac{b^3}{a^3} = \frac{1}{64}$ und so fort.

Ferner $\frac{n}{1} = \frac{1}{2}$;

$n - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$, folgends $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4}$,

$n - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$, folgends $\frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6}$, und so fort.

Bringt man nun alles dieses in die gehörige Verbindung, so erlangt man das verlangte Glied, welches, wie man leicht siehet, nichts anders als die Quadratwurzel der gegebenen Zahl 5 ist, folgender gestalt:

$$\sqrt{5} = 2\,(1 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{1}{64} - \text{\&c.})$$

Die Reihe nimt kein Ende; man erhält aber die gesuchte Wurzel desto genauer, je mehr Glieder derselben genommen werden, weil diese Glieder immer kleiner und kleiner werden, und endlich kaum mehr in Betrachtung kommen können. Die Brüche müssen gehörig multipliciret, und alsdenn vereiniget werden, welches am bequemsten geschiehet, wenn man sie sämtlich in zehentheilichte Brüche verwandelt. Wir können uns aber hierbey nicht aufhalten.

§. 167. Es sey das vierte Glied einer geometrischen Reihe zu finden, deren sechstes Glied die Zahl 245 ist, wenn die Reihe noch immer von der Einheit anfängt. Es ist hier $m = 5$, und $n = 3$, und die Reihe stehet also:

$(a+b)^0$, $(a+b)^{1:5}$, $(a+b)^{2:5}$, $(a+b)^{3:5}$, $(a+b)^{4:5}$, $(a+b)^{5:5}$

Das letzte Glied dieser Reihe $a+b$ ist der gegebenen Zahl 245 gleich. Man setze $a = 243$, so wird $b = 2$, und weil in der Regel vor n geschrieben werden muß $\frac{3}{5}$, so ist zuerst $a^{3:5}$ zu finden. Es bedeutet aber $a^{3:5}$ das vierte Glied einer geometrischen Reihe, deren sechstes Glied die $a = 243$ ist, und dieses Glied ist 27, wie man aus der Reihe leicht siehet, die hier stehet:

1, 3, 9, 27, 81, 243

Ferner ist $\frac{b}{a} = \frac{2}{243}$, woraus ferner $\frac{b^2}{a^2}$, $\frac{b^3}{a^3}$ und so fort gemacht werden können. Endlich ist $n = \frac{3}{5}$,

$n - 1 = \frac{3}{5} - \frac{5}{5} = -\frac{2}{5}$, folgends $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{5}$

$n - 2 = \frac{3}{5} - \frac{10}{5} = -\frac{7}{5}$, folgends $\frac{n-2}{3} = -\frac{7}{15}$

$n - 3 = \frac{3}{5} - \frac{15}{5} = -\frac{12}{5}$, folgends $\frac{n-3}{4} = -\frac{3}{5}$

und

und so fort. Alles dieses nach Anweisung der Regel gehörig mit einander verknüpft, giebt das gesuchte Glied der Reihe desto genauer, je weiter man die Reihe fortsetzet.

§. 168. Wäre, indem alles übrige wie vorher geblieben, die gegebene Zahl nicht 245, sondern nur 240 gewesen, so hätte mit viel größern Vortheil diese Zahl als $a - b$ angesehen, und nach der zweyten Regel verfahren werden können. Man lasse a auch hier 243 bedeuten, so wird $b = 3$, und $a^{3:5}$ ist auch nunmehro 27. Aber $\frac{b}{a}$ wird $\frac{3}{243}$, woraus $\frac{b^2}{a^2}$, $\frac{b^3}{a^3}$ und so fort, zu machen sind. Alles übrige bleibt wie in dem vorhergehenden Absatz: die Zusammensetzung selbst aber, welche die zweyte Regel angiebt, ist nicht schwerer als die nach der ersten geschiehet.

§. 169. Ueberhaupt muß, wenn der Bruch $\frac{n}{m}$ an statt des n der Regel gesetzt werden muß, anstatt $n - 1$ gebraucht werden $\frac{n-m}{m}$,

anstatt $n - 2$ muß kommen $\frac{n-2m}{m}$,

anstatt $n - 3$ aber dieses $\frac{n-3m}{m}$

und so fort. Ist nun der Nenner m in Ansehung des Zehlers n sehr groß, so daß der Bruch $\frac{n}{m}$ selbst einen sehr geringen Theil der Einheit enthält, so ist $n - m$ von $- m$ kaum unterschieden, und noch viel weniger $n - 2m$ von $- 2m$, $n - 3m$ von $- 3m$, und so fort. Man kan also diesen Buchstaben n gar weglassen, und zwar mit desto größern Recht je kleiner n ist, und also in der Regel schreiben

anstatt $n - 1$ - - - - $- \frac{m}{m} = - 1$

anstatt $n - 2$, - - - - $- \frac{2m}{m} = - 2$

anstatt $n - 3$ - - - - $- \frac{3m}{m} = - 3$,

und so fort. Betrachtet man dieses, so wird in der Regel gebraucht, anstatt $\frac{n}{1}$

$$\frac{n}{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n}{m}$$
$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n}{2m}$$
$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot + \frac{n}{3m}$$
$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} - \frac{n}{4m}$$

wodurch die Arbeit vor den gegenwärtigen Fall gar sehr erleichtert wird.

Begriffe der Logarithmen.

§. 170. Man hat auf die Betrachtung, welche ein jedes Glied einer geometrischen Reihe, die von der Einheit anfängt, aus einem gegebenen Glied der Reihe und der Entfernung desselben von der Einheit, zu finden lehret, eine besondere Rechnungsart gegründet, welche nicht nur in vielen Fällen leichter ist als die gemeine; sondern auch verschiedene Aufgaben zu lösen im Stande ist, die ohne derselben eine ungemeine Schwierigkeit haben würden. Dieses wird vermittelst der so genanten **Logarithmen** verrichtet, welche man im teutschen **Verhältnißzahlen** nennen könte. Diese Zahlen sind zwar bereits gefunden: es kan uns aber bey dem Gebrauch derselben ein gar großes Licht geben, wenn wir sie auch selber zu finden wissen. Wie dieses ohne große Weitläuftigkeit geschehen könne, lehren die bisherige Betrachtungen. Wir wollen diese Materie in eben der Deutlichkeit abzuhandeln trachten, welcher wir uns bisher immer beflissen haben.

§. 171. Man stelle sich nochmals eine geometrische Reihe unter der allgemeinen Bezeichnung vor:

$$1, a^n, a^{2n}, a^{3n}, a^{4n}, a^{5n}, a^{6n} \cdot \cdot \cdot a^{mn},$$

so verhält sich ein jedes Glied derselben, welches man annehmen will, zu den unmittelbar folgenden, wie dieses letztere Glied zu demjenigen, welches unmittelbar nach demselben stehet. Es ist $1 : a^n = a^n : a^{2n}$, und $a^n : a^{2n} = a^{2n} : a^{3n}$, und so überall. Dieses ist aus den ersten Begriffen klar. Denn eben diese Gleichheit der Verhältniß eines jeden Gliedes zu demjenigen, welches unmittelbar auf dasselbe folget, machet, daß die Glieder eine geometrische Reihe mit einander machen. Folgends entsteht die Verhältniß eines jeden Gliedes der Reihe zu demjenigen, welches von demselben das zweyte ist,

ist, als $a^n : a^{3n}$, wenn man die Verhältniß eines Gliedes der Reihe, welches man annehmen will, zu demjenigen so unmittelbar auf dasselbe folget, als $1 : a^n$, zweymal setzet; und jene Verhältniß ist zweymal so hoch, als diese, VIII, 2. Dadurch entsteht die Verhältniß $1 : a^{2n}$, und die Verhältniß $a^n : a^{3n}$ ist dieser Verhältniß $1 : a^{2n}$ gleich. Man siehet leicht, daß eben dieses richtig seyn werde, wenn man diese Verhältnisse verkehrt setzet. Die Verhältniß $a^{3n} : a^n$ ist ebenfals zweymal so hoch, als die Verhältniß $a^n : 1$.

§. 172. Auf eben die Art siehet man, daß die Verhältniß eines jeden Gliedes der Reihe zu demjenigen, so von demselben um drey Glieder entfernet ist, als $a^n : a^{4n}$, entstehe, wenn man die Verhältniß eines Gliedes eben der Reihe zu dem unmittelbar folgenden $1 : a^n$ dreymal nimt, denn wenn man die Verhältniß $1 : a^n$ dreymal zusammen setzet, so bekommet man die Verhältniß $1 : a^{3n}$, und diese ist mit der vorigen $a^n : a^{4n}$ einerley. Eben so entstehet auch die Verhältniß eines jeden Gliedes der Reihe zu demjenigen, so von demselben das vierte ist, wenn man die Verhältniß eines jeden Gliedes eben der Reihe viermal zu sich selbst setzet und so fort. Auch dieses ist richtig, wenn man die Verhältnisse verkehrt nimt.

§. 173. Betrachtet man nun die Verhältniß eines Gliedes einer solchen Reihe zu demjenigen, so unmittelbar auf dasselbe folget, welche allezeit der Verhältniß $1 : a^n$ gleich ist, als einfach, so muß man die Verhältniß eines jeden Gliedes der Reihe zu demjenigen, welches von demselben um zwey Glieder entfernet ist, als $a^n : a^{3n}$, als zweymal so hoch ansehen, weil sie durch die Zusammensetzung zwoer Verhältnisse, die der ersten gleich sind, entstehet; die Verhältniß eines jeden Gliedes zu demjenigen, so von demselben um 3 Glieder entfernet ist, muß man bey eben diesen Bedingungen dreymal so hoch nennen, und so fort, VIII, 7. Die Entfernung des zweyten Gliedes der Verhältniß von dem ersten, in der angenommenen Reihe, zeiget allezeit, wie oft die Verhältniß eines Gliedes derselben zu dem unmittelbar folgenden, zusammen zu setzen sey, damit die gedachte Verhältniß heraus komme, oder wie hoch diese Verhältniß sey. Ist ein Glied der Reihe, welches wir q nennen wollen, von a^{2n} um eine Zahl von Gliedern entfernet, welche durch m ausgedrücket wird, so muß die Verhältniß $1 : a^n$ so oft zusammen gesetzet werden, als viele Einheiten in m enthalten sind, damit eine Verhältniß heraus gebracht werde, welche der Verhältniß $a^{2n} : q$ gleich sey. Und eben so oft muß die Verhältniß $a^n : 1$ zusammen gesetzet werden, wenn man die Verhältniß $q : a^{2n}$ heraus bringen will. Dieses letztere hat in dergleichen Fällen immer statt, ob ich zwar nicht nöthig finde, es allezeit zu erinnern.

§. 174.

§. 174. Es gründen sich also diese Benennungen auf die Reihe, welche man angenommen, oder vielmehr auf die Verhältniß $1 : a^n$, aus welcher man die ganze Reihe bestimmet hat; welche Verhältniß man als die einfache betrachtet. In Ansehung dieser Verhältniß nennet man die Verhältniß $1 : a^{2n}$ gedoppelt, oder zweymal so hoch, und die Verhältniß $1 : a^{3n}$ dreyfach, oder dreymal so hoch. Bey einer andern einfachen Verhältniß müsten diese Namen ohnfehlbar geändert werden. Zum Exempel, wenn man vor a^n die Zahl 2 schreibt, so wird die Reihe nachfolgende 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 u. s. f. Betrachtet man nun die Verhältniß 1 : 2, welche der Verhältniß 2 : 4 oder 4 : 8 gleich ist, als einfach, so ist die Verhältniß 1 : 4 oder 2 : 8 oder 4 : 16 u. s. w. als gedoppelt, und die Verhältniß 1 : 8 oder 2 : 16 oder 4 : 32 u. s. w. als dreyfach anzusehen. Sie ist nemlich zwey oder dreymal so hoch als diese einfache Verhältniß. Nach eben diesen Gesetzen sind die Verhältnisse zu benennen, welche entstehen, indem man die einfache Verhältniß vier, fünf, sechs und mehrmal zusammen setzet. Nimmet man aber eine andere Verhältniß zum Grunde, welche man als die einfache betrachtet, und aus derselben die geometrische Reihe machet, als diese 1 : 4, wodurch nachstehende Reihe komt:

1, 4, 16, 64, 256, 1024, u. s. f.

so ist die Verhältniß 1 : 4, welche in Ansehung der vorigen Verhältniß 1 : 2 zwey mal so hoch war, nunmehro nur einfach, die Verhältniß 1 : 16, welche vorhero als viermal so hoch angesehen wurde, ist nunmehro nur zweymal so hoch, und so gehet es immer fort. Die Sache ist natürlich. Nachdem dasjenige groß oder klein ist, welches man vor die Einheit annimt, wird ein jedes Ding, so man durch dieselbe Einheit ausmisset, bald mit einer kleinern bald mit einer größern Zahl ausgedrückt.

§. 175. Setzet man zwischen jede zwey Glieder der geometrischen Reihe, die mittlere Proportionalzahl, so bekommet man eine neue geometrische Reihe, welche aus dem vorigen dergestalt auszudrücken ist:

$1, a^{n:2}, a^n, a^{3n:2}, a^{2n}, a^{5n:2}, a^{3n}$, u. s. f.

Die Glieder, deren Exponenten in Gestalt der Brüche stehen, sind die Glieder, welche man zwischen die Glieder der vorigen Reihe gesetzet hat. Und man siehet leicht, daß dadurch wieder eine geometrische Reihe herausgebracht werde, wenn man das erste und zweyte Glied, oder die Verhältniß $1 : a^{n:2}$ zum Grunde nimmet, und aus derselben eine geometrische Reihe zu machen anfängt. Denn dadurch wird eben diejenige herausgebracht, welche hier stehet.

§. 176. Behält man nun im übrigen dasjenige, so im Anfang angenom-

nommen worden ist, und betrachtet die Verhältniß $1 : a^n$ noch als einfach, so kan man die Verhältniß $a^n : 2$ nicht anders als eine halb so hohe Verhältniß nennen, und eben diesen Namen muß man nunmehro der Verhältniß eines jeden Gliedes gegen dasjenige, so unmittelbar auf dasselbe folgt, geben. Die Verhältniß $a^n : a^{3n:2}$ ist halb so hoch als die Verhältniß $a^n : a^{2n}$, welche als die einfache und ganze Verhältniß betrachtet wird. Man nennet eine dergleichen Verhältniß im lateinischen eine rationem subduplicatam.

§ 177. Man kan aber auch zwischen jede zwey Glieder einer geometrischen Reihe, zwey oder drey, oder mit einem Wort, so viele Glieder setzen, als man will, welche mit denjenigen, zwischen welche man sie gesetzet hat, wieder eine Reihe geben, und in diesem Fall entstehet allemal eine neue geometrische Reihe, wenn man eben dergleichen Zwischensätze bey allen Gliedern der vorigen vornimmet. Wir lassen uns begnügen, zwischen die Glieder der erst bezeichneten Reihe, zwey andere zu setzen, welche die angegebene Eigenschaften haben, so stehet die neue Reihe in folgender gestalt:

$$1,\ a^{n:3},\ a^{2n:3},\ a^n,\ a^{4n:3},\ a^{5n:3},\ a^{2n},\ a^{7n:3},\ a^{8n:3},\ a^{3n}.$$

Weil hier wieder die Verhältniß $1 : a^n$ oder $a^n : a^{2n}$ als die einfache Verhältniß angesehen wird, und die Verhältniß $1 : a^{n:3}$ oder $a^{n:3} : a^{2n:3}$ oder überhaupt die Verhältniß eines jeden Gliedes der Reihe zu demjenigen, so unmittelbar auf dasselbe folget, dreymal zusammen gesetzet werden muß, damit die gedachte einfache Verhältniß $1 : a^n$ herauskomme: so muß man die Höhe der Verhältniß $1 : a^{n:3}$ und einer jeden andern, die ihr gleich ist, ansehen, als ob sie entstanden wäre, indem man die Höhe der einfachen Verhältniß in drey gleiche Theile zertheilet hat. Man nennet derowegen eine solche Verhältniß, indem man sie auf die Verhältniß beziehet, welche man als einfach und ganz ansiehet, eine dreymal niedrigere Verhältniß, und in eben dem Verstand spricht man eine vier oder fünfmal niedrigere Verhältniß. Hieraus verstehet man leicht, was rationes subtriplicatae, subquadruplicatae, subquintuplicatae und submultiplicatae quaevis, heißen.

§. 178. Aus diesen Gründen folget dasjenige, so wir von dem Gebrauch der Logarithmen oder den Verhältnißzahlen zu sagen haben, unmittelbar; und man siehet gar leicht, warum sie so genennet werden. Man stelle sich eine beliebige geometrische Reihe vor, welche man von der Einheit anfangen kan, ob zwar dieses nicht unumgänglich nöthig ist. Wir wollen dazu eine der leichtesten annehmen, nemlich 1, 2, 4, 8, 16 und so fort. Denn es ist leicht sie fort zu setzen, so weit man will. Man nehme in derselben zwey Glieder nach Belieben an, und stelle sich die Verhältniß des ersten dieser Glieder zu dem zweyten als einfach vor. Es ist also wieder nicht

nöthig, daß das erste Glied eben die Einheit sey, doch hat man einige Bequemlichkeit davon, wenn man auch dieses annimt. Wir wollen es thun, und uns also die Verhältniß 1:8 als die einfache Verhältniß vorstellen. Sobald man dieses angenommen hat, so ist die Höhe der Verhältniß des ersten Gliedes der Reihe zu dem zweyten 1:2, als der dritte Theil der Höhe der erstern Verhältniß 1:8 anzusehen, und die Höhe der Verhältniß 1:4 muß als $\frac{2}{3}$ der Höhe eben der Verhältniß 1:8 betrachtet werden, welche man als einfach angenommen hat, und so weiter. Schreibt man demnach also:

1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256,	512
0,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{2}{3}$,	1,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{5}{3}$,	2,	$\frac{7}{3}$,	$\frac{8}{3}$,	3

so zeiget jede unter einem Glied der geometrischen Reihe stehende Zahl an, wie die Verhältniß des ersten Gliedes der Reihe, zu dem Gliede, unter welchem die Zahl stehet, aus der einfachen Verhältniß 1:8 entstehe. Nemlich der unter dem Glied 2 stehende Bruch $\frac{1}{3}$ zeiget, daß die Verhältniß 1:2 entstehe, indem man die Höhe der einfachen Verhältniß 1:8 in drey gleiche Theile theilet, aus deren Zusammensetzung die Höhe der Verhältniß 1:8 entstehet. Der unter der 4 stehende Bruch $\frac{2}{3}$ zeiget an, daß man die Höhe der einfachen Verhältniß 1:8 in drey gleiche Theile zerfällen, und daß man zween dieser Theile zusammen setzen müsse, die Höhe der Verhältniß 1:4 heraus zu bringen. Eben so zeiget der Bruch $\frac{7}{3}$ unter 128 an, daß man die Höhe der einfachen Verhältniß 1:8 in drey gleiche Theile zerfällen, und sieben solche Theile zusammen setzen müsse, damit die Höhe der Verhältniß 1:128 entstehe.

§. 179. Es misset oder zehlet also jede Zahl, welche unter einem Gliede der geometrischen Reihe stehet, würklich die Höhe der Verhältniß der Einheit zu dem Glied der Reihe, unter welchem sie stehet, und das Maaß, dessen man sich dazu bedienet, ist die Höhe der Verhältniß, welche man als ganz und einfach angenommen hat. Die unter den Gliedern der geometrischen Reihe stehende Zahlen sind demnach die würklichen Logarithmen oder Verhältnißzahlen, welche die Verhältniß der Einheit zu den Gliedern, unter welchen sie stehen, ausdrücken. Die Zahl $\frac{1}{3}$ ist der Logarithmus der Verhältniß 1:2, die Zahl $\frac{2}{3}$ ist der Logarithmus der Verhältniß 1:4, und so weiter. Alles dieses ist wieder richtig, wenn man diese Verhältnisse umkehret, und machet, daß die größern Glieder vorher gehen, und die kleinern darauf folgen.

§. 180. Man pfleget eben diese Zahlen auch Logarithmen der Glieder der geometrischen Reihe selbst zu nennen, unter welchen sie stehen, und dieser

ser Benennung zufolge müssen wir sagen: es sey bey der angenommenen einfachen Verhältniß 1:8 die Zahl 2 der Logarithmus zu 64. Dieses ist etwas undeutlich gesprochen. Denn was soll dieses sagen, 2 sey die Zahl der Verhältniß zu 64 oder von 64? Eine jede Verhältniß erfordert ja zwey Glieder. Es verhält sich dieses in der That nicht anders, aber es wird in diesem Falle, wenn man den Logarithmus einer Zahl nennet, das erste Glied der Verhältniß verschwiegen, weil es allezeit die Einheit ist, und nach dieser Erinnerung man es in allen Fällen anzugeben weiß. Kurz, der Logarithmus einer Zahl heißet nichts anders, als der Logarithmus der Verhältniß der Einheit zu dieser Zahl oder der Zahl zur Einheit. In unserm Exempel ist $\frac{7}{3}$ der Logarithmus zu 128, das ist, der Logarithmus der Verhältniß 1:128 oder 128:1.

§. 181. Man siehet übrigens leicht, daß man die Logarithmen der Zahlen auch durch Brüche von andern Benennern ausdrücken könne, wenn nur diese Brüche denjenigen, durch welche man sie anfangs ausgedrücket hat, gleich genommen werden. Wir wollen dieses thun, und uns dazu der Decimalbrüche bedienen: so bekommen die Logarithmen, welche wir zum Exempel angenommen haben, mit denjenigen, die bereits berechnet sind, und derer man sich gemeiniglich bedienet, eine desto größere Aehnlichkeit.

Zahl.	Logarithmus.
1	0, 000
2	0, 333
4	0, 667
8	1, 000
16	1, 333
32	1, 667
64	2, 000
128	2, 333
256	2, 667
512	3, 000
1024	3, 333
2048	3, 667
4096	4, 000

Es ist bey einer Tafel, welche bloß zum Exempel dienen soll, nicht nöthig, daß wir die Logarithmen genauer ausdrücken. Der Logarithmus von 2 ist

eigentlich $\frac{1}{3} = 0,333333$, und so fort ohne Ende, und derjenige, welchen wir gesetzt haben 0, 333, ist zu klein. Hingegen ist der Logarithmus von 4 eigentlich 0, 6666 und so immer fort ohne Ende, und demnach ist derjenige, welchen wir in die Tafel gebracht haben 0, 667 etwas zu groß. Es kan aber dieses keinen sonderlichen Fehler in der Anwendung bringen, wenigstens erreichen wir unsern gegenwärtigen Zweck durch die Tafel, wie sie ist, vollkommen.

§. 182. Es ist gar leicht aus einer solchen Tafel den Logarithmus einer jeden Verhältniß zu finden, deren Glieder unter den Zahlen der Tafel vorkommen. Denn wenn erstlich das vordere Glied der Verhältniß kleiner ist als das hintere, als wenn die gegebene Verhältniß diese ist 4:512, deren Glieder beyde in der Tafel vorkommen, so suche man nur den Logarithmus des vordern Gliedes 4, welcher ist 0, 667, wie auch den Logarithmus des hintern Gliedes 512, dieser ist 3, 000. Man ziehe den Logarithmus des vordern Gliedes von dem Logarithmus des hintern ab, der Unterschied 2, 333 ist der Logarithmus der Verhältniß 4:512. Denn der Logarithmus dieser Verhältniß wird aus dem Abstand des vordern Gliedes derselben von dem hintern in der Tafel ermessen, und die Zahl, welche diese Entfernung ausdrücket, ist eben der Logarithmus der gegebenen Verhältniß, XIII, 173. Nun wird der Abstand des ersten Gliedes 4 von der Einheit, durch den Logarithmus desselben 0, 667 ausgedrücket, wie aus der Verfertigung der Tafel klar ist, und den Abstand des letztern Gliedern 512 von der Einheit zeiget ebenfals der Logarithmus desselben 3, 000 an. Es wird also der Abstand des zweyten Gliedes der Verhältniß 4:512 von dem ersten gefunden, wenn man von der Entfernung des zweyten Gliedes von der Einheit, die Entfernung des ersten Gliedes von der Einheit abziehet, und der Ueberschuß von dieser Subtraction ist der gesuchte Logarithmus der gegebenen Verhältniß. Zehlet man nun in der Tafel nach, so siehet man deutlich, daß in derselben die Zahl 512 von der 4 um 2, 333 oder um $2\frac{1}{3}$ Glieder entfernet sey, wenn man sich nur erinnert, daß man die Verhältniß eines jeden Gliedes der geometrischen Reihe zu demjenigen, so von demselben das dritte ist, als einfach angenommen hat, XIII, 178. woraus folget, daß man die Entfernung eines Gliedes von demjenigen, so unmittelbar vorher gehet, durch $\frac{1}{3}$ ausdrücken müsse. Es stehen von 4 an bis 512 in der Tafel eigentlich 7 Glieder, die Entfernung also der Zahl 512 von 4 beträgt $\frac{7}{3}$, das ist $2\frac{1}{3}$, und dieses ist der gefundene Logarithmus der Verhältniß 4:512. Man kan zur deutlichern Einsicht dieser Dinge, mit andern Zahlen eben dergleichen Versuche anstellen.

§. 183.

§. 183. Ist aber zweytens das vordere Glied der Verhältniß größer als das hintere, so findet man den Logarithmus desselben zwar ebenfals nach der gegebenen Regel. Allein weil in diesem Fall auch der Logarithmus des vordern Gliedes größer ist als der Logarithmus des hintern, so kan man jenen nicht von diesem abziehen. Man wird also zwar den kleinern Logarithmus von dem grösten abziehen, dem Ueberschuß aber das Zeichen — beysetzen müssen, wenn man den Logarithmus der gegebenen Verhältniß heraus bringen will. Mit einem Wort, wenn der Logarithmus der Verhältniß 4:512, wie wir ihn angenommen haben, 2,333 ist, so ist der Logarithmus der Verhältniß 512:4 zwar von eben der Größe, er hat aber das gegenseitige Zeichen, und wenn man jenen als mit + bezeichnet sich vorstellet, so ist der Logarithmus der Verhältniß 512:4 dieser, — 2,333; bezeichnet man aber den letztern Logarithmus mit +, so muß der erstere das Zeichen — haben.

§. 184. Es ist nicht schwer dieses in ein vollkommenes Licht zu setzen. Die Zahl 4 ist in der Tafel von 512 um so viele Glieder entfernet, als viele der Glieder sind, um welche die letztere 512 von der erstern 4 entfernet ist. Also kan der Logarithmus der Verhältniß 512:4 von dem Logarithmus der Verhältniß 4:512 der Größe nach nicht verschieden seyn. Allein wenn man in der Tafel von 4 bis an 512 zehlet, so zehlet man $2\frac{1}{3}$ Glieder vorwärts, und von 512 bis an 4 stehen eben so viele Glieder rückwärts. Demnach ist der Abstand des Gliedes 4 von 512 mit — zu bezeichnen, wenn man den Abstand des Gliedes 512 von 4 sich als mit + bezeichnet, vorstellet, und umgekehret.

§. 185. Hieraus siehet man so gleich, daß, da wir bey Verfertigung unserer Tafel, vor den Logarithmus der Verhältniß 1:8 die Einheit angenommen haben, im Gegentheil der Logarithmus der Verhältniß 8:1, in welcher die Glieder der vorigen in verkehrter Ordnung stehen, — 1 seyn werde, und daß, da der Logarithmus der Verhältniß 1:16 war 1,333 oder $1\frac{1}{3}$, im Gegentheil der Logarithmus 16:1 seyn werde — 1,333, oder — $1\frac{1}{3}$, und so in allen übrigen Fällen. Siehet man aber den Logarithmus der Verhältniß 8:1 oder einer jeden andern, bey welcher das zweyte Glied der Einheit ist, als mit + bezeichnet an, so bekomt der Logarithmus der Verhältniß 1:8, das gegenseitige Zeichen —.

§. 186. Dieses kan uns weisen, wie die Logarithmen der Brüche zu bestimmen sind, welche weniger sind als 1, und uns einen Zweifel benehmen, welcher in der Anwendung vorfallen kan, wenn wir auf Logarithmen kommen, welche mit — bezeichnet sind, und welche zu solchen Verhältnis-

sen gehören, deren vorderstes Glied nach unserm Vortrag, die Einheit ist. Da in diesem Fall das zweyte Glied kleiner seyn muß als die Einheit, so kan es scheinen, als ob solche Logarithmen eine Tafel erforderten, welche vor die Einheit, in die Brüche zurück geführet ist. Und in der That verhält sich die Sache so: wir werden aber so gleich zeigen, daß eine dergleichen Tafel, als diejenige ist, welche wir zum Exempel hierher gesetzet haben, gar wohl die Stelle derselben vertreten kan.

§. 187. Man führe nemlich die geometrische Progression 1:2 vor die Einheit zurück, so werden die Glieder derselben $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, und so fort, und die Progression stehet zu beyden Seiten der Einheit in folgender Gestalt:

$$\frac{1}{64},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64.$$

Wenn man nur einiger maßen darauf Acht hat, wie die Glieder einer geometrischen Reihe heraus gebracht werden, so siehet man sogleich, daß in den Nennern der Brüche, die die Glieder der Reihe vor der Einheit ausmachen, eben die Zahlen in eben der Ordnung vorkommen müssen, welche die Glieder der Reihe nach der Einheit ausmachen. Was aber die Logarithmen anlanget, welche zu diesen gebrochenen Zahlen gehören, so ist der Logarithmus der Verhältniß $1:\frac{1}{8}$ ohnfehlbar dem Logarithmus der Verhältniß 8:1 gleich, weil diese Verhältnisse einander gleich sind: und wenn wir also den Logarithmus der Verhältniß 8:1 bestimmen, so haben wir auch den Logarithmus der Verhältniß $1:\frac{1}{8}$, XIII, 180. Nun ist der Logarithmus der Verhältniß 8:1, wie wir bisher angenommen haben, -1. Eben dieser ist also auch der Logarithmus der Verhältniß $1:\frac{1}{8}$, und demnach ist der Verhältniß $\frac{1}{8}:1$ oder des Bruchs $\frac{1}{8}$ dieser $+1$, und so ist es mit den übrigen Logarithmen aller Brüche. Der Logarithmus des Bruchs $\frac{1}{2}$, oder der Verhältniß $\frac{1}{2}:1$ ist $+\frac{1}{3}$, weil der Logarithmus der Verhältniß 2:1 die Größe $-\frac{1}{3}$ hat, und weil $2:1 = 1:\frac{1}{2}$. Der Logarithmus des Bruchs $\frac{1}{4}$, oder der Verhältniß $\frac{1}{4}:1$ ist $+\frac{2}{3}$, weil der Logarithmus der Verhältniß 4:1 in unserm Täfelchen $-\frac{2}{3}$ ist, und weil $1:\frac{1}{4} = 4:1$. Wird also der Logarithmus einer ganzen Zahl, als 2, oder der Verhältniß 2:1 mit $+$ bezeichnet, so bekomt im Gegentheil der Logarithmus des Bruchs $\frac{1}{2}$ oder der Verhältniß $\frac{1}{2}:1$ das Zeichen $-$. Dieses ist beständig so: es würde demnach die vor die Einheit zurückgeführte Tafel in folgender Gestalt erscheinen:

Zahl.	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{32}{1}$	$\frac{64}{1}$
Logarithmus.	-2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$+1$	$+\frac{4}{3}$	$+\frac{5}{3}$	$+2$

§. 188. Man siehet aber gar leicht, daß dieses nur eine Wiederholung eben der Tafel mit sehr wenig veränderten Umständen seyn würde, und daß, wenn der Logarithmus einer Zahl, die größer ist als die Einheit, mit + bezeichnet, und als positiv angesehen wird, man die Zahl, welche zu einem Logarithmus gehöret, welcher mit — bezeichnet ist, gar leicht finden kan, wenn man nur in der Tafel diejenige Zahl findet, welche zu eben dem Logarithmus gehöret, wie er da stehet, und da man sich diese Zahl als einen Bruch vorstellen kan, von welchem der Nenner die Einheit ist, diesen Bruch umkehret, so daß nunmehro der Zähler die Einheit wird. Wir haben, dieses desto deutlicher zu zeigen, in dem Täfelchen des letzten Absatzes, die ganze Zahlen in Form solcher Brüche geschrieben. Es ist in dieser Tafel, welche im Grunde mit der vorigen einerley ist, + 2 der Logarithmus zu der Zahl $\frac{64}{1}$, also ist — 2 der Logarithmus des Bruchs $\frac{1}{64}$. Eben so ist $\frac{5}{3}$ oder 1,667 der Logarithmus zu $\frac{32}{1}$; also ist $-\frac{5}{3}$ oder $-1,667$ der Logarithmus zu $\frac{1}{32}$.

§. 189. Gemeiniglich wird der Logarithmus einer jeden ganzen Zahl, oder überhaupt einer jeden Zahl die größer ist als die Einheit, sie mag ganz oder gebrochen seyn, als positiv angesehen: woraus folgt, daß die Logarithmen der wahren Brüche, die weniger bedeuten als die Einheit, negativ seyn müssen. Und wenn a ein Glied der geometrischen Reihe bedeutet, welches größer ist als die Einheit, so wird nicht die Verhältniß $1 : a$, deren zweytes Glied größer ist als das erste, sondern die Verhältniß $a : 1$ als einfach angesehen, wodurch ihr Logarithmus wird + 1, und die Verhältniß $1 : a$ den Logarithmus — 1 bekömt. Ueberhaupt werden dadurch alle Logarithmen solcher Verhältnisse, deren erstere Glieder die zweyten übertreffen, positiv; werden aber die Glieder einer solchen Verhältniß verkehrt genommen, so behält zwar der Logarithmus seine Größe, er wird aber negativ. Diese Einrichtung ist willkührlich; sie hat aber mehr natürliches, als die entgegen gesetzte, welche die Logarithmen der ganzen Zahl negativ machet. Wir werden uns also inskünftige beständig an dieselbe, und an dieselbe allein halten. Sollen die Logarithmen der Verhältnisse mit diesen Zeichen aus den Logarithmen ihrer Glieder unmittelbar heraus kommen, so muß immer der Logarithmus des nachfolgenden Gliedes, von dem Logarithmus des vorhergehenden, und nicht dieser von jenem, abgezogen werden, XIII,

182. 183. Denn wenn in der Verhältniß A:B das Glied B kleiner ist als A, so wird der Logarithmus der Verhältniß A:B, welcher übrig bleibt, wenn man den kleinern, welcher zu B gehöret, von dem größern Logarithmus des Gliedes A abziehet, allerdings positiv. Ist aber B größer als A, so muß nach dieser Regel der größere Logarithmus von dem kleinern abgezogen werden, wodurch allerdings der Logarithmus der Verhältniß A:B negativ wird.

Gebrauch der Logarithmen.

§. 190. Nunmehro können wir die Anwendung dieser Lehre auf die gemeinste Rechnungsarten weisen, welche vermittelst der Logarithmen zu verrichten sind, wobey wir uns bloß unserer kleinen Tafel XIII, 181. bedienen werden, weil in der That der Gebrauch einer jeden andern Tafel, von dem Gebrauch derselben, gar nicht verschieden ist. Es seyn A und B zwo Zahlen, welche in der Tafel vorkommen, deren Verhältniß A:B man sich vorstellet. *l*A bedeutet den Logarithmus, welcher zu der Zahl A gehöret, und in der Tafel neben derselben stehet, und *l*B bedeute den Logarithmus von B. Der Logarithmus der Verhältniß A:B hingegen werde durch *l*(A:B) bezeichnet. Da wir nun XIII, 189. gesehen haben, daß der Logarithmus einer jeden Verhältniß gefunden werde, wenn man den Logarithmus des zweyten Gliedes derselben von dem Logarithmus des ersten Gliedes abziehet, es mag nun das erste oder das zweyte Glied das größere seyn: so siehet man leicht, daß diese Gleichung $l(A:B) = lA - lB$ allezeit richtig seyn werde. Bedeuten nun C und D zwo andere Zahlen, welche in eben der Tafel vorkommen, und deren Logarithmen folglich bekant sind, weil sie in der Tafel neben den Zahlen stehen, so ist wiederum $l(C:D) = lC - lD$.

§. 191. Wird nun gesetzt, daß die zwo Verhältnisse A:B und C:D einander gleich seyn, und daß also die Proportion A:B = C:D ihre Richtigkeit habe: so sind auch die Logarithmen dieser Verhältnisse einander gleich, weil in einerley Tafel allezeit gleiche Verhältnisse gleiche Logarithmen haben, das ist, es ist $l(A:B) = l.(C:D)$. Demnach ist auch $lA - lB = lC - lD$, weil diese nichts anders sind als die Logarithmen der gleichen Verhältnisse $l.(A:B)$, $l(C:D)$; woraus folget $lB - lA = lD - lC$. Setzet man aber zu den beyden Gliedern dieser Gleichung $lB - lA = lD - lC$ den lC hinzu, so findet man $lB + lC - lA = lD$.

§. 192. Diese Regel enthält alles, was von dem Gebrauch der Logarithmen hauptsächlich zu wissen nöthig ist. Wir haben angenommen,

daß

daß die vier Zahlen A, B, C und D proportional seyn, und daß folgends D die vierte Proportionalzahl zu den dreyen A, B und C sey, und haben nach richtigen Gründen schließen können: es sey $lD = lB + lC - lA$, das ist, es entstehe der Logarithmus der vierten Zahl D, wenn man von der Summe der Logarithmen der zweyten und dritten $lB + lC$ den Logarithmus der ersten lA abziehet. Demnach kan man den Logarithmus der vierten Proportionalzahl D leicht finden, wenn man die Logarithmen der drey ersten A, B und C hat. Diese aber stehen in der Tafel neben den Zahlen, und werden gegeben so bald die Zahlen gegeben sind. Und wiederum findet man vermittelst der Tafel die Zahl, welche zu einem Logarithmus gehöret, gar leicht. Man kan demnach vermittelst der Logarithmentafel zu drey gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl, bloß vermittelst der Addition und Subtraction, finden.

§. 193. Es sey zum Beyspiel zu den dreyen Zahlen 16, 512 und 128 die vierte Proportionalzahl zu finden, so bedeutet A nunmehro 16, lA stehet in der Tafel neben 16, und ist also $lA = 1,333$; B bedeutet 512, und lB ist in der Tafel 3,000. Ferner bedeutet C die Zahl 128 und lC ist 2,333. Endlich bedeutet D die vierte Proportionalzahl welche man suchet, und lD ihren Logarithmus. Da nun $lD = lB + lC - lA$, so setze man

$lA = l.16 = 1,333$
$lB = l\ 512 = 3,000$
$lC = l.128 = 2,333$ und mache

$lB + lC = 5,333$, und ferner

$lB + lC - lA = 4,000$, so hat man lD, gleich dieser letzt gefundenen Zahl 4,000. Da nun neben denselben in der Tafel die Zahl 4096 stehet, so ist diese die vierte Proportionalzahl D, welche man suchte.

§. 194. Man siehet leicht, was vor große Mühe man durch diese Rechnungsart ersparet, insonderheit wenn die gegebene Zahlen etwas groß sind. Es sey in einem andern Exempel $A = 1024$, $B = 32$ und $C = 4$, so ist

$lA = l.1024 = 3,333$
$lB = l.32 = 1,667$
$lC = l.4 = 0,667$, folgends

$lB + lC = 2,333$
$lB + lC - lA = -1,000$

Es ist nemlich hier der lA, welcher von der Summe $lB + lC$ abzuziehen war,

größer als diese Summe. Man muß demnach zwar die kleinere Summe $lB+lC$ von der größern lA abziehen, aber dem Ueberbleibsel das Zeichen — geben. Daß wir aber vor dieses Ueberbleibsel 1,000 setzen, geschiehet, weil unsere Logarithmen um so vieles fehlen, wie oben XIII, 181. angemerket worden ist. Es ist also $lD = -1,000$. Nun ist die Zahl, welche zu 1,000 gehöret, in unserer Tafel 8 oder $\frac{8}{1}$. Zu — 1,000 gehöret also der Bruch $\frac{1}{8}$, XIII, 187. und dieser ist die vierte Proportionalzahl, welche man suchte.

§. 195. Wenn das erste Glied der Proportion A die Einheit ist, so ist die vierte Proportionalzahl D das Product aus den zwo mittlern C und D, und demnach $lD = lC + lD$, weil der Logarithmus der Einheit nichts ist. Wir wollen größerer Deutlichkeit halber die Rechnung wie vorher setzen. Es sey B = 16, und C sey = 128, so ist

$lA = l.\ 1 = 0,000$
$lB = l.\ 16 = 1,333$
$lC = l.\ 128 = 2,333$

$lB + lC = 3,666$

$lB + lC - lA = 3,666 = lD$. Demnach ist D = 2048, uud man findet allezeit den Logarithmus des Products, wenn man die Logarithmen der Factore addiret, woraus sodann das Product selbst vermittelst der Tafel leicht zu haben ist.

§. 196. Ist eines von den zwey mitlern Gliedern der Proportion, als B, die Einheit, so ist das vierte Glied der Proportion, D, der Quotient, der vermittelst der Division des andern mitlern Gliedes C durch das erstere A gefunden wird. Weil nun hier $lB = 0$, so wird $lD = lC - lA$, das ist, der Logarithmus des Quotienten bleibt übrig, wenn man den Logarithmus des Theilers von dem Logarithmus der Zahl abziehet, welche zu theilen ist. Wir wollen auch hier dergestalt verfahren, als ob wir die vierte Proportionalzahl zu den dreyen A = 32, B = 1, und C = 2048 zu suchen vorhätten, so ist:

$lA = l.\ 32 = 1,667$
$lB = l.\ 1 = 0,000$
$lC = l.2048 = 3,667$, folgends ist

$lB + lC - lA = 2,000 = lD$, und demnach ist D = 64.

§. 197. Will man von einer Zahl, so in der Tafel vorkomt, die Quadratzahl machen, so ist nur der Logarithmus derselben zwey mal zu nehmen, der Logarithmus, welcher dergestalt herausgebracht wird, ist der Logarithmus der Quadratzahl, welche man suchte. Man siehet dieses sogleich

aus

aus demjenigen, so XIII, 195. von der Multiplication gewiesen worden ist. Wenn aus der Zahl B die Quadratzahl verfertiget werden soll, so muß man B in B multipliciren, und folgends lB zu lB addiren, damit man den Logarithmus des Quadrats erhalte. Es ist aber $lB + lB = 2lB$. Der Logarithmus von 32 ist 1, 667. Nimt man diesen gedoppelt, so ist 3, 334 der Logarithmus von 1024, und dieses ist die Quadratzahl der Wurzel 32. Also ist hinwiederum bloß der Logarithmus der Quadratzahl durch 2 zu dividiren, wenn man den Logarithmus der Wurzel haben will. Der Logarithmus 4, 000 halb genommen ist 2, 000, und dieses ist der Logarithmus zu 64, welche Zahl demnach die Quadratwurzel von 4096 ist, zu welcher der Logarithmus 4, 000 gehöret.

§. 198. Eine Cubiczahl heraus zu bringen, multipliciret man die Quadratzahl durch die Wurzel: also muß man den Logarithmus der Quadratzahl zu dem Logarithmus der Wurzel setzen, wenn man den Logarithmus der Cubiczahl haben will. Da nun der Logarithmus der Quadratzahl zwey mal so groß ist, als der Logarithmus der Wurzel, so wird der Logarithmus der Cubiczahl drey mal so groß. Und man darf also bloß den Logarithmus der Wurzel durch 3 multipliciren, wenn man den Logarithmus der Cubiczahl haben will. Der Logarithmus zu 4 ist in unserer Tafel 0, 667, dieser dreymal genommen giebt 2, 001 oder 2, 000; und dieser Logarithmus gehöret zu 64, welche Zahl also die Cubiczahl von 4 ist.

§. 199. Will man also wieder umgekehrt aus dem Logarithmus der Cubiczahl den Logarithmus der Wurzel haben, so muß man den Logarithmus der Cubiczahl durch 3 dividiren. Der Quotient ist der verlangete Logarithmus der Cubicwurzel. In unserer Tafel stehet bey der Zahl 4096 der Logarithmus 4, 000, dieser durch 3 getheilet giebt 1, 333, bey welchem der Logarithmus 16 stehet. Es ist also 16 die Cubicwurzel von 4096.

§. 200. Diese Regeln sind allgemein. Der Logarithmus der vierten Dignität einer Zahl ist viermal so groß als der Logarithmus der Wurzel, und folgends ist der Logarithmus der Wurzel der vierten Dignität der vierte Theil des Logarithmus dieser Dignität. Ist die Wurzel A, und hat man dieselbe zu der Dignität erhoben, deren Exponent n ist, so ist $lA^n = nlA$, und folgends $\frac{lA^n}{n} = lA$. Das ist, es komt der Logarithmus der Dignität lA^n, wenn man den Logarithmus der Wurzel lA durch den Exponenten der Dignität n multipliciret: und aus dem Logarithmus der Dignität lA^n entstehet der Logarithmus der Wurzel lA, wenn man den erstern durch

den Exponenten der Dignität n dividiret, deren Wurzel man schaffen soll.

§. 201. Man kan dieses unter andern gebrauchen, die Logarithmen der zusammen gesetzten Zahlen, aus den Logarithmen der einfachen Zahlen zu finden, so bald man diese erhalten hat. Denn, da alle zusammen gesetzte Zahlen entstehen, wenn man die einfachen in einander multipliciret, so entstehen ihre Logarithmen, wenn man die Logarithmen der einfachen Zahlen addiret. Man stelle sich den Logarithmus von 2 unter $l2$ vor, und den Logarithmus von 3 bedeute man mit $l3$, so ist $l.\ 2\times3$, das ist $l6 = l2 + l3$. Dieses erleichtert die Arbeit in Erfindung der Logarithmen ungemein. Denn es ist dieselbe nicht so leicht, als man sich dieselbe vielleicht bey dem ersten Anblick vorstellet.

Von der Berechnung der Logarithmen.

§. 202. Es war uns gar leicht, eine Logarithmische Tafel anzufangen, und bis zu gar großen Zahlen fortzusetzen. Wirft man aber die Augen auf dieselbe zurück, so sieht man sogleich, daß in derselben gar wenige Zahlen enthalten sind. Die 3 ist nicht in derselben befindlich, auch nicht die 5, die 6 und 7. Zwischen der nächsten Zahl, so in der Tafel vorkomt 8, und der darauf folgenden 16, stehen noch mehr Zahlen, welche die Tafel nicht enthält, und dieses gehet immer weiter. Es wäre demnach eine solche Tafel von gar geringem Gebrauch: als welche bloß dienen könte, die Logarithmen solcher Zahlen zu finden, welche die vierte Proportionalzahlen zu dreyen andern abgeben, die sämtlich in der Tafel zu finden sind.

§. 203. Zwar könte man die Tafel erweitern, und in dieselbe gar viele ganze Zahlen bringen, ohne sich auf was anders zu gründen, als was wir bishero gesehen haben. Man müste also verfahren. Das zweyte Glied der geometrischen Reihe, welche von der 1 anfängt, müste man nur um einen gar kleinen Bruch größer annehmen als die Einheit, zum Exempel, 1,0001, und die Verhältniß 1 : 1,0001 vor einfach, oder auch, als aus zwey oder drey oder vier gleichen Verhältnissen zusammen gesetzt, ansehen. Wir wollen das letzte behalten, so ist 4 der Logarithmus der Verhältniß 1 : 1,0001 oder der Zahl 1,0001. Sobald man dieses angenommen, müste man aus der Verhältniß 1 : 1,0001 durch die gewöhnlich wiederholte Multiplication eine geometrische Reihe machen, zu deren Gliedern man sodann die Logarithmen leicht schreiben könte. Die Glieder dieser Reihe

würden folgende seyn: 1; 1,0001; 1,00020001; 1,000300030001; 1,0004000600040001, und ihre Logarithmen wären 0, 4, 8, 12, 16 und so fort. Dieses würde eine ungeheure Tafel geben: aus welchen man sodann bloß die ganze Zahlen nehmen, und mit ihren Logarithmen besonders schreiben müste. Denn die Weitläuftigkeit wäre gar zu groß, wenn man auch die Brüche behalten wolte. Eine dergleichen Tafel, welche eigentlich nur ein Auszug aus einer viel weitläuftigern Logarithmentafel wäre, würde nicht viel anders aussehen, als die gemeinen Logarithmentafeln, der wir uns bedienen. Wer siehet aber nicht, daß dieses eine Arbeit geben würde, welche zu unternehmen sich schwerlich jemand entschließen wird.

§. 204. Wir müssen also noch zeigen, wie die Logarithmen auf eine leichtere Art zu berechnen sind. Denn ob zwar diese Arbeit bereits verrichtet ist, und wir ziemlich weitläuftige Tafeln der Logarithmen würklich haben, so gebraucht man doch vors erste die Logarithmen mit größerer Einsicht und mit größerer Sicherheit, wenn man auch die Rechnung derselben verstehet, und vors zweyte kan man, so oft es Noth thut, die Fehler, welche etwa in einer Tafel eingeschlichen seyn möchten, verbessern. Ob zwar übrigens diese Lehre ganz in die Arithmetik gehöret, und zu deren Abhandlung aus der Geometrie nichts erfordert wird: so wollen wir doch uns einer Figur dabey bedienen, und auf die Betrachtung derselben dasjenige, so wir zu zeigen haben, gründen: theils, weil dadurch alles leichter einzusehen ist, und theils, weil wir damit zugleich einige Begriffe beybringen werden, welche zwar in denjenigen Theil der Geometrie nicht gehören, den wir abzuhandeln uns vorgesetzt haben, aber doch in der Anwendung gar großen Nutzen haben.

Die Logarithmische Linie.

[*Fig.* 384.] §. 205. Man nehme auf einer geraden Linie VY, zu beyden Seiten von A gleiche Theile von beliebiger Größe, und in beliebiger Zahl an, dergleichen sind AB, BC, CD, DE, wie auch Ab, bc, cd, de und so fort. Man ziehe durch A eine Linie von beliebiger Länge Aa, und durch B eine andere, welche der Aa parallel läuft, und etwas weniges größer ist als dieselbe. Wir wollen diese Linie nur mit dem einzigen Buchstaben B bezeichnen, weil doch daraus keine Verwirrung folgen kan, und eben dergleichen wollen wir auch bey den übrigen Linien thun, welche der Aa parallel zu ziehen seyn werden, wie auch bey der Aa selbst. Man suche sodann zu den beyden Linien A und B die dritte Proportionallinie, und setze diese an C. Ferner suche man zu A, B und C die vierte Proportionallinie, oder

welches auf eben das hinaus kommet, man suche zu B und C die dritte Proportionallinie, und setze dieselbe an D, und so fahre man immer fort, so daß die Linien A, B, C, D, E &c. eine geometrische Progression ausmachen. Auf eben die Art gehe man von der A nach der andern Seite V zurück. Man suche zu B und A die dritte Proportionallinie, und setze dieselbe an b, ferner suche man zu A und b die dritte Proportionallinie, und setze sie an c, und so weiter, wodurch die Glieder der Progression erhalten werden, welche kleiner sind als A.

§. 206. Man stelle sich ferner vor, daß man eine jede der kleinen Linien AB, BC, CD, &c. Ab, bc, cd, &c. wieder in eine beliebige Zahl gleicher Theile getheilet, und an diese Theile andere gerade Linien der Aa *parallel* gesetzet habe, welche in einer geometrischen Reihe zwischen A, B, C, fallen. Man kan sich dieses am leichtesten vorstellen, wenn man XIII, 125. annimt, daß jede der kleinen Linien AB, BC, CD und so fort, in zwey gleiche Theile getheilet worden, und daß an das mittelste Punct der AB man der Aa parallel, die mittlere Proportionallinie zwischen der A und B gesetzet habe, an das mittelste Punct der BC die mittlere Proportionallinie zwischen der B und C, und so ferner. Die Hälften dieser Linien AB, BC, CD habe man wieder in zwey gleiche Theile getheilet, und an diese letzten Theilungspuncte andere Linien der Aa parallel gesetzt, deren jede die mittlere Proportionallinie zwischen denjenigen zwo Parallellinien ist, zwischen welchen sie *stehet*, und so fort.

§. 207. Man kan sich vorstellen, daß diese Arbeit so lange fortgesetzt worden sey, bis ein jedes der Theilchen AB, BC, &c. in mehr als hundert, oder in mehr als tausend Theilchen getheilet worden ist. Hat man dieses, so stelle man sich weiter vor, daß alle Puncte, in welchen sich diese Parallellinien endigen, durch gerade Linien zusammen gezogen seyn: so siehet man leicht, daß dadurch eine Linie XZ zum Vorschein kommen werde, welche von einer wahrhaftig krummen Linie desto weniger verschieden ist, je mehr der Linien sind, welche man der Aa parallel gezogen, deren äußerste Puncte eben diejenigen sind, welche diese Linie XZ bestimmen. Wenn man sich nun dieser der Aa parallel laufenden Linien immer mehr und mehr vorstellet, und dadurch die Linie XZ einer wahrhaftig krummen Linie, die mit einer geraden nichts gemeinschaftliches hat, immer näher und näher bringet: so erlangt man den Begrif der krummen Linie, welche unter dem Namen der **Logarithmischen Linie** bekant ist.

§. 208. Die Haupteigenschaft dieser Linie ist, daß, wenn man in der VY von der A an oder sonst, gleiche Theile nach Belieben nimt, als

AE=EF,

AF=EF, Ae=ef, und ziehet sodann durch die Puncte f, e, E, F gerade Linien, der Aa parallel, bis an die krumme Linie XZ: die Linien f, e, A, E, F in einer geometrischen Progression stehen werden. Denn, wenn erstlich die Puncte E, F, e, f unter denjenigen sind, welche man auf der Linie VY gleich Anfangs angenommen hat, und man nimmet die Verhältniß A:B vor einfach an: so siehet man leicht, daß die Verhältniß f:e aus so vielen Verhältnissen, die der Verhältniß A:B gleich sind, zusammen gesetzt sey; als viele dergleichen Verhältnisse, A:B zusammen gesetzt worden sind, um die Verhältnisse e:A oder A:E oder auch E:F herauszubringen, XIII, 205. woraus sogleich folget, daß die Verhältnisse f:e, e:A, A:E, E:F alle gleich sind: weil durch die Zusammensetzung einer gewissen Zahl gleicher Verhältnisse unmöglich ungleiche Verhältnisse heraus gebracht werden können, VIII, 6. Ist aber dieses, so stehen die Linien f, e, A, E, F allerdings in einer geometrischen Progression, XIII, 110.

§. 209. Sind aber die Linien AG, GH, Ag, gh zwar wieder gleich, aber dergestalt angenommen worden, daß die Puncte derselben G, H, g, h in keines der in VY zuerst angenommenen Puncte A, B, C, D u. s. f. fallen; und man hat durch diese Puncte die geraden Linien G, H, g und h der Aa parallel gezogen: so kan man schließen, daß diese Linien h, g, A, G, H deswegen dennoch eine geometrische Progression ausmachen müssen, wenn man erweget, daß man sich die kleinen Linien AB, BC alle, und folgends auch DE, in eine sehr große Zahl von gleichen Theilen getheilet, und durch alle diese Theilungspuncte Linien vorstelle, welche der Aa parallel liegen, und sich in der krummen Linie XZ endigen. Woraus folget, daß die Linie G entweder genau auf eine dieser Parallellinien fallen, oder doch von derselben gar wenig entfernt seyn müsse: welche Entfernung man noch so weit vermindern kan, als man will, indem man der Theile in DE, und der Linien zwischen D und E, immer mehrere machet, bis endlich die Entfernung der Linie G von einer dieser Parallellinien zwischen D und E, keinen merklichen Fehler bringt, und also vor nichts gehalten werden kan. Und eben dieses ist auch von den übrigen Linien H, g, h zu sagen. Also sind wir wieder in dem vorigen Fall, da nemlich gesetzt wird, es sey die Linie VY in gleiche Theile getheilet, durch ein jedes dieser Theilungspuncte sey eine gerade Linie der Aa parallel gezogen, welche sich in der krummen Linie XZ endigt, unter diesen Linien seyn h, g, G, H, und es sey hg=gA=AG=GH. Es wird demnach auch hier der vorige Schluß statt finden, daß nemlich die Linien h, g, A, G, H in einer geometrischen Progression stehen.

§. 210.

§. 210. Hieraus nun siehet man, daß die Figur, welche wir betrachten, die Stelle unendlich vieler Logarithmentafeln vertrete. Denn wenn man in derselben die Linien A, B, D und so fort durch Zahlen ausdrücket, welche sich auf eine beliebige Einheit beziehen, aus welcher man diese Linien misset: stellet sich aber vor, daß die Verhältniß B:A die einfache, und folgends AB die Einheit sey, vermittelst welcher man die Theile der Linie VY misset: so ist zu der Verhältniß E:A=F:E=A:e=e:f der Logarithmus AE=4, und man bekomt dadurch eine Tafel, welche man sogleich verändert, wenn man sich die Verhältniß B:A als gedoppelt, oder als aus drey gleichen Verhältnissen zusammen gesetzt, vorstellet, deren eine die einfache sey. Wird der dritte Theil der AB vor die Einheit angenommen, so ist der Logarithmus der Verhältniß B:A die Zahl 3, folgends bekomt die Verhältniß E:A=F:E=A:e=e:f den Logarithmus 12. Und man kan auf die Art, mit Beybehaltung der Zahlen, welche die Linien f, e, A, E, F ausdrücken, die Logarithmische Tafel ohne Aufhören verändern. Weil aber auch die der Aa parallel laufende Linien nach und nach alle Größen bekommen, welche eine Linie haben kan, so sind aus dieser Figur, wenn man sie zu beyden Seiten fortsetzet, und die Parallellinien durch Zahlen ausdrücket, die Logarithmen aller Zahlen zu haben, welche man sich nur vorstellen will.

§. 211. Man würde wenig Richtiges erhalten, wenn man sich zur Verfertigung dieser Tafel des Cirkels und der Eintheilung der Linien bedienen, und die Tafel also aus der Figur abnehmen wolte. Man müste zu dem Ende folgender gestalt verfahren. Wenn man aus den angenommenen Logarithmen, die Zahlen finden wolte, so müste man den Logarithmus einer Verhältniß, F:A zum Exempel, von beliebiger Größe nehmen, als 24, und in so viele gleiche Theile müste man die Linie AF eintheilen. Wolte man sodann die Zahl haben, deren Logarithmus 11 ist, so müste man von A nach F eilf Theile der Linie AF tragen. Diese 11 Theilchen machen in unserer Figur die Linie AG aus. Man müste sodann durch G eine Linie der Aa parallel ziehen, und dieselbe aus der A als der Einheit messen. Die Zahl, welche die Linie G ausdrücket, würde die gesuchte Zahl seyn, die zu den Logarithmus AG=11 in einer Tafel gehöret, in welcher der Logarithmus der Zahl, welche F aus der Einheit A ausdrücket, 24 ist.

§. 212. Im Gegentheil müste man aus einer gegebenen Verhältniß $m:n$, in welcher m größer ist als n, den dazu gehörigen Logarithmus also finden. Man müste wieder den Logarithmus einer andern Verhältniß F:A nach Belieben nehmen, als =24: sodann müste man zu n, m und der A die

vierte

vierte Proportionalzahl finden, welche wir G nennen; diese G müste man zwischen der VY und XZ der Aa parallel legen: so wäre der Logarithmus der Verhältniß $m:n$ die Zahl welche sich zu der 24 eben so verhält wie AG zu AF, und folgends in unserer Figur 11. Ein kleines Nachdenken kan diese Sachen vollkommen klar machen, und zugleich zeigen, daß diese Art, die Logarithmen der gegebenen Zahlen, und die Zahlen aus den gegebenen Logarithmen zu finden, zwar leicht, aber doch allezeit mit Fehlern verknüpft sey, welche bey der Eintheilung und Messung der Linien nicht zu vermeiden sind.

§. 213. Indessen siehet man hieraus deutlich, daß in einerley Logarithmentafel der Logarithmus einer jeden Verhältniß D : A sich zu den Logarithmus einer andern Verhältniß F: A verhalte, wie sich AD zu AF verhält. Und daß in zwo verschiedenen Tafeln sich die Logarithmen, die zu einerley Verhältniß D: A gehören, wie die Zahlen der Theile verhalten, die man sich in der AD vorstellet. Nemlich, der Logarithmus der Verhältniß D: A in der ersten Tafel, verhält sich zu den Logarithmus eben der Verhältniß D: A in der andern, wie die Zahl der Theile, welche man der AD bey Verfertigung der ersten Tafel gegeben hat, zu der Zahl der Theile von eben der Größe, welche man der AD bey Verfertigung der zweyten Tafel gegeben. Und eben so verhalten sich auch die Logarithmen einer jeden andern Verhältniß, als F: A, in den zwo Tafeln. Denn wenn n die Zahl der Theile ist, welche man der AD in der ersten Tafel gegeben hat, und man machet $AD : AF = n : m$, so ist m die Zahl der Theile der AF in der ersten Tafel, und folgends der Logarithmus der Verhältniß F: A in dieser Tafel. Ist nun N die Zahl der Theile, die man der AD in der andern Tafel gegeben, und man machet wieder $AD : AF = N : M$, so ist M der Logarithmus der Verhältniß A: F in der andern Tafel. Vergleichet man diese Verhältnisse, so findet man $n : m = N : M$, und folgends $n : N = m : M$, welches dasjenige ist, so wir erweisen solten, daß nemlich jede zween Logarithmen, die zu einerley Verhältnissen und zwo verschiedenen Tafeln gehören, einerley Verhältniß gegen einander haben.

§. 214. Es können nach diesen Sätzen aus einer Logarithmentafel deren so viele verfertiget werden, als man nur haben will. Dieses wäre eine ziemlich unnöthige Arbeit, wenn man sie würklich unternehmen wolte: indessen kan man sich ohne der Einsicht derselben eines vollkommenen Verstandes dieser Dinge nicht rühmen. Und sie trägt auch würklich etwas zur Berechnung der Logarithmen bey. Diese Berechnung selbst aber gründet sich unmittelbar auf die nachfolgende Betrachtung. Nachdem man

Aa, Dd und Ff an eine Logarithmische Linie nach Belieben gezogen, und AD in eine große Menge gleicher Theile getheilet hat, deren Zahl m ausdrücket, von welchen Theilchen das erste AI ist, so theile man auch AF in eben so viele Theilchen, und das erste dieser Theilchen sey AK. Weil nun $AD = m \times AI$, und $AF = m \times AK$; so ist $AD : AF = m \times AI : m \times AK$. Da nun aber AD zu AF sich verhält, wie der Logarithmus der Verhältniß Dd:Aa zu den Logarithmus der Verhältniß Ff : Aa, so verhält sich auch AI zur AK wie der Logarithmus der Verhältniß Dd:Aa zu den Logarithmus der Verhältniß Ff:Aa. Man ziehe durch a die gerade Linie aL mit der AF parallel, welche die Linien Kk und Ii in L und M schneidet, so ist kaL kaum von einen geradelinichten Dreyeck zu unterscheiden, und zwar desto weniger, je kleiner AK angenommen worden ist. Denn indem Ak abnimt, wird auch der Bogen ak immer kleiner und kleiner, wodurch er auch seine Krümmung nach und nach verlieret, und einer geraden Linie immer näher komt. Ist aber kaL ein geradelinichtes Dreyeck, so ist $Mi : Lk = aM : aL = AI : AK$; weil in demselben Mi der Seite kL parallel lieget, und aM der AI, wie auch aL der AK gleich ist. Da sich also AI zur AK verhält, wie der Logarithmus der Verhältniß Dd:Aa zu dem Logarithmus der Verhältniß Ff:Aa; so wird, wenn man in die Stelle AI:AK die Verhältniß Mi:Lk setzet, auch nachfolgende Proportion $Mi : Lk = l.(Dd:Aa) : l.(Ff:Aa)$ richtig seyn: in welcher $l.(Dd:Aa)$ den Logarithmus der Verhältniß Dd:Aa, und $l.(Ff:Aa)$ den Logarithmus der Verhältniß Ff:Aa bedeutet.

§. 215. Wenn man demnach die Linie Mi findet, oder durch eine Zahl ausdrücket, und eben dergleichen in Ansehung der Lk verrichtet, indem man die Einheit beybehält die man angenommen hat, die Linie Mi auszudrücken, so hat man sogleich zwo Zahlen, welche sich gegen einander verhalten, wie die Logarithmen der Verhältnisse Dd:Aa und Ff:Aa. Nimt man sodann den Logarithmus der Verhältniß Ff:Aa nach Belieben an, wie man denn zu Verfertigung einer jeden Logarithmentafel den Logarithmus einer Verhältniß nach Belieben bestimmen muß, XIII, 212. so kan man sogleich den Logarithmus der Verhältniß Ff:Aa finden, wenn man schließet $Mi : Lk = l.(Dd:Aa) : l.(Ff:Aa)$.

§. 216. Wir könten ohne Anstand weiter gehen, wenn wir bloß vorhätten zu zeigen, wie die Logarithmen gefunden werden. Da aber auch mit nicht viel größerer Mühe zu zeigen ist, wie sie viel leichter zu finden sind, als nach einer Regel, welche bloß aus dem fließet, so bisher gezeiget worden ist; so wollen wir die Kleinigkeiten, die noch dazu erfordert werden, mit an-

anhängen, welche fast bloß in einer Wiederholung der letztern Betrachtungen, mit etwas wenig veränderten Umständen, bestehen.

§. 217. Es muß zu dem Ende die Logarithmische Linie auf der andern Seite der Aa nach X fortgezogen seyn. Ist dieses geschehen, so nehme man AE dergestalt, daß, wenn man durch E die Ee der Aa parallel ziehet, diese Ee von der Aa so viel unterschieden sey, als Aa von der Ff unterschieden ist, das ist, daß Aa—Ee=Ff—Aa. Man theile sodann EA wieder in eine Zahl gleicher Theile, welche der vorigen m gleich ist, in welche man AD und AF getheilet hat; und das erste dieser Theilchen sey RA, so ist wieder EA:AF=m×RA:m×AK=RA:AK, und weil auch EA:AF=l.(Ee:Aa):l.(Aa:Ff); so ist RA:AK=l.(Ee:Aa):l.(Aa:Ff). Man verlängere die Rr und La, bis sie einander in S erreichen: so fließet aus der Aehnlichkeit der Dreyecke Sar, kaL die Proportion Sr:Lk=aS:aL=RA:AK. Wenn man nun diese Proportion mit der vorigen vergleichet, so bekömt man Sr:Lk=l.(Ee:Aa):l.(Aa:Ff). Dieses ist die Proportion, welche wir noch suchten.

§. 218. Man nenne Aa nunmehro a und den Unterschied der Linien Aa und Ee (welches zugleich der Unterschied der Linien Aa und Ff ist, weil XIII, 217. angenommen wird, daß Aa—Ee=Ff—Aa) nenne man d, so ist Ee=$a-d$ und Ff=$a+d$. Und demnach ist $l.(a-d:a):l.(a:a+d)$ =Sr:Lk. Man hat also nunmehro bloß die kleinen Linien Sr, Lk durch Zahlen auszudrücken, wenn man die Verhältniß dieser Logarithmen würklich darstellen will: woraus sodann die Logarithmen leicht gefunden werden. Wir wollen bey dem letztern Lk anfangen. Weil aber die Größen der Logarithmen dadurch nicht geändert werden, daß man die Glieder der Verhältnisse verkehrt setzet, so kan man auch schreiben: Sr:Lk=$l(a:a-d)$:$l(a+d:a)$.

Würkliche Berechnung der Logarithmen.

§. 219. Es wird die Lk folgender gestalt gefunden. Es ist Kk=Aa +Lk. Und nachdem man AF in eine Zahl von gleichen Theilen getheilet hat, die man sich unter m vorstellet, so siehet man, daß, wenn man auf alle Theilungspuncte der AF gerade Linien bis an die XZ zöge, gleichwie man sich Kk an das erste dieser Theilungspuncte gezogen vorstellet, die Linien Aa, Kk und so fort bis an Ff, eine geometrische Reihe ausmachen würden, deren letztes Glied Ff von dem ersten um so viel Glieder entfernet ist, als viele Einheiten in m enthalten sind, in welcher Reihe Kk das zweyte

Glied abgiebt. Da wir nun Aa mit a und Ff mit $a+d$ bezeichnet haben, so ist $Kk = (a+d)^{1:m}$; dem zufolge so bey der Betrachtung der geometrischen Reihen, XIII, 163. gezeiget worden ist, und also $Lk = (a+d)^{1:m} - a$.

§. 220. Auf eben die Art findet man auch Sr. Wenn man auf alle Theilungspuncte der EA sich gerade Linien vorstellet die der Aa parallel laufen und bis an XZ reichen, so hat man eine absteigende geometrische Progression, deren Glieder an der Zahl m sind, deren erstes Glied Aa oder a, und das letzte $Ee = a-d$ ist, und bey welcher Rr die Stelle des zweyten Gliedes vertritt. Es wird demnach dieses zweyte Glied Rr hier $(a-d)^{1:m}$, und folgends $Sr = SR - rR = a - (a-d)^{1:m}$.

§. 221. Wir haben aber oben gesehen, wie ein Glied einer geometrischen Reihe, welches durch $(a+d)^{1:m}$ oder $(a-d)^{1:m}$ ausgedrücket wird, durch eine Reihe von Zahlen so nahe angegeben werden kan, als man will. Weil nemlich hier m gar sehr groß ist, so bedienet man sich der Regeln des 169 Absatzes, vermittelst welcher aus der allgemeinen Reihe XIII, 165. herausgebracht wird:

$$(a+d)^{1:m} = a^{1:m} \times \left(1 + \frac{1}{m}\times\frac{d}{a} - \frac{1}{2m}\times\frac{d^2}{a^2} + \frac{1}{3m}\times\frac{d^3}{a^3} - \frac{1}{4m}\times\frac{d^4}{a^4} + \&c.\right)$$

$$\text{und } (a-d)^{1:m} = a^{1:m} \times \left(1 - \frac{1}{m}\times\frac{d}{a} - \frac{1}{2m}\times\frac{d^2}{a^2} - \frac{1}{3m}\times\frac{d^3}{a^3} - \frac{1}{4m}\times\frac{d^4}{a^4} - \&c.\right)$$

§. 222. Es ist demnach

$$Sr = a - (a-d)^{1:m} = a^{1:m} \times \left(-1 + \frac{d}{ma} + \frac{d^2}{2ma^2} + \frac{d^3}{3ma^3} + \&c.\right) + a,$$

$$\text{und } Lk = (a+d)^{1:m} - a = a^{1:m} \times \left(1 + \frac{d}{ma} - \frac{d^2}{2ma^2} + \frac{d^3}{3ma^3} - \&c.\right) - a,$$

folgends die Verhältniß Sr : Lk gleich der Verhältniß der Summe der Glieder der Reihe $a + a^{1:m} \times \left(-1 + \frac{d}{ma} + \frac{d^2}{2ma^2} + \frac{d^3}{3ma^3}\right.$ &c. zu der Summe der Glieder dieser zweyten Reihe $\left. - a + a^{1:m} \times \left(1 + \frac{d}{ma} - \frac{d^2}{2ma^2} + \frac{d^3}{3ma^3}\right.\right.$ &c.)

Und eben so verhält sich der Logarithmus der Verhältniß $(a-d):a$ zu dem Logarithmus der Verhältniß $a:(a+d)$. Man wird sich nach einem kleinen Nachsinnen in die Veränderung der Zeichen leicht finden können. Es gründet sich alles auf dasjenige, so wir gesehen haben, und es kommet in diesen Dingen hier gar nichts neues vor.

§. 223.

§. 223. Multipliciret man alle Glieder der Reihen, welche die Verhältniß Sr:Lk ausdrücken durch m und dividiret sie durch $a^{l:m}$, so wird dadurch die Verhältniß nicht geändert. Die dergestalt veränderte Reihen aber, welche diese Verhältniß Sr:Lk ausdrücken, sind:

$$+\frac{ma}{a^{l:m}} - m + \frac{d}{a} + \frac{d^2}{2a^2} + \frac{d^3}{3a^3} \text{ &c. und}$$

$$-\frac{ma}{a^{l:m}} + m + \frac{d}{a} - \frac{d^2}{2a^2} + \frac{d^3}{3a^3} \text{ &c.}$$

Und weil $Sr:Lk = l.(a-d:a):l(a:a+d)$, so verhält sich auch die Summe der Glieder der ersten Reihe, zu der Summe der Glieder der zweyten, wie $l.(a-d:a)$ zu $l.(a:a+d)$; oder wie $l(a:a-d)$ zu $l.(a+d:a)$.

§. 224. Weil man nun bey Verfertigung einer Logarithmentafel einen Logarithmus nach Belieben annehmen muß, so setze man die erste Reihe sey selbst der Logarithmus der ersten Verhältniß $a:(a-d)$, so wird auch die zweyte Reihe der Logarithmus der zweyten Verhältniß, und man hat demnach:

$$l(a:a-d) = \frac{ma}{a^{l:m}} - m + \frac{d}{a} + \frac{d^2}{2a^2} + \frac{d^3}{3a^3} + \frac{d^4}{4a^4} \text{ &c.}$$

$$l(a+d-a) = -\frac{ma}{a^{l:m}} + m + \frac{d}{a} + \frac{d^2}{2a^2} + \frac{d^3}{3a^3} - \frac{d^4}{4a^4} \text{ &c.}$$

woraus man diese Logarithmen selbst finden kan. Es wird aber insonderheit alles viel leichter, wenn man a der Einheit gleich setzet. Dadurch wird, weil $m-m=0$, der Logarithmus der Verhältniß $1:(1-d) = d + \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{3} + \frac{d^4}{4}$ &c. und der Logarithmus der Verhältniß $(1+d):1$ oder der Zahl $1+d$ wird: $d - \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{3} - \frac{d^4}{4} + \frac{d^5}{5}$, und so immer fort, bis man auf Kleinigkeiten komt, welche hier vor nichts gehalten werden können. Die Logarithmen, welche dergestalt herausgebracht werden, heißen die **natürlichen Logarithmen.**

225. Allein ob zwar diese Anweisung ungemein leichter ist als diejenige, der sich die ersten Berechner der Logarithmen bedienet haben, welche eine oft wiederholte Ausziehung der Quadratwurzel erfordert: so ist sie doch noch zu schwer, so lange eine leichtere vorhanden ist. Diese aber erhält man, wenn man die zwo Reihen, die wir eben herausgebracht haben, vereiniget. Nemlich wenn man den Logarithmus einer Verhältniß $a:a-d$ zu den Lo-

garithmus einer andern Verhältniß $a+d:a$ hinzusetzet, so erhält man dadurch den Logarithmus der Verhältniß, welche aus diesen beyden zusammen gesetzet ist, XIII,215. welche in dem gegebenen Fall, da das erste Glied der ersten Verhältniß mit dem zweyten Glied der andern einerley ist, keine andere seyn kan als $(a+d):(a-d)$, VIII,2. Es wird demnach der Logarithmus der Verhältniß $(a+d):(a-d)$ durch die Addition der Reihen des 223 Absatzes gefunden, welche die Summe $\frac{2d}{a} + \frac{2d^3}{3a^3} + \frac{2d^5}{5a^5} + \frac{2d^7}{7a^7}$ &c. giebet, weil die übrigen Glieder einander aufheben.

§. 226. Es lassen sich aber jede zwo Zahlen durch $a-d$, $a+d$ ausdrücken. Denn a ist eigentlich die halbe Summe der Zahlen $a-d$ und $a+d$, weil diese Zahlen, wenn man sie addiret $2a$ geben, und d ist der halbe Unterschied derselben. Denn wenn man $a-d$ von $a+d$ abziehet, so bleibt $2d$. Will man demnach zum Exempel den Logarithmus der Verhältniß 9:5 nach dieser Regel finden, so ist $a=\frac{9+5}{2}=7$, und $d=\frac{9-5}{2}$ $=2$. Man darf also nunmehro nur in der letzten Regel an statt des a überall 7, und an statt des d die 2 setzen, so wird der Logarithmus von 9:5 so genau als man will herausgebracht.

§. 227. Man kan aber auch unter d sich den ganzen Unterschied zwoer Zahlen vorstellen, und unter a ihre ganze Summe. Denn der Bruch $\frac{d}{a}$ bedeutet nichts anders, wenn sowol d als a zweymal mehr bedeutet, weil $\frac{2d}{2a}=\frac{d}{a}$. Eben so wird auch die Bedeutung der übrigen Brüche $\frac{d^3}{a^3}$, $\frac{d^5}{a^5}$ und so weiter nicht geändert, wenn man d den ganzen Unterschied und a die ganze Summe bedeuten läst. Man kan auch die 2 aus den Zehlern der Brüche der Reihe gar weglassen, und setzen, der Logarithmus der Verhältniß $\frac{a+d}{2}:\frac{a-d}{2}$ sey $=\frac{d}{a}+\frac{d^3}{3a^3}+\frac{d^5}{5a^5}+\frac{d^7}{7a^7}$ &c. Denn ob zwar dadurch ein jeder Logarithmus nur halb so groß heraus gebracht wird, als nach der vorigen Regel; so bleibt doch die Verhältniß der Logarithmen, in beyden Berechnungen einerley: worauf doch alles ankomt. Wir bleiben indessen bey der erstern Reihe, XIII,225. Uebrigens thut man bey der würkli-

chen

chen Berechnung der Logarithmen am besten, wenn man die Zahlen so annimt, daß d eins werde. Dadurch wird die Arbeit ungemein erleichtert, wie ein Exempel zeigen kan.

§. 228. Es sey der Logarithmus der Verhältniß 2:1 oder der Zahl 2 zu finden, so ist $d=1$ und $a=3$, und die Reihe

$$\frac{2d}{a} + \frac{2d^3}{3a^3} + \frac{2d^5}{5a^5} + \frac{2d^7}{7a^7} + \frac{2d^9}{9a^9} \text{ &c.}$$

verwandelt sich in diese nachfolgende:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3\cdot 3^3} + \frac{2}{5\cdot 3^5} + \frac{2}{7\cdot 3^7} \text{ &c.}$$

Diese Glieder können folgender gestalt nach und nach heraus gebracht werden. Man theile das erste Glied $\frac{2}{3}$ durch $3\times 3=9$, so ist der Quotient $\frac{2}{3^3}$, diesen theile man wieder durch 3×3 oder 9, so komt $\frac{2}{3^5}$, und durch eine wiederhohlte Division durch eben die 9 entstehet $\frac{2}{3^7}$. Man bekomt also nach und nach folgende Reihe,

$$\frac{2}{3}, \frac{2}{3^3}, \frac{2}{3^5}, \frac{2}{3^7} \text{ &c.}$$

Und man siehet, daß man aus derselben den Logarithmus der Verhältniß 2:1 oder der Zahl 2 würklich heraus bringe, wenn man die Helfte des ersten Gliedes dieser Reihe noch durch 1, die Helfte des zweyten durch 3, die Helfte des dritten durch 5 und so ferner, dividiret, alsdann aber die Summe aller dieser Glieder gedoppelt nimt. Es ist aber in zehentheilichten Brüchen:

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = 0,333333333$ folgends $\frac{1}{3 \times 1} = 0,333333333$

$\frac{1}{3^3} = 0,037037037$ - - $\frac{1}{3^3 \times 3} = 0,012345679$

$\frac{1}{3^5} = 0,004115226$ - - $\frac{1}{3^5 \times 5} = 0,000823045$

$\frac{1}{3^7} = 0,000457247$ - - $\frac{1}{3^7 \times 7} = 0,000065321$

$\frac{1}{3^9} = 0,000050805$ - - $\frac{1}{3^9 \times 9} = 0,000005645$

$\frac{1}{3^{11}} = 0,000005645$ - - $\frac{1}{3^{11} \times 11} = 0,000000513$

$\frac{1}{3^{13}} = 0,000000627$ - - $\frac{1}{3^{13} \times 13} = 0,000000048$

$\frac{1}{3^{15}} = 0,000000069$ - - $\frac{1}{3^{15} \times 15} = 0,000000004$

Die Summe hiervon gedoppelt giebt 0, 346573588

den Logarithmus von 2 = 0, 693147176

§. 229. Hieraus kan man sogleich den natürlichen Logarithmus zu 4 haben, wenn man den gefundenen Logarithmus verdoppelt, und es ist demnach der Logarithmus von 4 dieser 1,386294352. Auf eben die Art aber, wie wir den Logarithmus der Verhältniß 2:1 gefunden, findet man auch den Logarithmus der Verhältniß 5:4. Es ist in diesem Fall $a = 9$ und $d = 1$, folgends verwandelt sich nunmehro die Reihe in diese nachfolgende:

$$\frac{2}{9} + \frac{2}{3.9^3} + \frac{2}{5.9^5} + \frac{2}{7.9^7} \text{ &c.}$$

also wird in zehentheilichten Brüchen:

$\frac{2}{9} = 0,222222222$ folgends $\frac{2}{1.9} = 0,222222222$

$\frac{2}{9^3} = 0,002743484$ - - $\frac{2}{3.9^3} = 0,000914494$

$\frac{2}{9^5} = 0,000033870$ - - $\frac{2}{5.9^5} = 0,000006774$

$\frac{2}{9^7} = 0,000000418$ - - $\frac{2}{7.9^7} = 0,000000059$

Die Summe hievon, nemlich $0,223143549$
ist der gesuchte Logarithmus der Verhältniß 5 : 4.

§. 230. Da nun also ist

$l.4 : 1 = 1,386294352$
$l.5 : 4 = 0,223143549$

so wird, wenn man diese Logarithmen addiret, heraus gebracht $l.5 : 1 = l5 = 1,609437901$. Und da die Zahl 10 das Product aus 5 und 2 ist, so findet man ihren Logarithmus, wenn man die bereits gefundene Logarithmen von 2 und 5 addiret. Es war

$l.2 = 0,693147176$
$l.5 = 1,609437901$ } addirt

$l.10 = 2,302585077$

Wir achten dieses zu unserm Zweck hinlänglich, welcher bloß war zu zeigen, wie die Logarithmen gefunden werden. Denn wenn man sie genau finden will, so muß man dieselbe in viel mehrern Ziffern angeben, welches geschiehet, wenn man nur die Division weiter fortsetzet, wie unter andern aus den Exempeln zu sehen ist, die der selige Professor Hausen in seinen vortreflichen Elementen angebracht hat. Es sind diese Logarithmen alle natürlich, und von denjenigen verschieden, die gemeiniglich gebraucht werden. Diese zu erhalten müssen die gefundene Logarithmen annoch in solche verwandelt werden, die sich in die gemeine Briggische Tafel schicken.

§. 231. Es gründet sich diese Tafel auf die geometrische Progression 1, 10, 100, 1000, 10000, in welcher die Verhältniß 10 : 1 als einfach betrachtet wird: folgends ist in derselben der Logarithmus dieser Verhältniß oder der Zahl 10, die Einheit. Will man nun zum Exempel den Logarithmus von 2 in dieser Tafel finden, so sage man XIII, 213. wie der natürliche Logarithmus von 10 zu dem natürlichen Logarithmus von 2, so der Briggische Logarithmus von 10 zu den Briggischen Logarithmus von 2. Eben

so findet man auch den Briggischen Logarithmus zu einer jeden andern Zahl. Wenn man nemlich die Briggischen Logarithmen mit L und die natürlichen nach wie vor mit *l* bezeichnet, und man will den Briggischen Logarithmus der Zahl *n* haben, so ist *l.* 10 : *l. n* = L. 10 : L. *n*, folgends der gesuchte L. *n* $= \frac{\text{L. 10}}{l.\ 10} \times l.\ n.$ Man siehet also, daß man den natürlichen Logarithmus *l. n.* bloß mit dem Bruch $\frac{\text{L. 10}}{l.\ 10}$ multipliciren müsse, um den Briggischen Logarithmus eben der Zahl zu erhalten. Dieses geschiehet am leichtesten, wenn man den Bruch $\frac{\text{L. 10}}{l.\ 10}$ oder $\frac{1,000\,000}{2,302\,585}$ durch einen Decimalbruch ausdrücket, und hernach *l. n* durch diesen Bruch multipliciret. Es ist aber in Decimalbrüchen $\frac{\text{L. 10}}{l.\ 10} = 0,43429448\ldots$ Durch diese Zahl also muß man den natürlichen Logarithmus einer Zahl multipliciren, wenn man den Logarithmus der gewöhnlichen Briggischen Tafel heraus bringen will.

§. 232. Da übrigens in der Briggischen Tafel der Logarithmus von 10 die 1,0000000 ist, so ist nothwendiger Weise der Logarithmus von 100 die 2,0000000, und der Logarithmus von 1000 ist 3,0000000, der Logarithmus von 10000 aber 4,0000000, und so fort, XIII, 195. Demnach sind die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis an 10, ächte Brüche, die in der Tafel mit der 0 anfangen, wie zum Beyspiel der Logarithmus von 6, welcher dieser ist: 0,7781513. Die Logarithmen aller Zahlen von 10 bis 100 fangen mit der 1 an, wie der Logarithmus von 48, welcher ist: 1,6812412; die Logarithmen aller Zahlen von 100 bis an 1000 fangen mit der 2 an; die von 1000 bis an 10000 mit der 3, und so fort. Diese Zahl wird die **Charracteristick** des Logarithmus genennet, und deswegen gemeiniglich von den übrigen Ziffern des Logarithmus abgesondert. Sie ist immer um 1 kleiner als die Zahl der Ziffer, mit welchen die Zahl geschrieben wird, zu welcher der Logarithmus gehöret, dessen Characteristick sie ist.

§. 233. Es sind bey dieser Einrichtung die Logarithmen aller Zahlen, welche mit einerley Ziffern geschrieben werden, einerley, was auch diese Ziffer vor Ordnungen von Einheiten bedeuten mögen: bloß die Characteristicken sind verschieden. Als zum Beyspiele der Logarithmus der Zahl 2849 ist 3,4546924. Der Logarithmus aber der Zahl 28490 ist 4,4546924,

und der Logarithmus der Zahl 284900 ist 5, 4546924, und so immer fort. Im Gegentheile ist der Logarithmus der Zahl 284,9 dieser 2, 4546924, der Logarithmus der Zahl 28,49 aber ist 1, 4546924 und so weiter. Man siehet dieses vollkommen ein, wenn man erwegt, daß der Logarithmus einer Zahl $10n$, welche zehen mal größer ist als eine andere n aus dem Logarithmus ln entstehe, wenn man zu diesem Logarithmus ln den Logarithmus von 10, welcher 1, 0000000 ist, hinzu setzet, XIII, 195. Und daß hinwiederum aus dem Logarithmus der Zahl $10n$ der Logarithmus der Zahl n, welche zehenmal kleiner ist, heraus gebracht werde, wenn man von $l.10n$ den $l.10$ abziehet, XIII, 196.

§. 234. Ob zwar also die Logarithmen in den Tafeln, welche bey uns am meisten zu haben sind, nicht über 10000 gehen, so kan man doch aus diesen Tafeln die Logarithmen aller Zahlen, dergleichen wir eben beschrieben haben, nehmen; und ein Exempel kan am deutlichsten zeigen, wie dieses bequem zu verrichten ist. Es sey der Logarithmus der Zahl 0, 02849 zu finden. So schläget man in der Tafel den Logarithmus zu 2849 auf, welcher ist 3, 4546924. Weil nun die Zahl 0, 02849, deren Logarithmus gesucht wird, aus dieser Zahl 2849 entstehet, wenn man sie durch 100000 dividiret, oder wenn man das Zeichen der einfachen Einheiten um 5 Stellen zurück nach der Linken setzet: so muß von der Characteristick des gefundenen Logarithmus 3, die Zahl 5 als die Characteristick von 100000, abgezogen werden. Dadurch erhält man —2, 4546924, und dieses ist der Logarithmus der Zahl 0, 02849. Auf eben die Art verfähret man in allen dergleichen Fällen. Nemlich nachdem man den Logarithmus einer Zahl gefunden hat, welche in der Tafel stehet, und eben die Ziffer hat, als diejenige, deren Logarithmus man suchet; so setzet man der Characteristick des gefundenen Logarithmus so viele Einheiten zu, oder ziehet von derselben so viele Einheiten ab, als viele der Stellen sind, um welche man das Zeichen der einfachen Einheiten nach der Rechten fortsetzen, oder nach der Linken zurück rücken muß, damit aus der angenommenen die gegebene Zahl werde.

§. 235. Betrachtet man diese Arbeit, so siehet man, das die Characteristick eines Decimalbruchs immer negativ sey, und mit dem Zeichen — bezeichnet werden müsse, der übrige Theil des Logarithmus aber auch hier, wie immer, positiv bleibe. Dieses ist wohl zu merken, weil man sonst sich bey der Anwendung dieser Logarithmen sehr verstoßen könte. Uebrigens ist die Zahl der Einheiten, welche diese Characteristick bey einem jeden Decimalbruch haben muß, aus eben der Betrachtung leicht zu schlie-

ßen. Aus dieser Ursache, weil die Characteristick eines jeden Logarithmus, aus der Betrachtung der Zahl, zu welcher der Logarithmus gehöret, so leicht zu haben ist, wird dieselbe in den besten Tafeln gar nicht ausgedrücket.

§. 236. Hieraus aber lässet sich ferner zeigen, wie aus der Logarithmen der Zahlen bis 10000 die Logarithmen der übrigen Zahlen bis zu 10000000, und aller andern Zahlen, die aus sieben Ziffern bestehen, zu finden seyn. Denn weiter kan man bey den gewöhnlichen Logarithmen nicht gehen; weil in so wenigen Ziffern als dieselben haben, der Unterschied der Logarithmen sehr großer Zahlen, die nicht weit von einander entfernet sind, kaum mehr zu merken ist. Wenn zum Exempel die Logarithmen der Zahlen 5327954384 und 5327954300 angegeben werden solten, so würde ihr Unterschied weit kleiner seyn, als zween Logarithmen, die aus nicht mehr als acht Ziffern bestehen, von einander unterschieden seyn können. Zumalen, da man sich nicht einmal auf die letzten Ziffer der Logarithmen verlassen kan, weil sie meistentheils etwas zu groß oder zu klein sind.

[*Fig.* 385.] §. 237. Gesetzt, es sey Ee die Einheit, und Aa werde aus derselben durch eine Zahl ausgedrücket, die noch in der Logarithmentafel stehet, als durch 7532. Kk aber werde durch die Zahl 7533 ausgedrückt, die zunächst auf die vorige folget. Es sey aber der Logarithmus der Zahl 7532,643 zu finden, die zwischen beyden vorigen stehet, indem der kleinern noch der Bruch 0,643 zugesetzet worden ist: so stelle man sich vor, daß Ii durch diese mitlere Zahl ausgedrücket werde. Es ist EA der Logarithmus zu Aa, sowol als EK der Logarithmus zu Kk, aus der Tafel bekant, und EI der Logarithmus zu Ii, wird gesuchet. Diesen nun zu erhalten, verfähret man also. Man ziehet die Zahl Aa von der Zahl Kk ab, so bleibet Lk übrig: und diese ist die Einheit, weil die Zahlen Aa, Kk unmittelbar auf einander folgen. Ferner ziehe man auch Aa von der Ii ab: so bleibet der Bruch übrig, um welchen die mitlere Zahl die kleinere übertrift, und dieser Bruch drücket die iM aus. Endlich ziehe man auch den Logarithmus der kleinern ganzen Zahl EA von dem Logarithmus der größern ganzen Zahl EK ab, so bleibet AK = aL, der Unterschied der Logarithmen. In dem angenommenen Exempel ist:

$$\left.\begin{array}{l} EK = l.7533 = 3,8769680 \\ EA = l.7532 = 3,8769103 \end{array}\right\} \text{Subt.}$$

$$AK = aL = \quad .\ldots.577$$

§. 238. Nun sehe man kaL als ein geradelinichtes Drepeck an, weil in

in der That der Bogen ak so wenig gekrümmet ist, daß diese Krümmung kaum gemerket werden kan, so ist kL:iM = aL:aM oder Al. Das ist, wie die Einheit zu dem Bruch, 0,643 um welchen die gegebene Zahl 7532,643 die kleinere 7532 übertrift, so der gefundene Unterschied der Logarithmen 577, zu Al dem Ueberschuß des gesuchten Logarithmus über den kleinern. Wenn man derohalben 577 durch 0,643 multipliciret, so ist das Product 371,011 der gesuchte Unterschied, welcher dem kleinern Logarithmus 3,8769103 zugesetzt werden muß, damit der Logarithmus 3,8769474 heraus komme, der zu der Zahl 7532,643 gehöret.

§. 239. Aus diesem Logarithmus der Zahl 7532,643 ist nunmehro der Logarithmus der Zahl 7532643 leicht zu machen. Man vermehre nur XIII, 234. die Characteristick des gefundenen Logarithmus um drey Einheiten, so erlanget man denselben. Er ist nemlich 6,8769474. Und auf die Art verfähret man allezeit, wenn der Logarithmus einer Zahl zu finden ist, die nicht mehrere Ziffer hat, als oben XIII, 236 angezeiget worden ist. Ist der Logarithmus der Zahl 793248 zu finden, so suche man erstlich den Logarithmus der Zahl 7932,48, wie gewiesen worden ist, und mache sodann aus demselben den Logarithmus zu 793248. Und eben so verfahre man auch, wenn der Logarithmus zu 0,0793248, oder einer jeden andern dergleichen Zahl zu finden ist.

§. 240. Auf eben die Art findet man auch die Zahl, so zu einem Logarithmus gehöret, der nicht in der Tafel angetroffen wird. Wir wollen dieses wieder mit einem Beyspiel weisen. Der Logarithmus sey 3,8769474, dieser stehet nicht in der Tafel, denn der unmittelbar kleinere ist 3,8769103, und der unmittelbar größere 3,8769680. Der Unterschied aber dieser Logarithmen ist 577. Da also zu den ersten dieser Logarithmen die Zahl 7532 gehöret, und zu dem zweyten die Zahl 7533, so ist die Zahl, so zu dem gesuchten Logarithmus gehöret, größer als 7532, und kleiner als 7533. Will man nun den Ueberschuß dieser Zahl über die kleinere 7532 genau haben: so suche man auch den Ueberschuß des gegebenen Logarithmus 3,879474 über den kleinern, welcher 371 ist. Stellet man sich nun vor, daß aL, wieder den Unterschied der zwey Logarithmen EA und EK bedeute, zwischen welchen der gegebene EI stehet, und folgends Al = aM den Ueberschuß dieses gegebenen Logarithmus über den kleinern; Aa, aber Ii und Kk die Zahlen, die zu diesen Logarithmen gehören: so siehet man, daß man sagen müsse, wie aL zu aM so Lk zu Mi. Das ist, in unserm Exempel, wie 577 zu 371, so die Einheit zu dem Ueberschuß der gesuchten Zahl Ii über die kleinere Aa. Es ist also dieser Ueberschuß 0,643, und demnach die gesuchte Zahl 7532,643.

§. 241. Auf eben die Art findet man auch die Zahl zu einem Logarithmus, welcher größer ist, als der gröste Logarithmus der Tafel: zum Exempel zu 6,8769474. Man vermindert erstlich die Characteristick so sehr als es erfordert wird, daß sie in die Tafel falle: und merket die abgezogene Einheiten an, deren hier 3 sind. Der Logarithmus wird dadurch 3,8769474. Sodann suchet man die Zahl, so zu diesem Logarithmus gehöret 7532,643, woraus denn leicht die Zahl zu finden ist, welche zu den Logarithmus gehöret, welcher eben die Ziffer hat, aber dessen Characteristick um drey Einheiten größer ist: welches eben der Logarithmus 6,8769474 ist, der Anfangs gegeben worden. Es ist nemlich diese Zahl 7532643.

§. 242. Ist der Logarithmus — 2,8769474 gegeben, so setze man seiner Characteristick fünf Einheiten zu, damit derselbe in die Tafel falle, indem er wieder 3,8769474 wird; suche sodann die Zahl, so zu diesen Logarithmus gehöret, nemlich die vorige 7532,643, rücke aber in derselben das Zeichen der einfachen Einheiten um fünf Einheit zurück, so ist die Zahl 0,07532643 diejenige, die zu dem Logarithmus — 2,8769474 gehöret. Alles dieses kan eine wiederholte Anwendung auf verschiedene Exempel, so mit einigem Nachsinnen verknüpfet ist, deutlicher machen als viele Worte.

§. 243. Da 3,4043205 der Logarithmus der Zahl 2537 ist: so ist — 3,4043205 der Logarithmus des Bruchs $\frac{1}{2537}$, wenn das Zeichen — sich nicht bloß auf die Characteristick sondern auf den ganzen Logarithmus beziehet, XIII, 158. Will man diesen Bruch in einen zehentheilichten verwandeln; so darf man nur den Zehler desselben durch den Nenner dividiren. Folgends komt der Logarithmus des zehentheilichten Bruches, welcher dem Bruch $\frac{1}{2537}$ gleich ist, wenn man den gegebenen Logarithmus 3,4043205, von dem Logarithmus der Einheit, das ist, von 0,0000000, das ist, von — 10 + 9,9999999 . . . . . abziehet, XIII, 196. Man erhält dadurch — 4,5956795, und dieses ist der Logarithmus des verlangeten Decimalbruches. Nun ist die Zahl, welche zu dem Logarithmus 4,5956795 gehöret 3941 6,64, folgends ist der Bruch selbst 0,0003941664. Eben so verfähret man in allen übrigen dergleichen Fällen.

§. 244. Man erhält aber, wenn man vermittelst der Logarithmen rechnet, nicht leicht andere, als Decimalbrüche, oder kan jene wenigstens im-

immer vermeiden, wenn man nur der gewöhnlichen Regel folget. Es sey zu 170, zu 5,97 und zu 0,83 die vierte Proportionalzahl, vermittelst der Logarithmen zu finden, so ist

$$\left.\begin{array}{l} l.\,170 = \;\; 2,2304489 \\ l.\,5{,}97 = \;\; 0,7759734 \\ l.\,0{,}83 = -1,9190781 \end{array}\right\}\text{addirt.}\quad\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ 0,6950515 \end{array}\right\}\text{subtr.}$$

$$-\,2,4646026$$

Es ist also der Logarithmus der gesuchten vierten Zahl dieser, — 2,4646026, in welchen bloß die Characteristick negativ, das übrige aber positiv ist. Da also der Logarithmus 2,4646026 zu der Zahl 291,47 gehöret, so gehöret der gefundene Logarithmus zu den Decimalbruch 0,029147, und dieser ist die verlangete vierte Proportionalzahl.

§. 245. In diesen und allen dergleichen Fällen macht also eine negative Characteristick nicht die geringste Schwierigkeit. Ist aber vermittelst der Logarithmen eine Wurzel auszuziehen, so kommen Fälle vor, die einen Anfänger aufhalten könten, und also einiger Anweisung bedörfen. Gesetzt, man will die Quadratwurzel der Zahl 0,57932 haben, so ist der Logarithmus dieser Zahl —1,7629185, in welchem das Zeichen — sich bloß auf die Characteristick beziehet, XIII, 235. der Logarithmus der gesuchten Quadratwurzel ist die Helfte dieses gegebenen Logarithmus, XIII,197. Will man also denselben haben, so muß man sowol die Characteristick, als den übrigen Theil des Logarithmus, in ihre Helften theilen. Dadurch würde man heraus bringen $-\frac{1}{2}+0,3814592$, welcher Logarithmus in keiner Tafel anzutreffen ist, als in welchen die Characteristicken immer nothwendig ganze Zahlen sind. Damit ich also eine ganze Zahl zur Characteristick erhalte, so schreibe ich, oder stelle mir vor als ob geschrieben wäre, an statt der negativen Characteristick — 1 diese zusammen gesetzte — 2 + 1, wodurch der Logarithmus die folgende Gestalt bekomt: — 2 + 1,7629185. Dieser Logarithmus kan nun in zwey gleiche Theile getheilet werden, ohne daß in die Characteristick ein Bruch komme, und die Helfte desselben ist — 1,8814592, indem allein die Characteristick negativ ist. Die Zahl, welche zu diesem Logarithmus gehöret, ist die gesuchte Quadratwurzel.

§. 246. Auf eben die Art verfahre ich auch, wenn die Cubicwurzel oder eine andere noch höhere auszuziehen iſt. Zur Cubicwurzel ſchreibe ich an ſtatt der Characteriſtick -1, dieſe $-3+2$, an ſtatt -2 aber $-3+1$, und ſo in allen übrigen Fällen. Man kan auch anderſt verfahren. Dieſe Art aber ſcheinet mir die natürlichſte zu ſeyn, bey welcher, weil immer nach einerley Geſetzen gerechnet wird, man nicht in Gefahr iſt, ſich ſo leicht zu verirren. Bedienet man ſich recht wohl eingerichteter Tafeln, ſo werden die gegebenen Anweiſungen, von der Erfindung der Zahl, welche zu einen gegebenen Logarithmus, oder des Logarithmus, welcher zu einer gegebenen Zahl gehöret, meiſtentheils unnütze; weil man aus denſelben die Logarithmen aller Zahlen, die mit weniger als ſieben oder acht Ziffern geſchrieben werden, und zu den gegebenen Logarithmen dergleichen Zahlen, gar leicht finden kan. Und aus der Urſache ſind freylich dergleichen vollſtändige Tafeln denenjenigen, mit welchen wir uns gemeiniglich ſchleppen, weit vorzuziehen. Ich bediene mich der 1742 in London von Wilh. Gardiner herausgegebenen Tafeln des Scherwins.

Vierzehenter Abschnitt.

Berechnung der Cirkel und Winkel.

Ein wichtiger Grundsatz.

§. 1.

Nunmehro können wir uns zu der Berechnung des Cirkels und der übrigen krummen Flächen, welche wir in der Geometrie betrachtet haben, wenden. Es wird aber hier alles hauptsächlich darauf ankommen, daß man eine gerade Linie zu schaffen wisse, welche so groß sey als der Umkreis eines gegebenen Cirkels. Sind wir dieses zu thun im Stande, so folget das übrige alles gar leicht. Es ist diese Vergleichung des Umkreises eines Cirkels mit einer geraden Linie bereits gewiesen worden, XIII, 44. Wir werden aber dieselbe hier auf eine ganz andere Art heraus bringen, welche zu den wichtigsten Erfindungen gebraucht wird, und derowegen unsere Anfmerksamkeit vorzüglich verdienet.

§. 2. Der Grund, auf welchen wir hier bauen werden, ist der Satz, dessen oben XIII, 158. Erwehnung geschehen ist, allwo wir zugleich den großen Nutzen desselben angepriesen haben. Man stelle sich nemlich eine beliebige Größe unter T vor, und vermehre sie um eine Kleinigkeit, welche in Ansehung der ganzen T in gar keine Betrachtung kommen kan. Diese sey t, und die vermehrte Größe sey also $T+t$. Man erhebe T zu einer beliebigen Dignität, deren Exponenten man sich unter m vorstellet, und welche folgends durch T^m bedeutet wird, oder welches auf eben das hinaus komt, man stelle sich in einer geometrischen Reihe, die von der Einheit anfänat, und deren zweytes Glied T ist, das Glied T^m vor, welches von dem ersten um so viele Glieder entfernt ist, als viele Einheiten die Zahl m enthält. Eben dieses thue man bey der vermehrten Größe $T+t$, und mache $(T+t)^m$: so wird diese $(T+t)^m = T^m + m\,T^{m-1}t$. Also ist bey den gesetzten Bedingungen, wenn nemlich t so klein ist, daß es in Ansehung der T in keine Betrachtung kommen kan, der Ueberschuß der $(T+t)^m$ über T^m dieser $m\,T^{m-1}t$.

Und indem T um die Größe t angewachsen, so ist die Dignität derselben, deren Exponent m ist, um $mT^{m-1}t$ vergrößert worden.

§. 3. Man findet also aus dem t, um welches die Wurzel oder das zweyte Glied der Reihe T vermehret worden ist, und aus dem Exponenten der Dignität oder des Gliedes T^m, die Größe, um welche diese Dignität angewachsen, indem die Wurzel um t vergrößert worden ist, gar leicht. Man gebe dem T einen Exponenten, der um eins kleiner ist als m, und multiplicire diese Dignität T^{m-1} sowol durch den vorigen Exponenten m als auch durch t, um welches die Wurzel angewachsen, so hat man $mT^{m-1}t$, welches man suchte.

§. 4. Will man also hinwiederum aus dieser Größe $mT^{m-1}t$, um welche die Dignität angewachsen, die Dignität T^m selbst finden, welche dergestalt gewachsen ist, so hat man nur den Exponenten des T^{m-1} mit der Einheit zu vermehren, und also $mT^{m-1}t$ in mT^mt zu verwandeln, sodann aber diese Größe mT^mt sowol durch den Exponenten m als auch durch t zu dividiren, so erhält man die T^m, welche man suchte.

§. 5. Es sey $m = 2$, so wird $T^m = T^2$, und $mT^{m-1}t$ wird $2T^1t = 2Tt$. Vermehret man nun in dieser Größe den Exponenten der Dignität der T um 1, und dividiret dieselbe durch $2t$, so hat man wieder T^2. Es sey $m = 3$, so wird $T^m = T^3$, und $mT^{m-1}t$ wird $3T^2t$. Wenn man nun hier wieder den Exponenten 2 mit 1 vermehret, und, was dergestalt heraus gebracht wird, mit $3t$ dividiret, so bringt man aus $3T^2t$ wieder die T^3 heraus, welche um $3T^2t$ vermehret worden ist, indem T selbst um t angewachsen.

§. 6. Ist zu zwo gegebenen Größen n, r und zu der Dignität T^m die vierte Proportionalgröße gefunden worden, welche $\frac{r}{n} \times T^m$ ausdrücket, und ist wieder T um die Kleinigkeit t vermehret worden; so ist $\frac{r}{n} \times (T+t)^m = \frac{r}{n} \times T^m + \frac{r}{n} \times mT^{m-1}t$, wie man leicht siehet. Der Ueberschuß dieser letztern Dignität über die erstere ist demnach $\frac{r}{n} \times mT^{m-1}t$. Daß also denselben heraus zu bringen, man erstlich eben der Regel, vermittelst welcher der Ueberschuß des $(T+t)^m$ über T^m dargestellet wird, folgen, sodann aber das also gefundene $mT^{m-1}t$, mit dem Bruch $\frac{r}{n}$ multipliciren muß. Und hin-

hinwiederum komt $\frac{r}{n} \times T^m$ aus dem Ueberschuß $\frac{r}{n} \times mT^{m-1}t$, wenn man sich Anfangs an den Bruch $\frac{r}{n}$ nicht kehret, sondern aus $mT^{m-1}t$ die T^m nach den gegebenen Regeln heraus bringt, und derselben sodann den Bruch $\frac{r}{n}$ vorschreibet.

§. 7. Es sey nunmehro die Dignität zu finden, deren Wurzel, wenn sie um t vermehret wird, die Dignität selbst um T^{3t} vermehret: so stelle man sich vor, daß diese Größe mit der $\frac{r}{n} \times mT^{m-1}t$ einerley bedeute, welches seyn wird, wenn m der Zahl 4 gleich ist, und $\frac{r}{n} = \frac{1}{4}$. Denn wenn man diese Bedeutung an gehörigen Ort setzet, so wird $\frac{r}{n} \times mT^{m-1}t = \frac{1}{4} \times 4 T^{3t} = T^{3t}$. Da nun aber die Dignität, welche um $\frac{r}{n} \times mT^{m-1}t$ zugenommen, indem die Wurzel zu $T+t$ angewachsen, $\frac{r}{n} \times T^m$ ist, so kan man dieselbe, bey der bestimten Bedeutung des Bruchs $\frac{r}{n}$, und des Exponenten m, leicht finden. Sie ist $T^{\frac{1}{4}}$. Und auf die Art kan man immer verfahren. Wird die Größe gesucht, welche um T^{et} angewachsen, indem die Wurzel T und t vermehret worden, so setze man wieder $T^{et} = \frac{r}{n} \times mT^{m-1}t$, so ist $e = m - 1$, folgends $m = e+1$, und $\frac{r}{n} \times m = 1$, weil vor der T^{et} kein anderer Factor stehet als die Einheit. Dividiret man nun beyderseits durch m; so wird $\frac{r}{n} = \frac{1}{m}$. Da nun bekant ist, daß $\frac{r}{n} \times T^m$ die Größe ist, welche man suchet, so setze man nur in derselben an statt m, $e+1$, und an statt $\frac{r}{n}$ schreibe man $\frac{1}{m}$, das ist $\frac{1}{e+1}$, so wird eben die Größe aus derjeni-

gen, so gegeben worden, unmittelbar bestimmet. Nemlich die dergestalt heraus gebrachte $\frac{1}{e+1} \times T^{e+1}$ ist die Größe, welche, wenn man in derselben T um t vermehret, dadurch um die gegebene T^{et} vermehret wird.

§. 8. Dieser Satz ist allgemein: betrachtet man ihn aber etwas genauer, so findet man, daß sich auch auf denselben die Anfangs XIV, 4. gegebene Regel schicke. Soll aus dem T^{et} das $\frac{1}{e+1} \times T^{e+1}$ herausgebracht werden, so muß man erstlich den Exponenten e um die Einheiten vermehren, und sodann $T^{e+1}t$ sowol durch $e+1$ als auch durch t dividiren. Dasjenige so von den Brüchen XIV, 6. gewiesen worden, bleibt übrigens in seinem Werth, wie man leicht siehet: wenn $\frac{r}{n} \times T^{et}$ gegeben ist, und man soll die wachsende Größe finden, so wird dieselbe $\frac{r}{n} \times \frac{T^{e+1}}{e+1}$. Man bekümmert sich nemlich im Anfang um den Bruch nicht, sondern schreibt ihn nur zuletzt vor die gefundene $\frac{T^{e+1}}{e+1}$, wie man ihn vor der gegebenen T^{et} findet.

§. 9. Dieses sind die Sätze auf welche sich die neuen Geometrä gründen, so oft sie die krummen Linien durch Zahlen ausdrücken wollen, welche ihre Verhältniß gegen grade Linien genau, oder doch so nahe darstellen, als nöthig ist: wenn diese Verhältniß nicht genau in Zahlen oder geraden Linien anzugeben ist. Wir werden dieselbe sogleich auf die Cirkelbogen anwenden.

Berechnung des Umkreises eines Cirkels.

[Fig. 383.] §. 10. Es sey AB ein Cirkelbogen, dessen Mittelpunct in C fällt, AC sey ein Radius desselben, und AD berühre den Bogen in A. Man ziehe CBD nach Belieben, und nachdem man den Bogen etwas weniges bis in b fortgezogen, und zugleich die Tangente AD so viel nöthig ist, verlängert hat, so ziehe man auch Cbd, und beschreibe durch D den Bogen DE um den Mittelpunct C. Weil man nun Bb gar klein genommen hat, so ist dieser Bogen Bb von einer geraden Linie kaum verschieden, und zwar desto weniger, je kleiner er ist, so daß, wenn man ihn so sehr vermindert, daß er fast gar verschwindet, auch seine Krümmung unbegreiflich klein

klein wird, und man also diesen Bogen Bb sowol als DE vor eine gerade Linie halten kan. So bald man dieses angenommen hat, muß man DEd als ein geradelinichtes Dreyeck ansehen, dessen Winkel bey E gerade ist, weil ein jeder Cirkelbogen mit seinem Halbmesser einen geraden Winkel machet, V, 48. Da nun aber auch der Winkel d dieses Dreyecks demselben, und dem ebenfals geradewinklichten Dreyeck dAC gemeinschaftlich ist, und da also die Dreyecke DEd und dAC ähnlich sind, VII, 23. so ist Dd : DE = DC : AC. Außer dem aber verhalten sich die Bogen DE, Bb, wie die Halbmesser, mit welchen sie beschrieben worden sind VII, 53. Es ist nemlich DE : Bb = DC : BC, oder DE : Bb = DC : AC. Vergleichet man nun diese Proportion mit der vorigen Dd : DE = DC : AC, so siehet man, daß die Verhältniß Dd : Bb aus der Verhältniß DC : AC entstehe, wenn man diese verdoppelt, VIII, 9. Demnach verhält sich Dd zur Bb, wie sich das Quadrat aus DC zu dem Quadrat aus AC verhält, oder kurz, es ist $DC^q : AC^q = Dd : Bb$, IX, 69.

§. 11. Man nenne nunmehro den Radius AC der Kürze halber R, und die Tangente AD nenne man T, so ist IX, 66. $CD^q = AD^q + AC^q = R^q + T^q$. Die Dd ist das Theilchen, um welches die Tangente T wächset, indem der Cirkelbogen AB um Bb größer wird, und dieses Theilchen ist in Ansehung der ganzen T so klein, daß es mit demselben in keine Vergleichung zu ziehen ist. Man benenne diese Dd mit t, so wird die Proportion, die wir eben erwiesen haben, unter diesen Benennungen also stehen: $(RR+TT) : RR = t : Bb$. Demnach ist $Bb = \frac{RR}{RR+TT} \times t$.

§. 12. Der Bruch $\frac{RR}{RR+TT}$ durch welchen t zu multipliciren ist, damit Bb erhalten werde, ist von der Summe aller Glieder einer geometrischen Progression, welche beständig absteiget, desto weniger unterschieden, je weiter man die Progression fortführet, wie wir oben gesehen haben, als wir von solchen Progressionen handelten, XIII, 122. Und zwar ist diese Progression $1 - \frac{T^2}{R^2} + \frac{T^4}{R^4} - \frac{T^6}{R^6} + \frac{T^8}{R^8} -$ &c. Denn wenn a das erste Glied einer geometrischen Progression bedeutet, welche mit verwechselten Zeichen absteiget, und b das zweyte: so ist die Summe aller Glieder derselben $\frac{aa}{a+b}$ XIII, 122. Setzet man aber vor a die 1 und vor b $\frac{T^2}{R^2}$; so

wird $\frac{aa}{a+b} = \frac{1}{1+\frac{TT}{RR}} = \frac{RR}{RR+TT}$. Wenn man also in dem Ausdruck der Bb, da nemlich $Bb = \frac{RR}{RR+TT} \times t$ an statt des Bruchs $\frac{RR}{RR+TT}$ diese Reihe setzet; so findet man $Bb = t - \frac{T^2 t}{R^2} + \frac{T^4 t}{R^4} - \frac{T^6 t}{R^6} + \frac{T^8 t}{R^8} -$ &c.

§. 13. Wir haben also das unendlich kleine Theilchen Bb aus der ABD oder T, und aus dem Theilchen derselben Dd dergestalt ausgedrückt, daß wir eine Reihe von unendlich kleinen Größen $t - \frac{T^2 t}{R^2} + \frac{T^4 t}{R^4}$ gefunden, welche zusammen die Bb ausmachen. Wir wissen aber auch, XIV, 7. wie aus solchen Theilchen als t, $\frac{T^2 t}{R^2}$, die wachsenden Größen T, $\frac{T^3}{3R^2}$ &c. selbst zu finden sind, und man siehet vor sich, daß die Größe, welche um Bb angewachsen ist, der Bogen AB sey.

§. 14. Nun aber ist klar, erstlich daß, wenn zwo Größen, welche im Anfang beyde nichts gewesen sind, nach und nach dergestalt anwachsen, daß die Theile, um welche sie zugleich anwachsen, immer gleich sind; auch die ganzen Größen, welche dergestalt zugleich anwachsen, immer gleich seyn werden. AB wächset von nichts, denn bey A ist der Bogen von keiner Größe. Ein Theilchen, um welches es angewachsen ist, ist Bb. Ein jedes solches Theilchen ist der Summe aller Glieder der Reihe $t - \frac{T^2 t}{R^2} + \frac{T^4 t}{R^4}$ &c. gleich. Also ist auch immer AB der Größe gleich, welche um $t - \frac{T^2 t}{R^2} + \frac{T^4 t}{R^4}$ &c. anwächset, indem zu der AB das Theilchen Bb hinzukömt.

§. 15. Zweytens ist klar, daß, wenn eine Größe s von nichts anwächset, und ihr Wachsthum s ist aus verschiedenen Theilen $o - p + q$ zusammen gesetzt: auch die ganze Größe s welche dergestalt anwächset, aus den Größen $O - P + Q$ bestehen werde, deren erstere O aus der Kleinigkeit o angewachsen ist, und die zweyte P entstanden, indem das Ganze immer um p abgenommen, die dritte Q aber durch den beständigen Zuwachs der q heraus gekommen. Denn gesetzt, jemand, welcher gar nichts hat, be-

bekäme täglich geschenkt 5, welches unser o seyn soll, er gebe täglich aus $7 = p$, und er verdiente $3 = q$, so ist kein Zweifel, daß nach sieben Tagen er haben werde $7o - 7p + 7q$. Und so ist es immer, man mag diese oder jene Zahl der Tage annehmen. Wird nun die Zahl der Tage durch N ausgedrückt, und bedeutet s die Summe seines Vermögens nach dieser Zeit, so ist ohnstreitig $S = No - Np + Nq$. Und weil No dasjenige ist, welches aus dem o angewachsen ist, und Np dasjenige, welches entstanden, indem das Ganze täglich um p abgenommen, wie auch Nq dasjenige, so durch den täglichen Zuwachs q herausgebracht worden; so muß man, wenn man sich der vorigen Zeichnung bedienen will, No nennen O und Np wird P, wie auch $Nq = Q$. Folgends ist $S = O - P + Q$. Man siehet leicht, daß eben dieses richtig seyn müsse, wenn die tägliche Einnahme und Ausgabe ungleich ist. S ist auch in diesem Fall gewiß gleich der Summe alles geschenkten o, und der Summe alles verdienten q, weniger der Summe alles ausgegebenen p.

§. 16. Wenden wir nun dieses auf unsere Reihe an, da das Theilchen Bb, um welches der Bogen AB anwächset, aus den verschiedenen Theilen $t - \frac{T^2 t}{R^2} + \frac{T^4 t}{R^4}$ bestehet: so siehet man, daß der ganze Bogen AB, welcher dergestalt angewachsen ist, aus $T - \frac{T^3}{3R^2} + \frac{T^5}{5R^4}$ &c. bestehen werde, und man hat also:

$$AB = T - \frac{T^3}{3R^2} + \frac{T^5}{5R^4} - \frac{T^7}{7R^6} + \frac{T^9}{9R^8} - \frac{T^{11}}{11R^{10}} \text{ &c.}$$

Oder wenn der gemeinschaftliche Factor T abgesondert wird, und man nimt den Halbmesser R vor die Einheit an, so ist:

$$AB = T \times \left(1 - \frac{T^2}{3} + \frac{T^4}{5} - \frac{T^6}{7} + \frac{T^8}{9} - \frac{T^{10}}{11} \text{ &c.}\right.$$

Und man kan aus dieser Reihe den Bogen AB so nahe finden als man will, wenn nur bekant ist, wie sich T oder AD gegen den Halbmesser AC verhalte, damit man nemlich T aus diesem, das ist, aus der angenommenen Einheit, ausdrücken könne.

§. 17.

§. 17. Dieses zu erhalten, sey der Bogen AB der dritte Theil eines Quadranten, oder der sechste Theil des halben Umkreises, und man ziehe BF auf AC perpendicular. Diese BF wird dadurch die Helfte der Sehne eines Bogens, welcher zweymal so groß als AB, und folgends der sechste Theil des ganzen Umkreises ist. Und da die Sehne des sechsten Theils des Umkreises dem Halbmesser des Cirkels AC gleich ist, V, 89. und dieser vor die Einheit angenommen worden, so ist $BF = \frac{1}{2}$ und $BF^q = \frac{1}{4}$. Da nun in dem geradewinklichten Dreyeck BCF, $FC^q = BC^q - BF^q$, IX, 66. so ist $FC^q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Und weil $CF : FB = AC : AD = AC : T$, und also auch $CF^q : FB^q = AC^q : AD^q$, IX, 73. das ist, $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 1 : T^q$, so ist $T^q = \frac{1}{3}$, und folgends $T = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Man hat also AD oder T aus dem Halbmesser des Cirkels bestimmet, und die Verhältniß des Bogens AB zu den halben Cirkel ist ebenfals bekant. Also ist weiter nichts nöthig, als daß man an statt des T^2 in der heraus gebrachten Reihe überall $\frac{1}{3}$ schreibe, wenn der sechste Theil des halben Umkreises AB würklich aus dem Radius ausgedrücket werden soll, welchen man vor 1 angenommen hat. Es wird dadurch:

$$AB = T \times \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9} - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11}\right.$$, und so fort.

§. 18. Es ist nicht ohne Bedacht geschehen, daß wir den gemeinschaftlichen Factor T stehen lassen, da wir an die Stelle desselben hätten $\sqrt{3}$ schreiben können. Will man den halben Umkreis auf die Art ausdrücken, so hat man nur beyderseits mit 6 zu multiplicieren, so wird, wenn man den ganzen Umkreis sich unter P vorstellet, und S die Summe aller Glieder der Reihe bedeuten läßt, die durch T zu multipliciren sind, $6AB = \frac{1}{2}P = 6T \times S$, folgends $\frac{1}{4}PP = 36TT \times SS$. Da nun $TT = \frac{1}{3}$, so ist $\frac{1}{4}PP = 36 \times \frac{1}{3} \times SS = 12SS$. Und wenn man also wieder beyderseits die Quadratwurzel nimt, so ist $\frac{1}{2}P = \sqrt{12} \times S$. Denn man kan die Quadratwurzel von 12 nicht genau schaffen. Schreibt man nun an die Stelle des S wiederum die Reihe, so wird $\frac{1}{2}P = \sqrt{12} \times \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9} - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11}\right.$, und so fort. Diese Reihe kan man nachfolgender maßen am bequemsten rechnen.

§. 19. Man fänget an, III, 48. die Quadratwurzel von 12 in Decimalbrüchen so nahe zu schaffen, als man es nöthig erachtet, und dividiret diese Wurzel mit 3, und den Quotienten von dieser Division wieder mit 3. Eben dieses thut man mit dem neuen Quotienten, und so immer fort, bis man auf unbeträchtliche Kleinigkeiten komt. Dadurch erhält man die Glieder der Reihe $\sqrt{12}$, $\frac{\sqrt{12}}{3}$, $\frac{\sqrt{12}}{3 \cdot 3}$, $\frac{\sqrt{12}}{3 \cdot 3 \cdot 3}$ &c. Nach diesem dividiret man die dergestalt berechneten Glieder, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, das erste durch 1, das zweyte durch 3, das dritte durch 5, und so fort, so erhält man die Glieder der Reihe, welche den halben Umkreis ausdrücket, selbst, nemlich $\frac{\sqrt{12}}{1}$, $\frac{\sqrt{12}}{3 \cdot 3}$, $\frac{\sqrt{12}}{3 \cdot 3 \cdot 5}$, $\frac{\sqrt{12}}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}$, $\frac{\sqrt{12}}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9}$ &c. Nur muß man sich erinnern, daß das erste dieser Glieder das Zeichen + habe, das zweyte aber —, das dritte wieder +, und so immer abgewechselt, und daß man also die Summe des zweyten, vierten, sechsten und aller übrigen Glieder, deren Entfernung von dem ersten eine gerade Zahl ausdrücket, von der Summe der übrigen Glieder abziehen müsse, wenn man den Umkreis würklich erhalten will. Aus dieser Ursache thut man wohl, wenn man sogleich, indem man diese Glieder machet, diejenigen besonders schreibt, welche + haben, und die übrigen auch besonders, wodurch die Rechnung dieses Ansehen bekomt:

$$\frac{\sqrt{12}}{1}$$

$\frac{\sqrt{12}}{1} = 3,46410161$ $\frac{\sqrt{12}}{1} = 3,46410161$

$\frac{\sqrt{12}}{3} = 1,15470053$ - - - = $\frac{\sqrt{12}}{3.3^3} = 0,38490017$

$\frac{\sqrt{12}}{3.3} = 0,38490017$ $\frac{\sqrt{12}}{5.3^2} = 0,07698003$ - - - -

$\frac{\sqrt{12}}{3^3} = 0,12830005$ - - - - $\frac{\sqrt{12}}{7.3^3} = 0,01832858$

$\frac{\sqrt{12}}{3^4} = 0,04276668$ $\frac{\sqrt{12}}{9.3^4} = 0,00475185$ - - - -

$\frac{\sqrt{12}}{3^5} = 0,01425556$ - - - - $\frac{\sqrt{12}}{11.3^5} = 0,00129596$

$\frac{\sqrt{12}}{3^6} = 0,00475185$ $\frac{\sqrt{12}}{13.3^6} = 0,00036553$ - - - -

$\frac{\sqrt{12}}{3^7} = 0,00158395$ - - - - $\frac{\sqrt{12}}{15.3^7} = 0,00010559$

$\frac{\sqrt{12}}{3^8} = 0,00052798$ $\frac{\sqrt{12}}{17.3^8} = 0,00003105$ - - - -

$\frac{\sqrt{12}}{3^9} = 0,00017599$ - - - - $\frac{\sqrt{12}}{19.3^9} = 0,00000926$

$\frac{\sqrt{12}}{3^{10}} = 0,00005866$ $\frac{\sqrt{12}}{21.3^{10}} = 0,00000279$ - - - -

$\frac{\sqrt{12}}{3^{11}} = 0,00001955$ - - - - $\frac{\sqrt{12}}{23.3^{11}} = 0,00000085$

$\frac{\sqrt{12}}{3^{12}} = 0,00000652$ $\frac{\sqrt{12}}{25.3^{12}} = 0,00000026$ - - - -

$\frac{\sqrt{12}}{3^{13}} = 0,00000217$ - - - - $\frac{\sqrt{12}}{27.3^{13}} = 0,00000008$

$\frac{\sqrt{12}}{3^{14}} = 0,00000072$ $\frac{\sqrt{12}}{29.3^{14}} = 0,00000002$ - - - -

$\frac{\sqrt{12}}{3^{15}} = 0,00000024$ - - - - $\frac{\sqrt{12}}{31.3^{15}} = 0,00000000$

+	3,54623314	0,40464049
−	0,40464049	
	3,14159265	

§. 20.

§. 20. Es enthält also der halbe Umkreis den Halbmesser dreymal, und über dieses 0, 14159265 Theilchen desselben, oder wenn man den Radius in 100000000 Theilchen theilet, so enthält der halbe Umkreis dieser Theilchen 314159265, und wie sich die erste dieser Zahlen zu der zweyten verhält, so verhält sich der halbe Durchmesser zu dem halben Umkreis. Eben diese Verhältniß hat auch der ganze Durchmesser zu dem ganzen Umkreis. Man kan aber auch diese Verhältniß in mehrern Ziffern noch genauer schaffen, wenn man sich nur der Quadratwurzel von 12 durch kleinere Brüche noch mehr nähert, als wir der Kürze wegen gethan haben. Thut man dieses, oder siehet auch nur die Rechnungen geschickter Männer nach, so findet man, daß alle Ziffern richtig sind, die wir gefunden haben, da man sonst wegen der zwo letzten in Zweifel stehen müste, weil die Brüche, welche zusammen gerechnet werden musten, um Kleinigkeiten fehlen. Es haben aber diese Fehler einander durch die Subtraction des einen fehlerhaften von dem andern, wie öfters geschiehet, aufgehoben.

§. 21. Es erfordert aber die Ausübung selten und vielleicht gar niemals, daß man die Verhältniß des Diameters eines Cirkels gegen seinen Umkreis genauer bestimme, als wir gethan haben, ja man braucht selbst die Ziffern, welche dergestalt gefunden worden sind, gar selten. Man lässet meistentheils in der Zahl, welche den Umkreis ausdrücket, die letzten Ziffern als Kleinigkeiten weg, und nimt nur die erstern an. Man setzt zum Exempel, der Durchmesser verhalte sich zu dem Umkreis wie 1 zu 3, 14 wenn man nicht sonderlich genau rechnen will, oder wie 1 zu 3, 141 wenn man etwas genauer zum Zweck zu kommen verlangt. Noch genauer ist die Verhältniß 1 zu 3, 14159, oder 1 : 3, 141592, wie wir sie oben XIII, 44. gefunden haben, und man kan sich meistentheils mit derselben begnügen. Die nachstehende Verhältniß des Durchmessers zu dem Umkreis ist ohnstreitig überflüssig genau: 1 : 3, 14159265358979323 8, man hat sie aber auch noch viel genauer berechnet.

Verschiedene Berechnungen, die sich auf die Ausmessung des Umkreises eines Cirkels gründen.

§. 22. Da ein Grad der 180ste Theil des halben Umkreises ist, so bekommet man die Verhältniß der Länge desselben gegen den Halbmesser seines Cirkels, wenn man die Zahl, welche den halben Umkreis aus den Halbmesser ausdrücket, durch 180 theilet. Es komt durch diese Division der Quo-

tient 0,0174532925, und dieses ist also die Zahl der Theilchen, deren der Halbmesser 1,00000000 enthält, die einen Grad des Cirkels ausmachen. Theilet man diese Zahl nochmals durch 60, so bekomt man die Zahl der Theilchen eben des Cirkels, die eine Minute ausmachen. Der Quotient von dieser Theilung ist: 0,00002908882, also bestimmet diese Zahl die Größe einer Minute. Eben so findet man, daß, wenn der Halbmesser 1,00000000 Theilchen hat, eine Secunde 0,00000484811 dergleichen Theilchen enthalte. Auch von diesen Ziffern kan man nur die erstern nehmen, wenn es nicht nöthig ist, daß man die Verhältniß so gar genau angebe.

§. 23. Es wird vermittelst dieser Zahlen aus einem jeden Durchmesser, der zu demselben gehörige Umkreis, und aus einem jeden Umkreiß hinwiederum desselben Durchmesser gefunden. Denn alle Durchmesser haben gegen ihre Umkreise einerley Verhältniß, diejenige nemlich, welche die gegebene Zahlen gar nahe angeben, welche wir uns der Kürze und Deutlichkeit halben unter den Buchstaben d, p vorstellen wollen, daß also d : p die Verhältniß eines jeden Durchmessers zu seinem Umkreis, und p : d die Verhältniß eines jeden Umkreises zu seinem Durchmesser ausdrückt. Ist nun der Diameter eines Cirkels in Zahlen gegeben, oder man hat ihn durch einen beliebigen Maaßstab gemessen und gefunden, daß derselbe zum Exempel 92,34 Theile hat, welche Zahl wir uns unter D vorstellen wollen, so mache man $d:p=D:P$, so ist $P = \frac{P \times D}{d}$ der gesuchte Umkreis zu dem Durchmesser D: und wird demnach in unserm Exempel gefunden, wenn man $D = 92,34$ durch 3,14159 multipliciret, weil $d = 1$ nicht dividiret. Es ist also $P = 290,0944$, wenn man nemlich die unnöthige Kleinigkeiten weglässet. Und umgekehrt wird aus dem gegebenen Umkreis P der Durchmesser D des Cirkels gefunden, wenn man machet $p:d=P:D$. Es ist also $D = \frac{P \times d}{p}$, und komt, wenn man den gegebenen Umkreis P durch die Zahl $p = 3,14159$ &c. dividiret, weil wieder die Einheit d nicht multipliciret. Es sey der Umkreis 290,0944 gegeben, so ist $\frac{290,0944}{3,14159} = 92,34$, und dieses ist der gesuchte Durchmesser.

§. 24. Fast auf eben die Art verfähret man, wenn die Verhältniß eines Bogens gegen den Umkreis durch die Zahl der Grade, Minuten und Secunden ausgedrückt wird, welche er hält, und man soll entweder aus dem

dem Bogen den Radius, oder aus dem Radius den Bogen finden. Denn weil man weiß, wie viel Theile des Radius auf einen Grad, eine Minute und eine Secunde gehen: so kan man leicht berechnen, wie viel Theile des Radius so viel Grade Minuten und Secunden ausmachen, als deren der Bogen hält, von welchen die Frage ist. Hat man dieses dergestalt gefunden, so hat man die Verhältniß dieses Bogens zu dem Radius, mit welcher man sodann eben so verfahren muß, wie bey dem ganzen Umkreis und den Durchmesser geschehen muß.

§. 25. Es sey ein Bogen von 30°, 24′, 15″, und dieser sey lang 32,7 wie groß ist sein Radius?

Es hält 1 Grad 0, 01745329 Theilchen des Radius, folgends
30 multipl.

halten 30 Grade 0, 52359870

Es hält eine Minute 0, 00029088 Theilchen des Radius
24 multipl.

01116352
58176

folgends halten 24′ . . 0, 00698112

Es hält 1 Sec. 0, 00000484
15 multipl.

2420
484

folgends halten 15″ . . 0, 00007260

Da nun also 30° = 0, 52359870
24′ = 0, 00698112
15″ = 0, 00007260

so ist 30°, 24′, 15″ = 0, 53065242

Folgends verhält sich ein Bogen von 30°, 24′, 15″ zu seinem Halbmesser, wie sich 0, 53065242 zu der 1 verhält, und es ist nunmehro leicht, aus dem gegebenen Radius die Länge eines solchen Bogens, und aus dem gegebenen Bogen den Radius zu finden. Bey dem gegebenen Exempel, da der Bogen 32,7 hält, sage man wie 0, 53065242 zu 1, so 32,7 zu den Radius, und so in den übrigen Fällen.

§. 26. Hat man nun auf die Art aus dem Durchmesser den Umkreis, oder aus dem Umkreis den Durchmesser eines Cirkels gefunden, oder sind

sonst diese beyden Dinge bekant: so kan der Inhalt des Cirkels selbst leicht gefunden werden. Da ein jeder Cirkel einem Dreyeck gleich ist, dessen Grundlinie der Umkreis des Cirkels und dessen Höhe der Radius desselben ist, IX, 36. so darf man nur den Umkreis durch den Radius multipliciren. Die Helfte des Products ist die Zahl, welche den Inhalt des Cirkels aus dem Quadrat misset, welches man zur Einheit angenommen hat. Es sey der Durchmesser eines Cirkels 92, 34, folgends dessen Radius 46, 17, so haben wir gesehen, daß dessen Umkreis seyn werde 290, 0944. Multipliciren wir nun diese letztern Zahlen in einander, und nehmen die Helfte des Products, oder multipliciren wir, um auf einmal die Helfte des Products zu erhalten, die Zahl, welche den Radius ausdrücket, durch die Helfte der Zahl, welche den Umkreis ausdrücket, oder die Zahl, welche den Umkreis ausdrücket, durch die Helfte derjenigen, welche den Radius darstellet, so ist das Product 145, 0472 × 46, 17, oder 290, 0944 × 23, 085 = 669, 6829224 der Inhalt des Cirkels.

§. 27. Auf eben die Art verfähret man mit einem jeden Ausschnitt. Nachdem man den Bogen desselben sowol als den Radius gemessen, oder XIV, 25. berechnet hat; so multipliciret man hernach die Zahl, welche den Bogen ausdrücket, durch die Helfte derjenigen, welche den Radius misset. Die Sache hat keine Schwierigkeit, und braucht nach dem Beyspiel, welches wir von einem ganzen Cirkel gegeben haben, keine weitere Erläuterung.

§. 28. Man siehet aus demjenigen, so IX, 36. in der Geometrie gewiesen worden ist, sowol als aus der gegenwärtigen Berechnung desselben, daß der Cirkel einem geradewinklichten Viereck gleich seyn werde, dessen eine Seite dem Durchmesser gleich ist, welche wir die Grundseite nennen wollen, und die andern, die wir nunmehro als die Höhe ansehen müssen, dem vierten Theil des Umkreises. Ein Quadrat, dessen Seite der Durchmesser ist, ist ebenfals ein geradewinklichtes Viereck, dessen Grundseite mit der Grundseite des vorigen übereinkomt, die Höhe aber von der Höhe desselben verschieden ist. Da nun jede zwey Parallelogramme, die gleiche Grundlinien haben, sich wie ihre Höhen verhalten: so verhält sich das Viereck, so dem Cirkel gleich ist, zu dem Quadrat des Durchmessers, wie der vierte Theil des Umkreises sich zu den Durchmesser verhält. Es ist demnach diese Verhältniß durch Zahlen, welche gar wenig fehlen, leicht auszudrücken. Die Verhältniß des Umkreises zu dem Durchmesser ist 3, 14159265 : 1, theilet man die erstere Zahl durch 4, so erlanget man den vierten Theil des Umkreises 0, 78539816. Wie sich also diese Zahl zu der Einheit verhält, so verhält sich der Cirkel zu dem Quadrat seines Durchmessers. Auch hier

kan

kan man die kleinern Brüche weglassen, wenn es nicht nöthig ist alles so genau zu nehmen, und dieses hat überhaupt bey allen dergleichen Zahlen statt.

§. 29. Diese Zahlen können uns dienen den Inhalt eines Cirkels aus seinem Durchmesser auf eine andere Art zu finden. Es sey der Durchmesser eines Cirkels 9, 2, so berechne man das Quadrat desselben, welches 84, 64 ist, und sage sodann wie 1 zu 0,78539 so das gefundene Quadrat 84, 64 zu dem Inhalt des Cirkels, dessen Durchmesser 9, 2 war. Dieser Inhalt ist also 66, 47 5409.

§. 30. Man kan aber auch vermittelst dieser Zahlen den Durchmesser eines Cirkels finden, dessen Inhalt gegeben ist. Es sey der gegebene Inhalt 66, 47 5409, so darf man nur auf eben den Weg, welchen wir gegangen, und vermittelst, welches wir aus dem Durchmesser den Cirkel herausgebracht haben, zurück gehen, so erlanget man den Durchmesser wiederum. Man sage erstlich wie 0,78539 zu 1, das ist, wie ein jeder Cirkel zu dem Quadrat seines Durchmessers, so der gegenwärtige 66, 47 5409 zu 84, 64, welches demnach das Quadrat des Durchmessers dieses Cirkels seyn wird. Die Quadratwurzel dieser Zahl 9, 2 drücket also den Durchmesser selbst aus.

§. 31. Es ist nunmehro etwas leichtes die krummen Oberflächen der Cörper der ersten, andern und dritten Art zu berechnen, nachdem wir einen Cirkelbogen in eine gerade Linie zu verwandeln wissen. Denn sobald wir einem gerade Linie annehmen, welche einen Theil des Umkreises eines Cirkels, oder auch dem ganzen Umkreis gleich ist: können wir diese Oberflächen mit geradelinichten Figuren vergleichen, und wir haben XIII, 12. gewiesen, wie die geradelinichten Figuren zu berechnen sind.

§. 32. Da nemlich XI, 108. die krumme Oberfläche einer geraden Walze einem rechtwinklichten Viereck gleich ist, dessen Seiten sind, die Höhe der Walze, und eine gerade Linie, die dem Umkreis seiner Grundfläche gleich ist: so siehet man, daß diese Oberfläche gemessen werde, wenn man erstlich aus dem Durchmesser der Grundfläche der Walze ihren Umkreis suchet, und sodann die Zahl, welche dieselbe ausdrücket, durch diejenige multiplicieret, welche die Höhe des Cylinders angiebt. Auf eben die Art findet man auch einen jeden Theil der krummen Oberfläche eines geraden Cylinders, welcher von zween Bogen der Umkreise seiner Flächen, und von zween geraden Linien, die der Axe parallel sind, beschlossen wird: wenn man nur an statt des ganzen Umkreises den Theil des Umkreises der Grundfläche nimt, welcher zu dem Theil der Oberfläche gehöret, den man suchet.

§. 33.

§. 33. Und da die Oberfläche eines geraden Kegels einem Dreyeck gleich ist, dessen Grundlinie dem Umkreis der Grundfläche des Kegels gleich ist, und dessen Höhe so groß ist, als die Seite des Kegels, XI, 111. so kan es wohl mit der Berechnung dieser Oberfläche sowol als mit der Berechnung der Theile derselben, welche wir betrachtet, und mit geradelinichten Figuren verglichen haben, keine Schwierigkeit setzen.

§. 34. Die Oberfläche der Cörper der dritten Art, welche hier in Betrachtung gezogen werden, konten wir XI, 125. mit Cylindrischen Oberflächen vergleichen, und also ist auch bey dieser Berechnung nichts weiter zu sagen. Und da die Oberfläche einer Kugel mit unter die Classe dieser Oberflächen gehöret, und dieselbe einem geradewinklichten Viereck gleich ist, dessen Höhe der Diameter der Kugel ist, und seine Grundfläche der Umkreis eines der grösten Cirkels derselben, so wird die Oberfläche der Kugel so gleich gefunden, wenn man nur den Durchmesser derselben durch seinen Umkreis multipliciret.

§. 35. Was nun aber die Cörper der ersten, andern und dritten Art anlanget, welche Cirkel oder Theile desselben zu ihrer Grundfläche haben, so ist die Berechnung derselben von der Berechnung der Cörper eben dieser Art, deren Grundflächen geradelinichte Figuren sind, gar nicht unterschieden, auser daß man die Grundflächen nach den Regeln der Cirkelmessung berechnen muß, und es ist gar nicht nöthig, daß wir uns bey diesen leichten Dingen aufhalten.

Berechnung der Seiten und Winkel der Dreyecke.

§. 36. Wir wenden uns also zu einer andern Berechnung der ausgedehnten Größen, welche die Dreyecke betrift, da wir zeigen wollen, wie aus drey Theilen eines Dreyecks die drey übrigen durch die Rechnung gefunden werden. Wir haben uns dieser Redensart bereits bedienet, und die sechs Theile eines Dreyecks genennet, seine drey Seiten und seine drey Winkel. Wie man aus dreyen dieser Dinge die übrigen finden soll, indem man die Dreyecke verzeichnet, ist gleich im Anfang der Geometrie gelehret worden. Nur muste unter den drey gegebenen Theilen, sich wenigstens eine Seite befinden. Unter eben den Umständen wollen wir weisen, wie man durch Rechnungen auf eben das kommen könne. Denn aus den drey Winkeln werden die Seiten eines Dreyecks niemals bestimmet; sondern es können unendlich viele Dreyecke seyn, deren drey Winkel einerley Größe haben: nemlich alle Dreyecke, die einander ähnlich sind, haben gleiche Win-

kel, ob zwar im übrigen ihre Seiten der Größe nach von einander noch so sehr verschieden sind. Da indessen in ähnlichen Dreyecken die Seiten welche gleichen Winkeln entgegen gesetzt sind, nothwendig einerley Verhältniß gegen einander haben müssen: so wird diese Verhältniß der Seiten eines Dreyecks durch die Größe seiner Winkel würklich bestimmet.

Sinus. Cosinus.

[*Fig.* 386.] §. 37. Es komt das meiste hiebey auf den richtigen Verstand gewisser Kunstwörter an, welche man hat erfinden müssen, damit man sich, auch ohne Figur, deutlich erklären könte. Man beschreibe auf dem nach Belieben angenommenen Durchmesser AB, um den Mittelpunct C einen halben Cirkelkreis ADB, und theile denselben vermittelst des Halbmessers DC in zween Quadranten AD, DB. Man nehme in einem dieser Quadranten das Punct E nach Belieben, und ziehe von demselben EF auf den Radius AC perpendicular. Diese Perpendicularlinie heißet der **Sinus des Bogens** AE, welcher zwischen A und E lieget.

§. 38. Man kan aber diesen Bogen auf verschiedene Art durch Worte ausdrücken, wenn man ihn nicht, wie wir gethan, ohne Umschweif bezeichnen will. Es machet der Bogen AE mit dem ED einen Quadranten, und AE ist also die Ergänzung des Bogens ED zu einem Quadranten, gleichwie hinwiederum ED den Bogen AE zu einem Quadranten ergänzet. Demnach kan auch EF der Sinus der Ergänzung des Bogens ED zu einem Quadranten genennet werden. Eine solche Ergänzung nennet man auch das **Complement** eines Bogens: man wird also, wenn man dieses Wort gebrauchen will, EF den Sinus des Complements des Bogens ED nennen müssen.

§. 39. Ziehet man von eben dem Punete E auch eine gerade Linie EG perpendicular auf den Radius DC, so ist diese EG der Sinus des Bogens ED, und folgends der Sinus des Complements des Bogens AE. Das Viereck FEGC ist geradewinklicht, wie leicht zu sehen ist, und es sind demnach in demselben die einander entgegen gesetzten Seiten gleich, EF = GC und EG = FC. Demnach ist auch FC der Sinus des Complements des Bogens AE und CG ist der Sinus des Complements des Bogens ED.

§. 40. Man ziehe EC, welche dem Radius AC gleich seyn wird, so misset VII, 66. der Bogen AE den Winkel ACE, und der Bogen ED misset den Winkel ECD, welcher die Ergänzung des vorigen zu einem geraden Winkel ist. Man nennet aus der Ursach auch EF den Sinus des Winkels

ACE; und also wird auch EG der Sinus des Winkels ECD genennet. Dieser Winkel ECD ist dem Winkel FEC gleich, wie gar leicht einzusehen ist, und ECA ist = CEG. Demnach ist auch EG oder FC der Sinus des Winkels FEC, oder der Sinus des Complements des Winkels FCE: und EF oder CG ist der Sinus des Winkels CEG = ACE, oder der Sinus des Complements des Winkels ECG. Und man kan mit einem Wort hier an statt des Bogens allezeit den Winkel nennen, welcher von dem Bogen gemessen wird, welches in der Anwendung desto weniger Schwierigkeit machet, weil die Winkel durch die Zahl der Grade und deren Theile ausgedrückt werden, die in dem Bogen enthalten sind, XIII, 9.

§. 41. Der Sinus des Complements eines Bogens oder eines Winkels wird auch der **Cosinus** desselben Winkels genennet. Also ist der Cosinus des Bogens AE, oder des Winkels ACE die gerade Linie FC = EG, und der Cosinus des Bogens ED ist EF oder CG. Und wenn man in einem jeden rechtwinklichten Dreyeck, dergleichen EFC ist, die Seite, welche dem geraden Winkel F entgegen stehet, EC, vor den Radius annimmet; so wird die Seite FE, welche dem Winkel ECF entgegen gesetzt ist, der Sinus dieses Winkels, und FC, welche an diesem Winkel FCE lieget, und denselben mit der grösten Seite EC einschließet, wird dieses Winkels Cosinus. Denn man kan allezeit die Seite CF in A verlängern, und um den Mittelpunct C durch E den Bogen EA beschreiben, wodurch diejenige Figur erhalten wird, aus welcher wir diese Benennungen des Sinus und Cosinus hergenommen haben.

[*Fig.* 387.] §. 42. Hat man aber in dem rechtwinklichten Dreyeck BCD den Bogen EA mit einem Radius beschrieben, der größer oder kleiner ist als die gröste Seite desselben DC, und sodann den Sinus des Winkels C, nemlich EF gezogen, wodurch auch eben desselben Winkels Cosinus FC abgeschnitten wird, so siehet man doch, daß EF sich zu EC verhalte, wie DB zu DC, wie auch, daß FC:EC = BC:DC, und FC:FE = BC:BD. Diese letztern Proportionen werden uns bloß dienen, künftig ein und anders zu erweisen, und es ist also nur die erste derselben hauptsächlich zu merken, welche man sich unter diesen Worten bekant machen kan: In einem jeden geradewinklichten Dreyeck BCD verhält sich eine der Seiten, die den geraden Winkel einschließen DB, zu der grösten Seite DC, wie der Sinus des Winkels C, welcher der ersten Seite entgegen stehet, sich zu dem Radius verhält.

§. 43. Diese Proportion ist bey einer jeden beliebigen Größe des Radius richtig. Und wenn man also zu dem Winkel C noch einen Bogen ea

mit

mit einem andern Radius eC beschrieben, und sodann den Sinus ef verzeichnet hat, so ist ef:eC=DB:DC, nun war auch EF:EC=DB:DC, folgends ist ef:eC=EF:EC und ef:EF=eC:EC. Das ist, die Sinus von einerley Winkel C, welche zu verschiedenen Halbmessern CE, Ce gehören, verhalten sich gegen einander, wie diese Halbmesser. Eben dieses ist auch von den Cosinen fC, FC zu sagen.

[*Fig.* 386.] §. 44. Uebrigens ist leicht einzusehen, daß, wenn der Bogen AE und der Winkel C, welchen er misset, sehr klein ist, auch der Sinus desselben sehr klein, und dem Bogen ohne einigen merklichen Fehler gleich seyn werde, und daß, indem der Bogen und der Winkel wächst, auch der Sinus mit wachsen werde, bis der Bogen ein Quadrant, und der Winkel gerade wird: in welchem Fall der Sinus DC so groß ist als der Radius. Dieses ist der gröste Sinus unter allen, und man kan aus der Ursach auch den Halbmesser eines Cirkels, den **gröSten Sinus** nennen. Im Latein nennet man ihn Sinus totus. Will man aber den Sinus eines stumpfen Winkels ECB, oder den Sinus eines Bogens EDB, welcher größer ist als ein Quadrant, nehmen, so wird derselbe von dem Sinus des Winkels ECA nicht verschieden. Und man muß demnach sagen, daß der Winkel ECA und seine Ergänzung zu zweyen geraden Winkeln ECB, oder der Bogen AE, und seine Ergänzung zu einem halben Cirkel EDB einerley Sinus EF haben. Dieses ist in der Anwendung wohl zu merken. Man würde sich in einigen Fällen öfters verstoßen, wenn man dieses nicht beobachten wolte. Man pflegt die Ergänzung eines Bogens zu einem halben Cirkel, oder die Ergänzung eines Winkels zu zween geraden, auch des Bogens oder des Winkels **Supplement** zu nennen, und es ist also EDB das Supplement des Bogens AE, und AE ist das Supplement des Bogens EDB.

§. 45. Was aber den Cosinus FC eines spitzigen Winkels ECA, oder des Bogens AE, welcher ihn misset, anlangt, so ist derselbe im Anfange, wenn der Winkel oder der Bogen gar klein ist, fast so groß als der Radius AC, und wird immer kleiner und kleiner, indem der Bogen AE mit dem Winkel ACE wächset, bis er endlich gar verschwindet, wenn der Bogen AE bis zur Größe des Quadranten AD erwachsen, und der Winkel gerade worden. Der Cosinus des stumpfen Winkels ECB und des Bogens EDB, welcher ihn misset, hat mit dem Cosinus des Supplements derselben EA oder ECA einerley Größe, und ist kein anderer als FC. Es ist also mit dem Cosinus eben so beschaffen, wie mit dem Sinus, wenn man bloß auf die Größe desselben, und nicht auf die Lage acht hat.

§. 46. Denn was die Lage anlangt, so hat es mit dem Cosinus eines Bogens oder Winkels eine ganz andere Bewandtniß als mit dem Sinus desselben. Der Winkel ACE mag so klein seyn als er will, so fällt der Sinus desselben an diejenige Seite des Durchmessers AB an welcher der Winkel liegt, und an welche der halbe Umkreis AEB gezeichnet ist. Wächst der Winkel ACE oder der Bogen AE, so wird in dieser Lage nichts geändert, wie denn selbst der gröste Sinus CD noch an diese Seite fällt. Dieses ist beständig so, obgleich endlich der Winkel einen geraden, und sein Bogen einen Quadranten übersteiget. In diesem Fall nimt der Sinus zwar wieder ab, er bleibt aber noch immer an eben der Seite des Durchmessers AB liegen, bis er endlich gar verschwindet, wenn der Bogen die Größe des halben Umkreises erreichet, und der Winkel zweyen rechten Winkeln gleich wird. Er fällt erst alsdann auf die andere Seite des Durchmessers, wenn der Bogen den halben Umkreis, und der Winkel zween rechte Winkel übersteiget, welcher Art Bogen und Winkel aber hier in keine Betrachtung kommen, und über dieses in den im Jahre 1764 übersetzten Anfangsgründen umständlich betrachtet worden sind. Alles dieses merket man gar leicht, wenn man das Punct E von dem A nach und nach in dem Umkreis durch D bis an B und so weiter herum führet, und sich vorstellet, daß es immer den Radius EC und die EF, welche aus demselben auf dem Durchmesser AB perpendicular fällt, mit sich nehme. Siehet man alsdenn den Sinus eines Winkels deswegen, weil er an eine gewisse Seite des Durchmessers AB fällt, als positiv an, und bezeichnet ihn mit +, so muß man sagen, daß der Sinus eines jeden Bogens, der nicht größer ist, als zween Quadranten, und der Sinus eines jeden Winkels, der nicht größer ist, als zween gerade Winkel, positiv sey, es mag nun der Winkel spitzig oder stumpf, und der Bogen größer oder kleiner seyn als ein Quadrant.

§. 47. Im Gegentheil liegt der Cosinus FC in Ansehung des spitzigen Winkels ACE ganz anders als in Ansehung des stumpfen ECB zu welchen er ebenfalls gehöret. Und wenn man den Bogen AE von dem Anfang A immer wachsen lässet, so nimt sein Cosinus, wie wir gesehen haben, ab, bis er ganz verschwindet, so bald als der Bogen die Größe des Quadranten AD erreichet hat. Wächset alsdenn der Bogen noch weiter, und wird nach und nach ADH, so wächset auch sein Cosinus nach und nach wieder an, aber er fällt nunmehro an diese Seite des Mittelpuncts, und erstrecket sich von C gegen B, da er sich vorher an der andern Seite des Mittelpuncts von C gegen A erstrecket hatte. Hieraus folget, daß, wenn man den Cosinus eines spitzigen Winkels, oder eines Bogens der klei-

kleiner ist als ein Quadrant, vor positiv hält, und mit + bezeichnet, man den Cosinus eines stumpfen Winkels, und eines Bogens, welcher einen Quadranten übertrift, als negativ ansehen und mit dem Zeichen — bezeichnen müsse. Es muß aber dieser Winkel nicht größer seyn als zween gerade Winkel, oder der Bogen nicht größer als zween Quadranten. Dergleichen Bogen und Winkel betrachten wir hier nicht: ob sie wol in den angezogenen Anfangsgründen haben betrachtet werden müssen.

§. 48. Wir können noch anmerken, daß das Stück des Radius AF zwischen dem Sinus und dem Umkreis, der *Sinus verſus* des Bogens AE, oder des Winkels ACE genennet werde. Wir werden aber in unserer Abhandlung dieses Wort nicht gebrauchen. Ferner können wir anmerken, daß EG, welche der Sinus ist des Bogens ED, die Helfte der Sehne EH sey, welche zu dem Bogen EDH gehöret, der doppelt so groß ist als ED. Denn weil die Sehne EH auf den Halbmesser CD perpendicular stehet, so ist sowol ED = DH, als auch EG = GH, V, 19.

Tangenten.

[*Fig.* 388.] §. 49. So viel von der ersten Benennung, welche man bey der Berechnung gebraucht, die wir vorhaben. Die zweyte Linie, welche hier einen besondern Namen bekommet, ist die Tangente. Man beschreibe wieder auf den Durchmesser AB, um den Mittelpunct C einen halben oder ganzen Cirkel, nehme in dessen Umkreis das Punct E nach Belieben, und ziehe durch dasselbe CE ohne Ende. Man ziehe eine andere gerade Linie FAG, welche den Cirkel in A berühre, und die erst gezogene CE in F schneide: welches V, 44. geschiehet, wenn man auf AC durch das Punct A eine Perpendicularlinie ziehet, welches eben die verlangete FG seyn wird. Und damit die Figur, wie wir sie gebrauchen, gleich Anfangs vollkommen werde: so setze man auf CF die CG perpendicular, welche die Tangente in G, und den Umkreis in H schneiden wird. Auch ziehe man durch C den Radius CD auf AB perpendicular. So misst der Bogen AE den Winkel ACE, und der Bogen AH misst den Winkel ACH, welcher das Complement des erstern Winkels ECA zu einem rechten Winkel ist. Demnach ist auch der Bogen AH das Complement des Bogens AE zu einem Quadranten. Die AF nun, welche den Cirkel in A berühret, und zwischen den Radius AC und der Linie CEF lieget, die den Bogen AE abschneidet, heißet die Tangente dieses Bogens AE, wie auch die Tangente des Winkels FCA, welchen die FC mit dem Radius AC machet.

Und AG ist die Tangente des Winkels ACG oder des Bogens AH, welcher auf der andern Seite auf eben die Art, vermittelst der CG, abgeschnitten wird.

§. 50. Weil der Bogen AH das Complement ist des Bogens AE, so kan man auch die Tangente AG, die Tangente des Complements des Bogens AE nennen, und die Tangente des Winkels ACG ist auch die Tangente des Complements des Winkels ECA. Und wiederum ist AF die Tangente des Complements des Bogens AH oder des Winkels ACG. Die Tangenten der Complemente werden auch **Cotangenten** genennet, also ist AG die Cotangente von AE oder FCA; und AF ist die Cotangente des AH oder ACH.

§. 51. Man siehet hieraus sogleich, daß jederzeit der Radius die mittlere Proportionallinie sey zwischen der Tangente eines Winkels, und der Cotangente eben desselben Winkels. Denn es ist in dem Dreyeck FCG der Winkel FCG gerade, und aus dessen Spitze fällt CA auf die gröste Seite FG perpendicular. Es ist aber VII, 78. erwiesen, daß in diesem Fall diese Proportion FA : AC = AC : AG allezeit richtig, und also AC die mittlere Proportionallinie sey, zwischen AF und AG. Man gebe diesen Linien AF, AC, AG die Namen, welche wir eben erkläret haben, so hat man dasjenige, so angegeben wird.

§. 52. Man kan in einem jeden rechtwinklichten Dreyeck, um C als den Mittelpunct, mit dem Radius CA, einen Bogen AE beschreiben, welcher den Winkel ACE messen wird. Und demnach kan man allezeit eine der Seiten, welche den rechten Winkel A in einem solchen Dreyeck einschließen, AC, vor den Radius annehmen, und es wird dadurch die andere Seite AF die Tangente des Winkels ACF, welcher ihr entgegen stehet: oder die Tangente des Bogens AE, welcher diesen Winkel misset. Und ziehet man auf FC die CG perpendicular, und verlängert auch die Seite FA bis an diese Linie in G, so erlangt man auch die Tangente des Winkels F. Denn der Winkel ACG ist dem Winkel F gleich, weil sowol ACF + F als ACF + ACG einen geraden Winkel ausmachet: also kan die Tangente des F von der Tangente des Winkels ACG nicht verschieden seyn, wenn man zu beyden einerley Halbmesser CA annimt.

[*Fig.* 389.] §. 53. Hat man aber bey dem geradewinklichten Dreyeck DBC den Radius AC größer oder kleiner angenommen, als die Seite BC, und sodann den Bogen AE, und FA die Tangente desselben und des Winkels C beschrieben; so hat doch der Radius AC gegen die Tangente AE eben die Verhältniß, welche die Seite CB gegen die Seite

BD

BD hat, die dem Winkel C entgegen stehet. Denn weil sowol FA als DB auf BC perpendicular stehen, so ist allerdings AC: AF = BC: BD. Und wenn man zu einem andern Radius Ca, und zu dem Bogen ae, welcher eben den Winkel C misset, die Tangente af ziehet, so ist auch aC: af = BC: BD, und demnach aC: af = AC: AF, wie auch aC: AC = af: AF. Das ist, die Tangenten von einerley Winkel C, zu verschiedenen Halbmessern aC, AC verhalten sich gegen einander wie diese Halbmesser.

§. 54. Und weil auch BC sich zur BD verhält, wie der Cosinus des Winkels C zu seinem Sinus, XIV, 42. so kan man allezeit sagen, wie der Cosinus eines Winkels C sich zu dem Sinus eben des Winkels C verhält; so verhält sich der Radius zu der Tangente eben des Winkels. Ferner verhält sich in eben dem Dreyeck DBC, die Seite CB zu der Seite BD wie der Radius zur Cotangente des Winkels D. Denn diese Cotangente ist nichts anders als die Tangente von C. Nun ist auch CB zu BD wie der Sinus des Winkels D zu seinen Cosinus. Also ist wieder bey einem jeden Winkel D, wie der Radius zur Cotangente, so der Sinus zum Cosinus.

[*Fig.* 390.] §. 55. Noch müssen wir folgendes anmerken. Wenn zwey geradewinklichte Dreyecke ABC, DBC auf einer Grundlinie BC dergestalt stehen, daß ihre Seiten BA, BD in einem fort gehen, oder welches auf eben das hinaus komt, wenn in dem Dreyeck ACD, die gerade Linie BC auf AD perpendicular stehet: so verhält sich allezeit AB: BD, wie die Tangente des Winkels ACB zur Tangente des Winkels BCD, wenn nemlich diese Tangenten zu gleichen Halbmessern gehören. Denn wenn CB selbst der Radius ist, so ist AB die Tangente des Winkels ACB und BD die Tangente des Winkels BCD. Wird aber der Radius größer oder kleiner genommen, so muß eben das statt haben, weil die Verhältniß der Tangenten immer einerley bleibt, man mag den Radius nehmen, wie man will, XIV, 53. Es ist leicht zu sehen daß eben dieses richtig sey, wenn der Winkel DCB an die andere Seite der BC in dCB fällt.

[*Fig.* 388.] §. 56. Wenn der Bogen AE sehr klein ist, so ist auch seine Tangente AF sehr klein. Ja sie ist in diesem Fall von dem Bogen AE selbst gar nicht merklich verschieden. Sie kommet demnach auch mit dem Sinus dieses Bogens ohne merklichen Fehler überein. Wächset sodann der Bogen mit dem Winkel ECA, welchen er misset, so wächset auch die Tangente, und wird letztens, wenn der Bogen AE groß wird, gar groß. Wird AE ein Quadrant und dem AD gleich, und komt also CE in CD zu liegen, so endiget sich die Tangente niemals, oder das Punct F, welches es endigen solte, ist nirgends anzutreffen. Denn dieses Punct ist allezeit da,

wo

wo die verlängerten AF und CE einander schneiden. Nun können AF und CD einander nicht schneiden, weil sie beyde auf der AC perpendicular stehen, und einander also parallel laufen.

§. 57. Ist aber der Winkel größer als ein gerader, so ist seine Tangente mit der Tangente seines Supplements zu zween geraden Winkeln einerley. Der Winkel ECB zum Exempel kan keine andere Tangente haben, als die AF, welche auch die Tangente seines Supplements ECA ist. Wie wolte man sonst die Tangente dieses stumpfen Winkels ziehen? Also haben zween Winkel, die mit einander zween gerade Winkel ausmachen, und zween Bogen, die zusammen einen halben Cirkel geben, gleiche Tangenten, gleichwie sie auch gleiche Sinus haben. Und eine jede Tangente gehöret zu zween Winkeln.

[*Fig.* 421.] §. 58. Doch obwol die Tangenten zweyer Winkel, deren einer das Supplement des andern ist, nicht von verschiedener Größe sind, so ist doch in der Lage derselben ein Unterschied, welches auch bey den Cotangenten statt hat. Dieses mit der völligen Deutlichkeit zu zeigen, ist um den Mittelpunct C ein Cirkel beschrieben, und vermittelst des Durchmessers AB in zwo Helften getheilet worden. Durch das Punct A ist die DE auf eben den Durchmesser perpendicular gezogen, welche DE demnach den Cirkel in diesem Puncte A berühret, das als der Anfang des Umkreises betrachtet wird, der von diesem A durch F nach B, und so weiter, gehet. Man nehme AG nach Belieben kleiner als den Quadranten AF, und ziehe CGH bis an die Tangente. So wird AH die Tangente des Winkels ACG oder des Bogens AG. Und man kan diese Tangente als positiv ansehen, in welchem Fall die Tangenten aller Bogen, die kleiner sind als der Quadrante, oder die Tangenten aller spitzigen Winkel, positiv werden. Denn sie erstrecken sich alle von A nach der Seite D, bis auf die Tangente des rechten Winkels, wiewol sich diese nirgends endiget. Man siehet dieses gar leicht ein, wenn man sich vorstellet, daß in dem Umkreis des Cirkels ein Punct von A durch G bis an F gehe, und die gerade Linie GC, die man sich immer lang genug vorstellen muß, mit sich fortschiebe. Gehet nun aber dieses Punct von F weiter fort nach g, so kan die Linie gC die Tangente ED nicht anders schneiden, als unter der AB in h. Also ist die Tangente des stumpfen Winkels ACg die Ah, welche Anfangs sehr groß ist, so lang der Winkel ACg den rechten Winkel ACF nicht sehr übertrift, alsdenn aber immer abnimt, indem dieser Winkel ACg wächset, bis sie endlich gar verschwindet, wenn dieser Winkel zweyen geraden Winkeln, und sein Bogen dem halben Umkreis gleich wird. Da also die Tangenten der

stum-

stumpfen Winkel sich von A nach E erstrecken, indem die Tangenten der spitzigen von eben dem Anfang A nach D fortgehen, welche Richtung der vorigen gerade entgegen gesetzt ist: so muß man die Tangenten der stumpfen Winkel als negativ ansehen und mit — bezeichnen, wenn man die Tangenten der spitzigen als positiv mit + bezeichnet.

§. 59. Von den Cotangenten ist eben dieses richtig. Wenn man durch F eine gerade Linie ziehet, welche den Cirkel daselbst berühret, und diese gehörig verlängert: so wird Fk die Tangente des Winkels FCG, welcher dem vorigen ACG zu einem rechten Winkel ergänzet, und folgends die Cotangente dieses Winkels ACG. Man kan sie als positiv ansehen, und mit + bezeichnen: Alsdenn aber wird die Cotangente des stumpfen Winkels ACg negativ. Denn diese Tangente ist Fk, wie man leicht siehet, wenn man erweget, daß Cg die Ck nirgends anders als in k schneiden kan. Also müssen auch die Cotangenten stumpfer Winkel, oder die Cotangenten der Bogen, die größer sind als ein Quadrante, mit — bezeichnet werden; wenn man die Cotangenten spitziger Winkel, oder solcher Bogen, die kleiner sind als ein Quadrante, mit + bezeichnet. Und dadurch werden diese zwo Arten von Bogen oder Winkeln von einander unterschieden.

[*Fig.* 388.] §. 60. Die Linie FC, welche den Umkreis in E schneidet, und sich mit der Tangente in F endiget, heißet die **schneidende Linie**, Secans, des Bogens AE oder des Winkels ECA. Wir werden aber diese Benennung nicht gebrauchen, und halten uns also auch dabey nicht auf, sondern gehen nunmehro zur Anwendung dieser Benennungen, und der kleinen Sätze, welche wir daraus gezogen haben, über. Nur müssen vorher noch einige Zeichen erkläret werden, deren man sich hierbey mit vieler Bequemlichkeit bedienet.

§. 61. Diese Zeichen sind nachfolgende. Man benennet einen Bogen oder Winkel, so viel möglich ist, nur mit einen Buchstaben, unter welchen man sich einen jeden Winkel oder Bogen vorstellen kan, so lange derselbe nicht besonders bestimmet wird. Gesetzt dieser Buchstabe sey A, so bezeichne ich das Complement des Winkels oder Bogens, den man sich unter A vorzustellen hat, durch *c*A, so daß *c*A einen andern Bogen bedeutet, welcher den Bogen A zugesetzt oder von demselben abgezogen werden muß, damit aus A ein Quadrant werde, oder ein Winkel, um welchen der Winkel A von einem geraden Winkel unterschieden ist, es mag A spitzig oder stumpf seyn. Der Sinus des Winkels A wird also bezeichnet *sin.* A, und seinen Cosinus stellet man durch *cos.* A vor. Woraus folget, daß *sin. c*A und *cos.* A

immer einerley bedeute, wie auch *cos.* cA und *fin.* A. Die Tangente eines Winkels A wird also bezeichnet, *tan.* A, und seine Cotangente *cot.* A. Folgends ist wieder *cot.* A = *tan.* cA und *cot.* cA = *tan.* A. Der Radius, auf welchen sich die Sinus und Tangenten beziehen, wird durch R oder r angedeutet.

§. 62. Vermittelst dieser Zeichen kan man unter andern die Sätze, welche wir ohnlängst gefunden haben, gar geschickt ausdrücken. Der Satz XIV, 51. wird also vorgestellt:

tan. A : R = R : *cot.* A,

oder RR = *tan.* A × *cot.* A.

Und weil eben dieses von einem jeden andern Bogen oder Winkel B richtig ist, so folget aus den beyden Proportionen:

tan. A : R = R : *cot.* A,

und *tan.* B : R = R : *cot.* B.

diese neue *tan.* A : *tan.* B = *cot.* B : *cot.* A,

welche angiebt, daß die Tangenten jeder zween Bogen sich wie ihre Cotangenten verkehrt genommen verhalten. Der Satz XIV, 54. stehet vermittelst dieser Zeichen also:

cos. A : *fin.* A = R : *tan.* A,

oder R × *fin.* A = *cos.* A × *tan.* A.

Außerdem ist in eben dem Absatz enthalten:

fin. A : *cos.* A = R : *cot.* A,

oder R × *cos.* A = *fin.* A × *cot.* A.

Vorbereitung zur Berechnung der Sinus und Tangenten.

§. 63. Die Anwendung der bisher beygebrachten Sätze selbst bestehet in zweyerley. Es ist zu weisen, wie die Sinus und Tangenten aller Bogen, von einer Minute bis auf neunzig Graden, in Zahlen zu finden: oder wie ihre Verhältniß gegen den Radius durch Zahlen auszudrücken sey, welche so wenig fehlen, als man zur genauesten Ausübung nur wünschen mag. Und alsdenn ist zu lehren, wie die dergestalt durch Zahlen ausgedrückte Sinus und Tangenten zu gebrauchen sind, um aus dreyen Theilen eines Dreyecks die drey übrigen zu berechnen. Es ist wahr, die Sinus und Tangenten sind längst berechnet, und wir haben uns hierinne keine weitere Mühe zu geben: allein man verstehet die Berechnung der Dreyecke ungemein besser, und verfähret bey derselben mit einer viel größern Gewißheit, wenn man die Art eingesehen hat, wie die Sinus und Tangenten

der

der Bogen heraus zu bringen sind, als wenn man dieselbe gänzlich auf Treu und Glauben anzunehmen gezwungen ist.

§. 64. Wir werden uns bey den Beweisen, die zu dem Ende zu geben sind, und überhaupt bey der Berechnung der Drey cke, öfters auf einen Satz gründen, welcher bereits verschiedentlich von uns gebraucht worden ist, doch so, daß wir den Beweis desselben noch immer in das übrige eingewebet haben. A und B sind zwo beliebige Größen von einerley Art, und B ist größer als A. Es kan erwiesen werden, daß die Größe B aus der halben Summe der Größen $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A$, und aus ihrem halben Unterschiede $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A$ zusammengesetzt sey, und daß die kleinere A übrig bleibe, wenn man von der halben Summe $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A$, den halben Unterschied $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A$ abziehet. Man siehet dieses gar leicht ein. Denn setzet man $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A$ zu $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A$, so wird die Summe $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}B$, das ist, B, weil $-\frac{1}{2}A$ das $+\frac{1}{2}A$ aufhebet. Ziehet man aber den halben Unterschied $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A$ von der halben Summe $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A$ ab, welches geschiehet, wenn man jenen zu dieser mit verwechselten Zeichen hinzu setzet, so erhält man $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A$, und dieses ist $=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A=A$, weil das übrige einander wieder aufhebet.

§. 65. Ist demnach die halbe Summe zwoer Größen gegeben, zusamt ihrem halben Unterschied, so kan man daraus die Größen leicht finden. Man setze den halben Unterschied zur halben Summe, so hat man das größere, und man ziehe den halben Unterschied von der halben Summe ab, so hat man das kleinere. Wird man gefragt, was das vor Zahlen sind, deren halber Unterschied 3 und deren halbe Summe 7 ist, so ist die Antwort, die größere dieser Zahlen sey $7+3=10$, und die kleinere $7-3=4$. Der Unterschied dieser Zahlen 10 und 4 ist 6, und also ihr halber Unterschied 3, und die Summe eben der Zahlen $10+4$ ist $=14$, und ihre halbe Summe 7. Keine andere Zahlen haben diese Eigenschaften, als die zwo, welche dergestalt gefunden werden.

§. 66. Man siehet hieraus sogleich, daß hinwiederum die halbe Summe zwoer Größen $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A$ komme, wenn man zu dem halben Unterschied derselben $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A$ die kleinere A hinzusetzet. Denn es ist allerdings $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A+A=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A$. Eben so wird der halbe Unterschied heraus gebracht, wenn man von der halben Summe der Größen $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A$ die kleinere A abziehet, weil $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A-A=\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A$.

[*Fig.* 391. 392.]. §. 67. Wir können uns nunmehro zur Betrachtung der Figur wenden, auf welche wir das hauptsächlichste, so wir zu weisen vorhaben, gründen werden. ABC ist ein Quadrant, und in dem Bogen desselben, welcher in der 392 Zeichnung verlängert worden ist, sind die Puncte

D und E nach Belieben angenommen worden. Man hat durch diese Puncte die Sehne DE gezogen, und beyderseits verlängert, bis sie die nach Nothdurft verlängerte Halbmesser CA, CB in F und G erreichet hat. Aus dem Mittelpunct C ist auf diese Sehne die CH perpendicular gezogen worden, welche dieselbe in I in zwey gleiche Theile DI = IE geschnitten, und den Bogen derselben DHE in H ebenfals gleich getheilet hat, V, 19. Aus den Puncten D, H, I, E hat man auf den Halbmesser AC die Perpendicularlinien DK, HL, IM, EN fallen lassen: und durch die Puncte D und I sind DO und IQ mit eben der AC parallel gezogen worden. Die DO schneidet die IM in O, und IQ die EN in P, und die BC in Q. Ferner sind die Halbmesser CD und CE sichtlich gemacht. Durch diese Zeichnung sind die Dreyecke FIM, EIP, DIO, GIQ, HCL, ICM einander alle ähnlich worden. Denn daß FIM dem IDO ähnlich sey, siehet man daraus, weil DO der Seite FM des Dreyecks IFM parallel lieget. Und fast eben so leicht siehet man, daß IFM dem IEP, und IEP dem GIQ ähnlich sey. Es ist aber auch das Dreyeck FIC bey I rechtwinklicht, und aus I ist IM auf die gröste Seite desselben perpendicular gefallen: demnach ist auch FIM dem ICM ähnlich, VII, 78. und daß ICM dem HCL ähnlich sey, siehet man gar leicht. Dieses aber sind die Dreyecke alle, deren Aehnlichkeit wir angegeben haben. Es kommen noch mehrere ähnliche Dreyecke in der Figur vor, welche zu betrachten unser Zweck nicht erfordert. Dieses aber haben wir noch zu bemerken, daß, weil die Dreyecke IDO, EIP ähnlich, und ihre Seiten DI, IE einander gleich sind; auch die übrigen Seiten einander gleich seyn müssen DO = IP, und IO = EP.

§. 68. Die bemerkte ähnliche Dreyecke aber enthalten eine gute Anzahl Proportionen, welche meistentheils von Nutzen seyn können. Wir wollen nur diejenigen anmerken, die wir nöthig haben, und die übrigen denenjenigen überlassen, die sich ihrer in einer andern Absicht bedienen wollen. Aus der Aehnlichkeit der Dreyecke IFM, EIP folget:

1) FI : IE = IM : EP,

und weil auch die Dreyecke GIQ, IDO ähnlich sind, so ist auch

2) IG : DI = IQ : DO.

Aus der Aehnlichkeit der Dreyecke ICM, HCL schließen wir

3) HC : IC = HL : IM, und

4) HC : IC = CL : CM.

Und aus der Aehnlichkeit der Dreyecke HCL, IDO.

5) HC : DI = HL : DO, und

6) HC : DI = CL : IO.

Dieses ist zu unserm Zweck genug.

§. 69. Um nun diese Proportionen anzuwenden, müssen wir bemerken, daß, wenn man den Bogen AD mit A, und den Bogen AE mit B bezeichnet, DE der Unterschied dieser Bogen B — A seyn werde. Bezeichnen wir aber auch BD, das Complement des erstern Bogens AD mit cA, und BE, das Complement des zweyten B, oder auch den Ueberschuß desselben über einen Quadranten, nachdem er nemlich kleiner oder größer ist als ein Quadrant, mit cB; so wird eben dieser Bogen DE auch cA — cB, oder cA + cB. Weil nun auch DE in H in zwey gleiche Theile getheilet wird, so ist $DH = HE = \frac{B-A}{2}$, und zugleich $= \frac{cA-cB}{2}$ in der 391 Figur, und $\frac{cA+cB}{2}$ in der 392 Figur. Ferner ist der Bogen AH, welcher aus dem kleinern AD und aus DH dem halben Unterschied der Bogen AD, AE zusammengesetzt ist, die halbe Summe dieser Bogen AD und AE, XIV,66. und folgends $AH = \frac{A+B}{2}$. Und aus eben der Ursache ist BH = BE + EH $= \frac{cB+cA}{2}$ in der 391 Figur: aber in der 392 Figur ist $BH = \frac{cA-cB}{2}$, weil dieser Bogen übrig bleibt, wenn man von der halben Summe HE den kleinern Bogen BE wegnimmet. Die Buchstaben A, B, cA, cB können auch die Winkel bedeuten, welche die Bogen messen, die wir mit diesen Buchstaben bezeichnet haben.

§. 70. Nennet man aber das Supplement des Bogens AD nunmehro A, welches man sich leicht vorstellen kan, wenn man den halben Cirkel in den Gedanken vollmachet; und bezeichnet auch das Supplement des Bogens AE mit B, so daß in diesem Fall A den größern Bogen, und B den kleinern bedeutet: so wird BD = cA, und BE wird cB, der Bogen DE aber wird nunmehro A — B, und $DH = HE = \frac{A-B}{2}$. Zugleich ist auch in der 391 Zeichnung DE = cA — cB, und $DH = HE = \frac{cA-cB}{2}$. In der 392 Zeichnung aber ist DE = BD + BE = cA + cB, und $DH = HE = \frac{cA+cB}{2}$. Folgends ist das Supplement des Bogens AH = HE + B, das ist $\frac{A-B}{2} + B$ oder $\frac{A+B}{2}$; und BH ist in der 391 Zeichnung EH +

$EB = \frac{cA - cB}{2} + cB = \frac{cA + cB}{2}$, in der 392 Zeichnung aber ist $BH = EH - EB = \frac{cA + cB}{2} - cB = \frac{cA - cB}{2}$, welche Ausdrücke mit den vorigen vollkommen übereinkommen. Dieses kan den Zweifel heben, welcher hiebey vorfallen könte, ob dasjenige, so wir von den Bogen AD, AE, deren einer wenigstens kleiner ist, als ein Quadrant, herausbringen werden, auch richtig sey, wenn man an statt dieser Bogen ihre Supplemente nimt.

§. 71. Nun ist DK der Sinus des Bogens DA oder seines Supplements, und KC ist der Cosinus desselben, also ist $DK = sin.A$, $KC = cos.A$. Ferner ist EN der Sinus des Bogens AE oder seines Supplements, und NC ist sein Cosinus, also $EN = sin.B$, und $NC = cos.B$. Da auch KD + IO + EP die EN giebet, so ist IO + EP der Unterschied der Sinus DK und EN: und da diese Linien IO und EP einander gleich sind, so ist IO = EP der halbe Unterschied derselben, oder $IO = EP = \frac{1}{2}sin.B - \frac{1}{2}sin.A$. Und weil IM aus dem kleinern dieser Sinus DK und aus deren halben Unterschied IO zusammen gesetzet werden kan: so ist diese IM die halbe Summe dieser Sinus, XIV, 66. das ist, $IM = \frac{1}{2}sin.A + \frac{1}{2}sin.B$. Weil aber auch DO = IP, und folgends KM = MN, und weil in der 391 Figur KN = KM + MN der ganze Unterschied der Cosinus CN und CK ist, so ist KM oder MN der halbe Unterschied derselben, und folgends $KM = DO = IP = MN = \frac{1}{2}cos.A - \frac{1}{2}cos.B$. Woraus man wieder leicht schließet, daß MC = IQ die halbe Summe dieser Cosinus seyn müsse, oder daß $MC = IQ = \frac{1}{2}cos.A + \frac{1}{2}cos.B$. In der 392 Figur aber ist KN = KC + CN die Summe der Cosinus der Bogen AD und AE, und folgends, da auch hier KM = MN, so ist KM = MN = DO = IP, der halben Summe dieser Cosinus $\frac{1}{2}cos.A + \frac{1}{2}cos.B$ gleich. Und weil in eben dieser Figur CM entstehet, indem man von der halben Summe der Cosinus MN den kleinern CN wegnimt, so ist $MC = IQ = \frac{1}{2}cos.A - \frac{1}{2}cos.B$.

§. 72. Ferner ist HL der Sinus der halben Summe der Bogen AE und AD, und also $HL = sin.(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$, und LC ist der Cosinus dieser halben Summe der Bogen AE und AD, das ist, des Bogens AH, oder $LC = cos.(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$. Aber DI = IE ist der Sinus des Bogens DH, welcher der halbe Unterschied ist der Bogen AE und AD, folgends $DI = IE = sin.(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$. Endlich ist IC der Cosinus dieses Bogens DH, und also $IC = cos.(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$. Die Verhältniß aber FI : IE ist die Verhältniß der Tangente des Winkels FCI zu der Tangente des Winkels ICE,

XIV, 55. oder die Verhältniß der Tangente des Bogens AH zur Tangente des Bogens HE, und weil $AH = \frac{B+A}{2}$, und $HE = \frac{B-A}{2}$, so ist FI: IE $= tan.(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A) : tan.(\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A)$. Und eben so ist IG: ID $= tan.$ HB: $tan.$ DH $= tan.(\frac{1}{2}cA+\frac{1}{2}cB) : tan.(\frac{1}{2}cA-\frac{1}{2}cB)$ in der 391 Figur. In der 392 Figur aber ist IG: ID $= tan.$ HB: $tan.$ DH $= tan.(\frac{1}{2}cA-\frac{1}{2}cB) : tan.(\frac{1}{2}cA+\frac{1}{2}cB)$.

§. 73. Wenn wir nun diese Benennungen an die Stelle der Buchstaben in den Proportionen setzen, welche wir aus der gegenwärtigen Figur XIV, 68. gezogen haben; so wird die erste derselben FI: IE = IM: EP, dergestalt ausgedrückt:

$$tan.(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}A) : tan.(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{2}A) = (\tfrac{1}{2}sin.B+\tfrac{1}{2}sin.A) : (\tfrac{1}{2}sin.B-\tfrac{1}{2}sin.A) = (sin.B+sin.A) : (sin.B-sin.A).$$

Und man kan allezeit sagen: wie die Tangente der halben Summe zweyer Bogen oder Winkel, zu den Tangenten des halben Unterschiedes eben der Bogen oder Winkel: so die Summe der Sinus derselben Bogen oder Winkel, zu dem Unterschied dieser Sinus.

§. 74. Die andere Proportion XIV, 68. IG: ID = IQ: DO, wird auf gleichmäßige Art, in dem Fall, welchen die 391 Figur vorstellet, also ausgedrücket:

$$tan.(\tfrac{1}{2}cA+\tfrac{1}{2}cB) : tan.(\tfrac{1}{2}cA-\tfrac{1}{2}cB) = (\tfrac{1}{2}cos.A+\tfrac{1}{2}cos.B) : (\tfrac{1}{2}cos.A-\tfrac{1}{2}cos.B) = (cos.A+cos.B) : (cos.A-cos.B)$$

In der 392 Figur aber verwandelt sich diese Proportion in die nachfolgende:

$$tan.(\tfrac{1}{2}cA-\tfrac{1}{2}cB) : tan.(\tfrac{1}{2}cA+\tfrac{1}{2}cB) = (cos.A-cos.B) : (cos.A+cos.B)$$

welche mit der vorigen auf eins hinaus komt.

§. 75. Die dritte Proportion XIV, 68. HC: IC = HL: IM, wird unter eben dergleichen Benennungen diese:

$$r : cos.(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{2}A) = sin.(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B) : (\tfrac{1}{2}sin.A+\tfrac{1}{2}sin.B),$$

und die vierte HC: IC = LC: MC, wird

$$r : cos.(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{2}A) = cos.(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B) : (\tfrac{1}{2}cos.A+\tfrac{1}{2}cos.B)$$

Es verhält sich nemlich der Radius zu dem Cosinus des halben Unterschiedes zweyer Bogen B und A, wie sich der Sinus der halben Summe derselben zu der halben Summe der Sinus verhält. Imgleichen verhält sich der Radius zu dem Cosinus des Unterschieds zweyer Bogen, wie sich der Cosinus der halben Summe derselben zu der halben Summe ihrer Cosinus verhält. Dieses ist wieder in allen Fällen so.

§. 76.

§. 76. Auf eben die Art kan man auch bey der fünften und sechsten Proportion XIV, 68. verfahren. Die fünfte war HC:DI = HL:DO. Schreibt man hier wieder vor HC, r, vor DI, $sin.(\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A)$, vor HL, $sin.(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A)$ und vor DO, $(\frac{1}{2}cos.A-\frac{1}{2}cos.B)$, so wird dieselbe:

$$r : sin.(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{2}A) = sin.(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}A) : (\tfrac{1}{2}cos.A-\tfrac{1}{2}cos.B.$$

Und die sechste Proportion HC:DI = CL:lO, wenn man außer den vorigen vor CL schreibt $cos.(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A)$, und vor lO, $(\frac{1}{2}sin.B-\frac{1}{2}sin.A)$, wird:

$$r : sin.(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{2}A) = cos.(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}A) : (\tfrac{1}{2}sin.B-\tfrac{1}{2}sin.A).$$

Diese Regeln sind bloß aus der 391 Figur genommen, denn in der 392 Figur ist $DO = (\frac{1}{2}cos.B+\frac{1}{2}cos.A)$. Indessen werden wir diese Proportion nicht anders als auf dergleichen Fälle anwenden, welche die 391 Figur darstellet, aus welcher sie genommen sind, und wir finden also nicht nöthig uns hierbey aufzuhalten: sondern wir wollen zeigen, wie vermittelst dieser Regeln die Sinus aller Bogen gefunden werden können.

§. 77. Man kan sich dazu entweder der beyden mittlern oder der beyden letztern Regeln bedienen. Uns scheinen die letztern die bequemsten, welche man auch dergestalt setzen kan, wenn man die zweyten und die letzten Glieder derselben verdoppelt:

$$r : 2sin.(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{2}A) = sin.(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}A) : (cos.A-cos.B)$$
$$r : 2sin.(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{2}A) : cos.(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}A) : (sin.B-sin.A)$$

Berechnung der Sinus.

[*Fig.* 393.] §. 78. Es sey nunmehro der an den Mittelpunct C beschriebene Quadrant DL in eine beliebige Zahl gleicher Theile DE, EF, FG . . . HI, IK . . getheilet, und eines dieser Theile sey die Einheit, vermittelst welcher man einen jeden andern Theil dieses Quadranten misset, der sich von D anfänget, und bis an eines der Theilungspuncte erstrecket, zum Exempel, DI. Es bedeute n die Zahl dieser Einheiten, so in dem Bogen DI enthalten sind, das ist, es werde die Größe des Bogens DI aus der angenommenen Einheit durch n ausgedrücket. Es sey aber DH ein anderer Bogen, welcher um ein Theilchen weniger hat als der vorige, so daß die Zahl aller Theile desselben $n-1$ ist. Dieser Bogen sey derjenige, welchen wir uns sonst in dieser Betrachtung unter A vorgestellet haben. B aber bedeute hier den Bogen DK, welcher um ein Theilchen mehr hat, als DI, und welcher also durch die Zahl $n+1$ ausgedrückt wird. So ist die halbe Summe dieser Bogen $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A = \frac{n+1+n-1}{2} = n$. Und der halbe Unterschied

der-

derselben $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = \frac{n+1-n+1}{2}$ ist $= 1$. Die Verhältnisse aber, welche wir eben heraus gebracht haben, verwandeln sich unter diesen Benennungen in die nachfolgende:

$$r : 2\sin. 1 = \sin. n : \cos.(n-1) - \cos.(n+1) \text{ und}$$
$$r : 2\sin. 1 = \cos. n : \sin.(n+1) - \sin.(n-1).$$

§. 79. Vermittelst dieser Regeln findet man die Sinus und Cosinus aller Bogen, die aus Graden zusammen gesetzet sind, wenn nur erst der Sinus wie auch der Cosinus eines Bogens bekant ist, der nur einen Grad hält. Und eben dieses erlanget man auch, wenn man die Bogen aus Minuten zusammen setzet: es muß aber hier der Sinus wie auch der Cosinus einer Minute bekant seyn. Man kan aber den Sinus einer Minute leicht haben, nachdem der ganze Umkreis des Cirkels berechnet ist. Denn bey so kleinen Bogen ist der Sinus von dem Bogen ganz nicht merklich unterschieden. Und da wir also XIV, 22. gefunden haben, daß der Bogen von einer Minute 0,0002908882 hält, wenn der Radius 1 ist; so drücket eben diese Zahl auch den Sinus einer Minute aus. Wenn aber der Sinus bekant ist, so ist auch der Cosinus leicht zu finden. Denn weil überall $R^q = S^q + C^q$, und folgends $R^q - S^q = C^q$, XIV, 39. so bleibt das Quadrat des Cosinus übrig, wenn man von dem Quadrat des Halbmessers das Quadrat des Sinus abziehet, aus welchem man so dann den Cosinus selbst durch das Ausziehen der Quadratwurzel, erhalten kan. Verrichtet man diese Arbeit, so findet man den Cosinus von einer Minute, oder den Sinus von $89^\circ, 59' = 0,9999999577$.

§. 80. Nun kan man die Arbeit selbst anfangen, wenn man nur erst noch bemerket, daß der Cosinus eines Bogens, welcher sich bey D anfängt und endiget, und welcher also eigentlich nichts ist, der Radius DC sey. Setzet man nun, die Einheit, durch welche die Bogen von D angemessen werden, sey eine Minute, und n bedeute ebenfals Zahlen von Minuten, und lässet erstlich n diese Einheit bedeuten, welche wir uns unter dem Bogen DE vorstellen können, so wird die Regel:

$$r : 2\sin. 1 = \sin. \acute{\imath} : \cos. \acute{o} - \cos. \acute{e}, \text{ und}$$
$$r : 2\sin. \acute{\imath} = \cos. \acute{\imath} : \sin. \acute{e} - \sin. \acute{o}.$$

Weil nun in diesen Proportionen die drey erstern Glieder bekant sind, so findet man aus denselben den Sinus von $\acute{e}$, wie auch $\cos. \acute{o} - \cos. \acute{e}$ oder $r - \cos. \acute{e}$; und wenn man dieses von dem Radius r abziehet; so bleibet $r - r + \cos. \acute{e}$, das ist, der Sinus des Complements zu zweyen Minuten, oder der Sinus zu $89^\circ, 58'$, übrig.

§. 81. Nun setze man zweytens $n=2$, und stelle sich diesen Bogen, größerer Deutlichkeit halber, unter DF vor; so wird die Regel nunmehro:

$$r : 2sin.\,i = sin.\,2i : cos.\,i - cos.\,3i, \text{ und}$$
$$r : 2sin.\,i = cos.\,2i : sin.\,3i - sin.\,i.$$

Weil nun die drey ersten Glieder dieser Proportionen wieder bekant sind, so findet man auch die vierten; und aus $cos.\,i - cos.\,3i$ erhält man $cos.\,3i$, wenn man $cos.\,i - cos.\,3i$ von $cos\,i$ abziehet: aus $sin.\,3i - sin.\,i$ aber wird $sin.\,3i$, wenn man demselben $sin.\,i$ zusetzet.

§. 82. Auf eben die Art gehet man weiter. Man setze drittens n bedeute $3i$, und drücke also den Bogen DG aus: so werden die Regeln, vermittelst welcher der Sinus und Cosinus des Bogens 4 gefunden wird, diese:

$$r : 2sin.\,i = sin.\,3i : cos.\,2i - cos.\,4i$$
$$r : 2sin.\,i = cos.\,3i : sin.\,4i - sin.\,2i.$$

Und dieses ist zu unserm Zweck hinlänglich: insonderheit da wohl schwerlich jemand eine neue Berechnung einer Tafel unternehmen wird, die bereits verfertiget ist, und es uns nur darum zu thun war, daß wir zeigten, wie sie habe verfertiget werden können.

[*Fig.* 394.] §. 83. Wolte man die Sinus von Secunden zu Secunden oder wenigstens von zehen zu zehen Secunden haben, so könte man zwar nach eben der Anweisung verfahren, und es könte nicht schaden, wenn man es würklich bey den erstern 5 oder 6 Graden thäte: überhaupt aber wäre es zu weitläuftig. Man kan, wenn die Sinus der einzeln Minuten gefunden worden sind, hernach die Sinus der Secunden ohne merklichen Fehler, viel leichter haben, und wie dieses geschiehet, ist noch zu weisen, weil in den gemeinen Tafeln die Sinus der Secunden nicht anzutreffen sind, und man sie doch öfters gebrauchet; in welchem Fall man sie erst selbst berechnen muß. Es sey AB der Sinus des Bogens IA von einer beliebigen Zahl von Minuten, CD sey der Sinus des Bogens IC, von einer Zahl Minuten, die um eine größer ist als die vorige, und der Bogen AC betrage also eine Minute; so kan man CE leicht haben, wenn man den Sinus AB von dem Sinus CD abziehet; und in guten Tafeln stehen gemeiniglich diese Unterschiede neben dem Sinus. Nun enthalte AF eine beliebige Zahl Secunden, zum Exempel 17. Weil nun AC 60″ beträgt, so sage man $AC : AF = 60'' : 17'' = CE : FG$. Es wird dadurch FG gefunden, und wenn man diese FG zur $AB = GH$ hinzusetzet, so bekomt man FH, den Sinus des Bogens IF, welcher um 17 Secunden größer ist als IA. Denn wenn AC eine gerade Linie wäre, so wäre die Proportion $AC : AF = CE : FG$

gewiß

gewiß vollkommen richtig, VII, 12. Nun ist AC von einer unmerklichen Krümme, da dieser Bogen nicht mehr als eine Minute hält; also kan auch diese Proportion nicht merklich fehlen.

§. 84. Hat man nun den Cosinus, wie auch den Sinus eines Winkels, so findet man die Tangenten eben des Winkels, wenn man spricht, wie der Cosinus des Winkels zu seinem Sinus, so der Radius zu der Tangente eben dieses Winkels, XIV, 54. Diese Rechnung begreift man leicht, und wir haben uns dabey nicht aufzuhalten.

§. 85. In den gemeinen Tafeln wird der Radius von 1000000 Theilchen genommen, und in solchen Theilchen werden die Sinus und Tangenten aller Winkel ausgedrückt. Man kan aber auch die letztern zwo Ziffer derselben weglassen, und also die Sinus und Tangenten aus einem Radius ausdrücken, welcher nur 100000 Theilchen hat, welches zu der gemeinen Ausübung überflüssig genug ist. Noch besser aber thut man, wenn man sich den Radius als die Einheit vorstellet; und die Sinus und Tangenten aus demselben und aus seinen Decimaltheilen zusammen setzet: welches in der Tafel nichts ändert. Wer die Anleitung wohl verstehen will, so wir nunmehr zu derselben geben wollen, muß sich mit solchen Tafeln oder dem so genanten Canone triangulorum, oder Canone sinuum & tangentium versehen.

§. 86. Allein, da die Sinus und Tangenten durch gar große Zahlen ausgedrückt werden, so würden sie in der Anwendung eine weitläuftige und beschwerliche Rechnung geben, wenn man dieselbe, wie vor dem geschehen müssen, unmittelbar gebrauchen wolte. Man ist derowegen bedacht gewesen diese Arbeit zu erleichtern, und dieses konten die Logarithmen vollkommen leisten. Man hat derowegen die Logarithmen aller Zahlen gefunden, welche die Sinus und Tangenten ausdrücken, und dieselbe gehörig in Ordnung gebracht. Dieses kan auf eben die Weise geschehen, wie die Logarithmen anderer Zahlen gefunden worden. Man kan sich vorstellen, daß die Logarithmen der Zahlen, welche die Sinus und Tangenten ausdrücken, nur in einer guten Logarithmentafel aufgeschlagen, und unmittelbar neben die Sinus und Tangenten gesetzt seyn. Nur sind die Characteristicken dieser Logarithmen vergrößert worden, welches, wie wir wissen, in den Verhältnissen, zu welchen die Logarithmen gehören, nichts ändert, wenn nur allen Characteristicken gleich vieles zugesetzt wird. Bey den dergestalt vermehrten Characteristicken verfällt man kaum jemals in negative Größen; welches zu vermeiden der einzige Zweck dieser Veränderung seyn konte.

§. 87. Dergleichen Tafeln sind gleichsam das Instrument, dessen man

sich bey der Berechnung der Dreyecke bedienet. Wir können uns nunmehro würklich zu denselben wenden. Es gründet sich alles auf gar wenige Sätze, welche wir wiederholen, und sodann zeigen wollen, wie sie auf die würkliche Berechnung anzuwenden sind. Der erste dieser Sätze, welcher am meisten gebraucht wird, ist nachfolgender.

Nähere Gründe zur Berechnung der Seiten und Winkel der Dreyecke.

[*Fig.* 395.] §. 88. In einem jeden Dreyeck verhalten sich jede zwo Seiten gegen einander, wie die Sinus der Winkel, welche ihnen entgegen stehen. Es sey das Dreyeck ABC, in welchem man zween Winkel A und B nach Belieben angenommen hat, so ist: *sin.* A : *sin.* B = BC : AC. Denn wenn man aus der Spitze des dritten Winkels C auf die ihm entgegen gesetzte Seite AB die gerade Linie CD perpendicular fallen lässt, so bekomt man dadurch zwey rechtwinklichte Dreyecke CAD, CBD, außer wenn der Winkel bey B gerade ist, in welchem Fall CD mit der CB zusammen fällt. Es verhält sich aber, wie wir XIV, 42. gesehen haben, in einem jeden geradewinklichten Dreyeck die gröste Seite zu einer der übrigen, wie der Radius oder der gröste Sinus, zu dem Sinus des Winkels, welcher der letztern Seite entgegen stehet. Also hat man in den zwey rechtwinklichten Dreyecken ABC, CDB, wenn R wieder den Radius bedeutet:

AC : CD = R : *sin.* A

CB : CD = R : *sin.* B, und folgends VIII, 32. weil die mittlern Glieder dieser Proportionen gleich sind: AC : CB = *sin.* B : *sin.* A, oder verkehrt: *sin.* A : *sin.* B = BC : AC. Bey rechtwinklichten Dreyecken aber komt dieser Satz mit demjenigen überein, so hier zum Grunde geleget wird; denn der Sinus des Winkels B ist der Radius, wenn B gerade ist, und es verwandelt sich also in diesem Fall die gegenwärtige Proportion in die folgende AC : CB, oder CD = R : *sin.* A, welche von der zum Grunde gelegten Proportion nicht verschieden ist. Man siehet aus dem Beweise, daß auf die Größe des Winkels C nichts ankommt. Und solte man bey den stumpfen Winkel B noch einigen Zweifel haben, so hat man sich nur zu erinnern, daß zween Winkel, die neben einander auf einer geraden Linie stehen, gleiche Sinus haben, XIV, 44.

§. 89. Aus dieser Proportion AC : CB = *sin.* A : *sin.* B schließen wir, wie allezeit geschehen kan, VI, 104. AC + CB : AC — CB = *sin.* B + *sin.* A : *sin.* B — *sin.* A. Nun haben wir XIV, 73. gesehen, daß die Verhältniß *sin.* B + *sin.* A

$+ \sin.A : \sin.B - \sin.A$ der Verhältniß $\tan.(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) : \tan.(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$ gleich sey. Man wird also diese Verhältniß vor jene setzen und also schließen können: $AC + CB : AC - CB = \tan.(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) : \tan.(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$. Es verhält sich nemlich in einem jeden Dreyeck die Summe zwoer Seiten AC + CB zu ihrem Unterschied AC — CB, wie die Tangente der halben Summe der Winkel A und B, deren keiner zwischen diesen Seiten liegt, zu der Tangente des halben Unterschiedes eben dieser Winkel. Der Winkel C liegt zwischen den zwo erwehnten Seiten, und dieser komt in der gegebenen Proportion nicht vor.

[*Fig.* 396.] §. 90. Diese zwey Sätze sind zur Auflösung aller der Aufgaben hinlänglich, bey welchen unter den Theilen der Dreyecke, welche gegeben sind, wenigstens ein Winkel vorkommet. Nur muß man sich dessen erinnern, daß in einem jeden Dreyeck, wenn zween Winkel bekant sind, auch der dritte nicht unbekant seyn könne. Denn man kan ihn allezeit finden, wenn man die Summe der zwey bekanten Winkel von zweyen geraden Winkeln abziehet, IV, 231. welches durch Zahlen geschiehet, wenn man die Summe der Maaße zweyer Winkel, von dem Maaße zweyer geraden, oder von 180°, wegnimt. Es sey der Winkel A des Dreyecks ABC = 65°, 36 und B enthalte 59°, 26, so ist die Summe dieser Maaße = 124°, 56. Dieses von 180°, das ist, von 179°, 60 abgezogen lässet 55°, 16; und dieses ist das Maaß des Winkels C. Aus eben dem Grunde, und auf eben die Art wird auch die Summe der zwey übrigen Winkel eines Dreyecks gefunden, wenn ein Winkel dieses Dreyecks bekant ist. Es sey in dem Dreyeck ABC der Winkel C bekant, und sein Maaß sey 55°, 16. Man ziehe dieses von 180°, oder welches eben so viel ist, 179°, 60 ab, so bleibt 124°, 56. Dieses ist die Summe der beyden Winkel A + B, die Helfte ihrer Summe ist demnach 62°, 25

§. 91. Es können bey den Dreyecken, deren Berechnung wir nunmehro ohne weitern Anstand geben können, nachfolgende Aufgaben vorkommen, welche darinnen verschieden sind, daß immer andere und andere Theile derselben gegeben werden. Drey Theile eines Dreyecks müssen gegeben seyn, und wir haben zu weisen, wie aus denselben alle übrige Theile dieser Figuren zu berechnen sind, aber unter den gegebenen Theilen muß wenigstens eine Seite vorkommen, XIV, 36. Ist nun nur eine Seite des Dreyecks gegeben, so müssen zween Winkel desselben gegeben seyn, sonst hätte man nicht drey bekante Theile. Allein zween Winkel eines Dreyecks geben auch den dritten, und man siehet also, daß, wenn eine Seite des Dreyecks bekant ist, alle drey Winkel desselben bekant seyn müssen. Und

demnach lieget die bekante Seite in Ansehung der bekanten Winkel in diesem Fall immer auf einerley Art. Sie lieget immer zwischen bekanten Winkeln, und ist einem bekanten Winkel entgegen gesetzt.

§. 92. Sind aber zwo Seiten in einem Dreyeck bekant, so darf nur ein Winkel bekant seyn. Dieser Winkel lieget nun entweder zwischen den bekanten Seiten, oder er ist einer derselben entgegen gesetzt. Und man hat also hier zwey verschiedene Fälle, deren Auflösungen besonders zu weisen sind. Es seyn in dem Dreyeck ABC die zwo Seiten AC und AB gegeben, so ist außer denselben entweder der Winkel A bekant, welcher zwischen AC und AB lieget, oder B, welcher der AC entgegen stehet. Denn wenn man vor B den Winkel C als bekant annehmen will, so hat man eben das. Der Winkel C ist sowol einer bekanten Seite AB entgegen gesetzt, als der Winkel B der bekanten Seite AC entgegen stehet.

§. 93. Endlich können in einem Dreyeck alle drey Seiten gegeben seyn, Ein jeder Winkel desselben lieget in diesem Fall zwischen bekanten Seiten, und ist einer bekanten Seite entgegen gesetzt, und man kan sich also wieder bey dieser Aufgabe keine Fälle, die in der Auflösung von einander unterschieden wären, vorstellen. Bey allen diesen Umständen sind alle Winkel der Dreyecke, und alle Seiten, die nicht gegeben werden, durch die Rechnung heraus zu bringen.

Würkliche Berechnung der Dreyecke.

§. 94. Ist in einem Dreyeck eine Seite zusamt zweyen, das ist, wie wir XIV, 91. gesehen haben, allen dreyen Winkeln, gegeben: so bleibt nichts zu suchen übrig, als die übrige Seiten. Diese aber findet man vermittelst des Satzes von der Proportion der Sinus zweyer Winkel zu den ihnen entgegen gesetzten Seiten, XIV, 88. Gesetzt, AB sey die gegebene Seite, so sage man:

$$\textit{sin.}\,C : \textit{sin.}\,A = AB : CB \text{ und}$$
$$\textit{sin.}\,C : \textit{sin.}\,B = AB : AC.$$

Weil nun die Winkel alle bekant, und ihre Sinus aus den Tafeln zu haben sind, so kan man vermittelst dieser Proportionen beyde Seiten CB und AC finden.

§. 95. Es sey der Winkel C von $55^{\circ}, 16'$ so ist der Logarithmus seines Sinus aus der Tafel $= 9,9142464$, und wenn der Winkel A $65^{\circ}, 30'$ hält, so ist der Logarithmus seines Sinus $= 9,9590229$. Wenn nun AB nach einem beliebigen Maaßstab 57, 32 Theilchen hat, von welcher Zahl der Logarith-

garithmus 1,7583062 ist, so ist $CB = \frac{sin.\,A}{sin.\,C} \times AB$, folgends XIII, 191. $l.sin.\,A + l.\,AB - l.sin.\,C = l.\,CB$. Die Rechnung selbst aber, vermittelst welcher $l\,CB$ gefunden wird, stehet also:

$l.sin.\,C = 9,9142464$
$l.sin.\,A = 9,9590229$ } add.
$l.\,AB = 1,7583062$ }
11,7173291 } subtr.
1,8030827

Zu diesem Logarithmus gehöret die Zahl 63,545, und demnach hält CB 63,545 Theilchen, dergleichen AB 57,32 enthält.

§. 96. Sind in einem Dreyeck zwo Seiten gegeben, und nur ein Winkel, so muß man allezeit die übrigen Winkel suchen, ehe man weiter gehen kan. Man darf zu dem Ende nur einen der übrigen Winkel finden, so hat man den dritten. Es liegt aber der gegebene Winkel entweder zwischen den gegebenen Seiten oder nicht. Der letztere Fall ist etwas leichter aufzulösen und wir wollen also von demselben anfangen.

§. 97. Es sey in dem Dreyeck ABC der Winkel A wie auch die Seite AB und BC gegeben, und A sey von $65^{\circ}, 30'$ AB = 57, 32 und BC = 63, 545, so findet man den Sinus des Winkels C wenn man schließet: CB : AB = *sin.* A : *sin.* C, und es ist also der Logarithmus des Sinus dieses Winkels, oder $l.sin.\,C = l.sin.\,A + l\,AB - l\,CB$. Setzet man nun wieder wie vorher:

$l.\,CB = 1,8030827$
$l.\,AB = 1,7583062$ } add.
$l.sin.\,A = 9,9590229$ }
11,7173291 } subtr.

so ist $l.sin.\,C = 9,9142464$, und schlägt man denselben unter den Logarithmen der Sinus auf, so stehet der Winkel $55^{\circ}, 18'$ daneben. Ist nun der Winkel C dergestalt gefunden worden, und A vorher bekant gewesen; so findet man auch den dritten Winkel B, wie gewiesen worden ist.

§. 98. Wir haben hier BC größer angenommen als AB, in welchem Fall nur ein Dreyeck aus den Seiten AB, BC und aus dem Winkel A beschrieben werden kan, IV, 258. Der Winkel C ist in diesem Fall allezeit spitzig. Denn wenn A gerade oder stumpf ist, so ist C nothwendig spitzig. Ist aber A spitzig, so ist doch C kleiner als A, weil die Seite AB die dem

Win-

Winkel C entgegen stehet, keiner ist als die Seite BC, die dem Winkel A entgegen stehet, IV, 242. also ist C auch nunmehro spitzig. Man findet also bey dem Umstand, wenn BC > AB, den Winkel C allezeit aus den Tafeln unmittelbar. Denn in denselben stehen neben denen Sinus allezeit die spitzigen Winkel, zu welchen diese gehören.

[*Fig.* 397.] §. 99. Ist aber wieder der Winkel A zusamt den Seiten AB und BC gegeben, und ist AB größer als BC, so kan man aus dem Winkel A und aus den Seiten AB und BC nicht allein das Dreyeck ABC, sondern auch ein anders ABD verfertigen, IV, 256. Und der Winkel C des erstern ist das Supplement des Winkels D des Dreyecks ADB. Denn das Dreyeck BDC ist gleichschenklicht, weil BC=BD, und also ist der Winkel DCB dem Winkel BDC gleich. Nun ist BCD+BCA ohnstreitig zweyen geraden Winkeln gleich, also giebt auch ACB mit BDA eine Summe, die zweyen geraden Winkeln gleich ist. Wenn man also den Winkel C oder D eines solchen Dreyecks berechnen soll, so muß man zum voraus wissen, ob er spitzig oder stumpf sey. Außerdem kan man von demselben nichts gewisses sagen. Man kan seinen Sinus wie vorher finden, aber ein jeder Sinus gehöret zu zween Winkeln, die mit einander zween gerade Winkel ausmachen, dergleichen die Winkel D und C sind. In diesem Fall ist also nichts übrig, als daß man die Winkel alle beyde berechne.

§. 100. Es sey A = 32°, 14, und also *l. sin.* A = 9.7270273, CB sey 10,00 und AB enthalte solcher Theile 15,15. Wenn man nun auch hier setzet: BC : AB = *sin.* A : *sin.* C (oder *sin.* D)
und rechnet wie vor:

l. BC =	1.0000000	
l. AB =	1.1804126	add.
l. sin. A =	9.7270273	add.
	10.9074399	subtr.

so ist *l. sin.* C = 9.9074399, welcher sowol zu dem Winkel C als D gehöret. Der spitzige Winkel dieses Sinus ist 53°, 54′, und der stumpfe bleibt übrig, wenn man den spitzigen von 180° abziehet. Demnach ist der Winkel D = 53°, 54′, und ACB = 126°, 6′. Und hieraus findet man den Winkel CBA = 21°, 46′, und den Winkel DBA = 93°, 54′.

§. 101. Hat man dergestalt die Winkel eines Dreyecks alle berechnet, so wird die dritte Seite nach der vorigen Aufgabe gefunden. Ist man nicht vermögend gewesen den Winkel bey B ganz und gar zu bestimmen, wie dieses in dem Fall der 397 Figur vorkommet, so kan auch die demselben entgegen

gegen gesetzte Seite nicht vollkommen bestimmet werden. Das einzige, so man thun kan, ist, daß man sowol die Seite AD aus dem Winkel ABD und den übrigen, als auch die Seite AC aus dem Winkel ABC und den übrigen, berechne. Sowol die eine als die andere dieser Seiten kan bey der gegebenen Größe des Winkels A, und der Seiten AB, BC statt haben, und dieses weiset die Rechnung. Es stehet aber in derselben Gewalt nicht zu weisen, welche von den beyden Seiten AD, AC in dem Dreyeck würklich vorkomme, welches man aus dem gegebenen Winkel A, und den zwo Seiten AB, BC=BD zusammen gesetzt hat. Man muß also in der Anwendung sich um andere Merkmale bekümmern, aus welchen man schließen kan, ob ein Dreyeck, welches vor uns lieget, von der Beschaffenheit des ACB oder des ADB sey, das ist, ob der Winkel desselben, welcher der Seite AB entgegen stehet, spitzig oder stumpf sey. Dieses ist selten etwas schweres, und das Augenmaaß ist meistentheils hinlänglich, es uns zu zeigen.

[*Fig.* 398.] §. 102. Ist aber der Winkel C gegeben, welcher zwischen zwo bekanten Seiten AC und BC lieget, und sind die übrigen Winkel des Dreyecks A und B zu finden, so müssen die zwo Seiten AC, CB ungleich seyn. Denn wenn sie gleich wären, und es wäre also das Dreyeck gleichschenklicht, so brauchte man die übrigen Winkel nicht weitläuftig zu suchen: weil in einem gleichschenklichten Dreyeck alle Winkel gegeben sind, sobald deren einer bekant ist, IV, 234. Sind nun aber die Seiten ungleich, so ist der gegebene Winkel C entweder gerade, wie in der 398 Figur, oder nicht. In dem ersten Falle findet man den Winkel A leicht aus der Proportion die unter den ersten XIV, 53. da gewesen ist:

$$AC : CB = R : tan.A.$$

Es sey CA von 87,32 und CB von 52,70 Theilen, so wird, weil R allezeit 10.0000000 ist, die Rechnung also stehen:

l. AC	= 1.9411137	
l. CB	= 1.7218106	add.
l. R	= 10.0000000	
	11.7218106	subtr.
l. tan. A	= 9.7806969	

und wenn man diesen Logarithmus unter den Logarithmen der Tangenten aufsuchet, so findet man das Maaß des Winkels A, nemlich 31°, 6′ und einige Secunden, darneben.

[*Fig.* 396.] §. 103. Ist aber der Winkel C schief, er mag übrigens spitzig oder stumpf seyn: so kan man doch, wie XIV, 90. gewiesen

worden ist, die Summe der übrigen Winkel A + B, und die halbe Summe $\frac{A+B}{2}$ finden, und den Logarithmus der Tangente derselben *tan.*$(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$ aus den Tafeln nehmen. Nun ist auch XIV, 89.

$$(AC+CB):(CB-CA) = tan.(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B):tan.(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}B).$$

Da nun also AC, CB, und folgends auch AC + CB, AC — CB bekant sind, so findet man vermittelst der Tafel *l. tan.*$(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$, und schlägt man diesen Logarithmus unter den Logarithmen der Tangenten in der Tafel nach, so stehet das Maaß von $\frac{A-B}{2}$ darneben. Also hat man die halbe Summe der zwey gesuchten Winkel $\frac{A+B}{2}$, und ihren halben Unterschied $\frac{A-B}{2}$. Hieraus aber kan man den größern Winkel durch die Addition, und den kleinern durch die Subtraction finden, XIV, 64.

§. 104. Es sey C = 55°, 16′; so ist A + B = 180° — 55°, 16′ = 124°, 56′ und folgends $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$ = 62°, 25′. Der Logarithmus der Tangente dieses Bogens, oder *l. tan.*$(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$ ist = 10, 2819827. Es sey AC = 60,06 und CB = 62, 53, in welchem Fall der Winkel A größer ist als B, weil ihm die größere Seite entgegen stehet, so ist CB + AC = 122, 59 und CB — AC = 2, 47; folgends

l. (CB + CA)	= 2, 0884550	add.
l. (CB — CA)	= 0, 3926970	add.
l. tan.$(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$	= 10, 2819827	add.
	10, 6746797	subtr.
l. tan.$(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$	= 8, 6862247	

Bey diesem Logarithmus stehet in der Tafel der Logarithmen der Tangenten, der Bogen 2°, 46′, welcher folgends das Maaß ist des Winkels $\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B$. Und also ist der Winkel $A = \frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B$ = 62°, 25′ + 2°, 46′ = 65°, 11′, und der Winkel $B = \frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$ = 62°, 25′ — 2°, 46′ = 59°, 39′. Hat man dergestalt wieder alle Winkel des Dreyecks ABC, so ist es leicht die Seite AB zu finden.

[*Fig.* 399.] §. 105. Nun ist nichts zu weisen übrig, als wie aus dreyen Seiten eines Dreyecks seine Winkel zu finden sind. Es müssen diese Seiten alle ungleich seyn, wenn die Sache einige Schwierigkeit haben soll. Denn wenn das Dreyeck ABC dessen drey Seiten gegeben sind, gleich-

schenklicht ist, und man ziehet auf die Grundlinie desselben BC durch die Spitze A die Perpendicularlinie AD, welche die BC in zwey gleiche Theile theilen wird; so ist DB, die Helfte von BC, gegeben, weil BC gegeben ist, und man kan XIV, 97. in dem Dreyeck ADB, dessen Winkel D gerade, und folgends bekant ist, und dessen Seiten AB, BD gegeben sind, den Winkel BAD, und folgends auch den Winkel B finden. Hat man aber einen Winkel eines gleichschenklichten Dreyecks, so hat man auch alle übrige.

[*Fig.* 400.] §. 106. Sind aber die drey Seiten eines Dreyecks ABC oder ABE, dessen Winkel man schaffen soll, alle ungleich, so beschreibe man um die Spitze eines der Winkel dieses Dreyecks A, welchen man eigentlich nicht verlangt, mit der kleinern der diesen Winkel einschließenden Seiten AC oder AE den Cirkelkreis DEF, welcher die dritte Seite, wenn diese BC ist, in E, ist sie aber BE, und man hat sie gehörig verlängert, in C, die AB aber immer in F schneiden wird. Man verlängere nun BA bis an den Umkreis in D, so ist AD = AF = AC, und BD = BA + AD ist die Summe dieser zwo Seiten des Dreyecks, BF aber = BA − AC ist ihr Unterschied; folgends sind diese Linien BD und BF beyde gegeben. Nun aber ist, wie an seinem Orte VII, 70. erwiesen worden, BC : BD = BF : BE, und umgekehrt BE : BF = BD : BC. Man kan also allezeit zu der bekanten Seite BC die BE, und zu der BE, wenn diese die dritte Seite des Dreyecks ist, die BC finden; und demnach können diese Linien BE, BC immer beyde als bekant angesehen werden. Nun ziehe man AG auf BC perpendicular, und bilde dadurch die zwey rechtwinklichten Dreyecke ABG und AGC oder AGE, so wird EG = GC. Da nun also BC = BG + GC, und BE = BG − GC, so erhält man, wenn beyderseits addiret wird, BC + BE = 2BG, und also $BG = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}BE$. Wird aber das letztere von dem erstern abgezogen, so bringt man heraus BC − BE = 2GC, woraus folget: $GC = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}BE$, und eben so groß ist GE. Dadurch werden also die Seiten BG, GC, GE der rechtwinklichten Dreyecke immer gefunden; und nunmehro ist es leicht, nach der XIV, 97. gegebenen Anweisung jeden der Winkel B, E, oder C zu schaffen, welcher verlangt wird.

§. 107. Dieses sind die Auflösungen der in einer Ebene beschriebenen Dreyecke alle. Man wird bey denselben, wenn man eine Seite suchet, niemals dadurch aufgehalten, daß ein jeder Sinus sowol zu einem spitzigen, als zu einem stumpfen Winkel gehöret, welcher das Supplement des vorigen zu zween rechten Winkeln ist. Denn der Winkel wird eigentlich nicht in die Rechnung gebracht, sondern sein Sinus, welcher nicht zweydeutig

ist, und also jedesmal eine gewisse Seite bestimmen muß. Wird aber ein Winkel gesucht, so haben wir gesehen, daß derselbe nicht immer völlig bestimmet werde, XIV, 99. Aber der daselbst angezeigte Fall ist auch der einzige, in welchem eine Zweydeutigkeit zurück bleibt; weil außer demselben die gesuchten Winkel allezeit spitzig sind. Denn wenn das Dreyeck rechtwinklicht ist, wie XIV, 102. so sind seine übrige Winkel, außer dem geraden, nothwendig spitzig. Ist aber in einem Dreyeck der schiefe Winkel C gegeben, und man soll, wie XIV, 103. gelehret worden ist, die zween übrige Winkel desselben A und B finden, so ist nur der halbe Unterschied dieser Winkel $\frac{A-B}{2}$ zu schaffen. Da aber A nothwendig kleiner ist als zween rechte Winkel, so ist noch viel mehr $\frac{A-B}{2}$ kleiner als zween rechte Winkel und also $\frac{A-B}{2}$ kleiner als ein rechter Winkel. Also ist der gesuchte Winkel wieder spitzig. Endlich, wenn aus den drey Seiten eines Dreyecks die Winkel desselben gesucht werden, so werden, nach der eben gegebenen Anweisung, die Winkel rechtwinklichter Dreyecke gesucht, welche immer spitzig sind. In der That ist der Winkel E in dem Dreyeck ABE stumpf: aber man siehet leicht, daß er stumpf seyn werde, wenn man die gegebene Seite BE mit der gefundenen BG zusammen hält, und findet, daß jene kleiner sey, als diese.

§. 108. Dasjenige so von den gemeinen Dreyecken gewiesen worden ist, wird auch bey den dreyseitigen Ecken, oder den so genanten sphärischen Dreyecken aufgegeben, und nichts hat in der Sternkunst einen größern Nutzen, als daß man aus drey Theilen einer solchen Ecke, die drey übrigen Theile zu finden wisse. Wir nennen die Theile einer solchen Ecke wieder die drey Seiten derselben und ihre Winkel. Und zwar mögen hier die Theile gegeben seyn wie sie wollen. Denn es werden aus den Winkeln einer dreyseitigen Ecke ihre Seiten sowol bestimmet, als sich aus den schicklich angenommenen Seiten ihre Winkel geben; wie wir gesehen, als wir diese Ecken betrachtet haben, XII, 80.

Vorbereitung zur Erfindung der Regeln, nach welchen die dreyseitigen Ecken zu berechnen sind.

§. 109. Die Regeln nach welchen diese Auflösungen geschehen, fließen aus den Regeln vor die gemeinen Dreyecke gar leicht, wenn man sich nur die

die Sache geschickt vorstellet. Vors erste müssen die Regeln ausfündig gemacht werden, nach welchen sich die geradewinklichten Ecken auflösen lassen; sodann aber diejenigen, welche vor die schiefwinklichten Ecken von dreyen Seiten gelten.

[*Fig.* 401.] §. 110. Es kan aber die Hypothenuse einer dreyseitigen Ecke, die einen geraden Winkel hat, entweder spitzig oder stumpf seyn, XII, 99. Den ersten Fall stellet die 401 Figur vor, da die Ebene NRr auf der RMr perpendicular stehet, und mit dieser bey R, r gerade Winkel einschließet; und NCM die den zwo dreyseitigen Ecken NCMR und NCMr gemeinschaftliche Hypothenuse ist. In diesem Fall sind die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, entweder beyde spitzig wie NCR und MCR, oder sie sind beyde stumpf wie NCr und MCr, XII, 97. Und zwar sind die Seiten des Dreyecks NCMR die Ergänzungen der Seiten des Dreyecks NCMr zu zween geraden Winkeln, oder zu 180. Die Winkel aber bey N und M sind in der Ecke NCMR ebenfals spitzig: in der Ecke NCMr aber sind diese Winkel stumpf, XII, 89. und es ergänzet der Winkel bey M der Ecke NCMR den Winkel bey M der nebenstehenden Ecke NCMr; und der Winkel bey N der erstern Ecke NCMR ergänzet den Winkel bey N der zweyten NCMr zu zweyen geraden Winkeln. Demnach haben sowol die Seiten dieser zwo Ecken, welche auf einerley Art liegen NCR und NCr, wie auch MCR und MCr einerley Sinus und Tangenten, als auch die Winkel der beyden Ecken bey M und N; und da also die Hypothenuse NCM den beyden Ecken gemeinschaftlich, und die Winkel R, r beyderseits gerade sind, so kan man nicht anders, man muß die Sinus und Tangenten der Seiten und Winkel der Ecke NCMR, deren Seiten und Winkel spitzig sind, nehmen, wenn man die Sinus und Tangenten der Seiten und Winkel in der Ecke NCMr anzeigen will, XIV, 44. 57. Und wenn man also die Ecke NCMR berechnet, und aus drey Theilen derselben die übrigen findet, so thut man in der That eben dieses auch mit der Ecke NCMr. Es kan die eine nicht ohne die andere berechnet werden: und wenn wir demnach zeigen, wie bey der Ecke NCMR zu verfahren sey, wenn man aus drey Theilen derselben die übrigen finden will, so wird eben dadurch auch gewiesen, wie die Ecke NCMr zu berechnen ist.

§. 111. Die andere Art einer geradewinklichten dreyseitigen Ecke, deren Hypothenuse stumpf ist, XII, 100. ist in der 402 Figur gezeichnet. In derselben muß man sich NCR auf MRm perpendicular vorstellen; wodurch die Winkel bey R beyde gerade werden. Die Fläche MNm aber machet mit der Fläche MRm einen spitzigen Winkel, der mit M oder m bezeichnet

ist. Dadurch wird auch die diesem Winkel M oder m entgegen gesetzte Seite NCR spitzig, XII, 89. Hat man nun RCm mit Fleiß stumpf angenommen, so ist auch die Seite NCm stumpf. Denn diese Seite stehet in der dreyseitigen Ecke NCRm dem geraden Winkel R entgegen, und ist folgends die Hypothenuse, welche stumpf seyn muß, weil eine von den Seiten, die den geraden Winkel R einschließen, nemlich NCR, spitzig ist, und die andere RCm stumpf, XII, 92. Man siehet aber auch hier leicht, daß die fortgeführten Seiten dieser Ecke NCRm eine andere dergleichen Ecke NCRM machen, welche die Seite NCR, wie auch den Winkel M = m mit der vorigen NCRm gemeinschaftlich hat, und deren übrige Seiten und Winkel, die Seiten und Winkel der vorigen zu 180° ergänzen. Denn die Seite NCM ergänzet augenscheinlich die Seite NCm zu zween geraden Winkeln, und MCR thut eben das in Ansehung der RCm. Die zween Winkel bey N aber machen zusammen gesetzt, ebenfals zween gerade Winkel. Also haben wieder die Seiten und Winkel der dreyseitigen Ecken NCRM und NCRm, welche an einander liegen, gleiche Sinus und Tangenten: und wenn das eine dieser Dreyecke berechnet wird, so wird das andere zugleich berechnet; weil sowol die als bekant angenommenen, als auch die gesuchten Sinus und Tangenten, sich vor die eine Ecke sowol als für die andere schicken. Wir haben uns also wieder bey der Ecke NCRm nicht aufzuhalten, sondern nur zu zeigen, wie die Ecke NCRM zu berechnen sey, in welcher sowol die Seiten NCM, MCR, NCR als auch die den zwo letztern bey N und M entgegen gesetzte Winkel spitzig sind.

[*Fig.* 401. 402.] §. 112. Damit wir nun die Regeln heraus bringen, welche wir suchen, und welche uns anleiten sollen, aus jeden drey Theilen einer geradewinklichten dreyseitigen Ecke, den vierten Theil zu finden: so stelle man sich vor, daß man in den beyden letztern Figuren eine vierte Fläche NRM dergestalt geleget habe, daß die gerade Linie CM auf derselben perpendicular stehe; und daß diese Fläche von den drey Seiten der Ecke NCRM geschnitten, und durch diese Schnitte das Dreyeck NMR hervor gebracht werde. So sind die Winkel CMR, CMN beyde gerade, weil die Linie CM, die auf der Fläche NMR perpendicular stehet, mit allen Linien in dieser Fläche, die durch M gehen, gerade Winkel machet, X, 29. Der Winkel NMR misset also die Neigung der Fläche NMC auf die Fläche MCR, und ist dem Winkel M der dreyseitigen Ecke NCMR gleich, X, 41. Außerdem aber ist die Fläche CMR auf die Fläche NMR perpendicular, weil sie durch die Linie CM gehet, die auf NMR perpendicular ist, X, 45. und also stehet hinwiederum NMR auf CMR gerade. Da nun aber auch die

Fläche

Fläche NCR auf eben der CMR gerade stehet, und diese Flächen NRM, NRC einander in NR schneiden, so ist auch diese Linie NR auf die Fläche MCR perpendicular, X, 47. und der Winkel NRM in dem Dreyeck NRM, ist so wohl als der Winkel NRC, gerade, X, 29.

[*Fig.* 403.] §. 113. Wir haben also durch diesen Schnitt, vermittelst der Fläche NMR die Seiten der geradewinklichten dreyseitigen Ecke NCMR alle zu geradewinklichten Dreyecken gemacht, und über dieses das vierte geradewinklichte Dreyeck NMR erhalten, dessen Winkel NMR dem Winkel der Ecke M gleich ist, ob zwar der Winkel MNR des Dreyecks, von dem Winkel N der dreyseitigen Ecke verschieden ist, weil NC auf NR und NM schief stehet. Wir können also nunmehro zu desto größerer Deutlichkeit die Seiten einer solchen Ecke neben einander in eine Ebene legen. Und dieses zwar folgendergestalt. Wobey man allezeit die mit einerley Buchstaben bezeichnete Linien und Winkel sich das erste mal in der 403, und das zweyte mal in der 401 oder 402 Zeichnung, vorstellen, und dadurch die Linien der 403 Zeichnung gehörig von einander unterscheiden muß, weil in dieser 403 Zeichnung einerley Buchstaben öfters vorkommen. Man ziehe MC und mache sie der MC gleich. Durch M ziehe man auf MC die Linie NR perpendicular, und mache MN=MN und MR=MR; so kan man von N und R nach C die Linien NC und RC ziehen, wodurch das geradewinklichte Dreyeck NCM der Seite NCM, und das ebenfals geradewinklichte Dreyeck MCR der Seite MCR gleich und ähnlich wird, und NC=NC, wie auch RC=RC. Der Winkel NCM aber ist in den beyden dreyseitigen Ecken die Hypothenuse, weswegen wir ihn mit einem H bezeichnet haben.

§. 114. Man setze auf die CR die RN perpendicular, mache sie der RN gleich, und ziehe NC, so ist wieder das rechtwinklichte Dreyeck RCN der Seite RCN gleich, und folgends der Winkel RCN gleich dem Winkel RCN; aber auch NC=NC. Diese NC komt in unserer 403 Figur noch=mals vor, weil die einzige NC in der dreyseitigen Ecke NRCM zu zwo Seiten gehöret, nemlich zu NCM und NCR, welche in der gegenwärtigen Figur von einander haben abgesondert werden müssen. Die Winkel MCR, RCN sind diejenigen, deren Flächen in der dreyseitigen Ecke den geraden Winkel R einschließen. Man kan eine derselben, welche man will, vor die Grundseite annehmen, so ist die andere die Perpendicularseite. In unsern Figuren stellet MCR die Grundseite, und NCR die Perpendicularseite vor, derowegen ist MCR mit B, und NCR mit P bezeichnet. Man kan also diese Benennungen nach Belieben verwechseln; allein weil wir in den Figuren

den

den Winkel an der Grundseite mit M, und den Winkel an der Perpendicularseite mit N bezeichnet haben; so muß man diese Benennungen zugleich verwechseln, wenn man jene verwechselt: das ist, so bald man die Seite P, die man vorher als die Perpendicularseite angesehen, vor die Grundseite B annimmet, so muß man auch den Winkel, welchen man vorher als den Winkel an der Grundseite angesehen, und mit M bezeichnet hatte, als den Winkel an der Perpendicularseite ansehen, und wenn man sich nach unsern Figuren richten will, mit N bezeichnen; im Gegentheil aber muß man den Winkel, welchen man vorhero N genennet, nunmehro M nennen.

§. 115. Man verlängere nunmehro CR bis RM der Seite RM des Dreyecks RCM gleich wird, und ziehe NM; so wird das rechtwinklichte Dreyeck NRM dem Dreyeck an den Ecken NRM gleich und ähnlich, und der Winkel desselben M, wird dem Winkel, welchen wir in der Ecke ebenfals mit M bezeichnet haben, gleich, XIV, 112. Die Linie NM aber wird der Linie NM gleich, welche eine Seite in dem Dreyeck NCM abgiebet, weil beyde der Linie NM in der Ecke gleich sind. Es sind also überhaupt in den gegenwärtigen drey Zeichnungen, die Linien und Winkel, welche einander gleich sind, mit einerley Buchstaben bezeichnet. Folgends können wir die Regeln, welche wir suchen, aus der 403 Figur allein schließen, welches die Sache gar leicht machet; doch wird der Leser nicht übel thun, wenn er zugleich die Augen von Zeit zu Zeit auf die vorhergehenden zwo Figuren zurück wirft.

Regeln zur Berechnung der geradewinklichten dreyseitigen Ecken.

§. 116. Man sehe MC als den Radius an, so ist NM die Tangente des Winkels NCM oder H, und MR ist die Tangente des Winkels MCR, welchen wir B nennen. Eben diese Linien kommen auch in dem Dreyeck MRN vor, und es verhält sich in diesem Dreyeck MN zu MR, wie der Sinus des geraden Winkels R, das ist, wie der Radius zu dem Cosinus des Winkels M. Wir haben also:

$$MN : MR = tan.H : tan.B, \text{ und}$$
$$MN : MR = r : cos.M, \text{ folgends ist}$$
$$r : cos.M = tan.H : tan.B.$$

Und dieses ist sogleich eine der gesuchten Regeln, vermittelst welcher man, wenn in einer rechtwinklichten Ecke, außer den geraden Winkel, der Winkel M und die Hypothenuse H gegeben wird, die Grundseite B unmittelbar finden kan.

§. 117.

§. 117. Da aber auch die Glieder einer jeden Proportion sich dergestalt versetzen lassen, daß dasjenige Glied, welches man will, die letzte Stelle einnehme, und da in unserm Exempel man auch sagen kan:

$$cos.M : r = tan.B : tan.H$$

und $$tan.H : tan.B = r : cos.M,$$

so siehet man, daß eben diese Regel auch dienen könne, aus dem Winkel M, an der Grundseite, und aus der Grundseite B die Hypothenuse H zu finden: wie auch aus der Hypothenuse H, und aus der Grundseite B den Winkel M zu schließen, welcher an der Grundseite lieget. Wir erinnern dieses ein für allemal. Denn es ist nichts leichter als dieses auf alle ähnliche Fälle anzuwenden.

§. 118. Wir können aber auch in dieser Regel die Benennungen verwechseln, und anstatt B schreiben P, welchem zufolge auch N statt M gesetzt werden muß, XIV, 114. Dadurch bekomt die Regel dieses Ansehen:

$$r : cos.N = tan.H : tan.P.$$

wird aber im Grunde von der vorigen nicht verschieden.

§. 119. Die zweyte Regel heraus zu bringen, nehme man NC vor den Radius an, so ist NM der Sinus des Winkels NCM, und folgends $= sin.H$, und NR ist der Sinus von NCR $= sin.P$. Und da man die Linien NM, RN auch vermittelst des Dreyecks MRN mit einander vergleichen kan, so kan man wieder aus zwo Proportionen, wie vorher, schließen. In dem Dreyeck NRM ist:

$$NM : RN = r : sin.M.$$ Vorhero war
$$NM : RN = sin.H : sin.P,$$ folgends ist
$$r : sin.M = sin.H : sin.P.$$

Dieses ist die zweyte Regel und auf andere Fälle eingerichtet. Man kan in derselben wieder an statt P, B schreiben, und N anstatt M setzen, so wird eben diese Regel durch andere Benennungen ausgedrückt, welche sie zur Anwendung bequemer machet. Sie stehet unter diesen Benennungen also:

$$r : sin.N = sin.H : sin.P.$$

§. 120. Die dritte Regel erhält man, wenn man RC vor den Radius annimmet. Dadurch wird RM der Sinus des Winkels B und NR wird die Tangente zu P. Eben diese Linien kan man auch vermittelst des Dreyecks NRM vergleichen, in welchem sie ebenfals vorkommen. Es ist also:

$$RM : RN = sin.B : tan.P,$$ und
$$RM : RN = r : tan.M,$$ folgends
$$r : tanM = sin.B : tan.P,$$ und dieses ist die Regel, wel-

che wir suchten, in welcher man wieder die Benennungen P, B, wie auch M und N verwechseln, und dadurch eben diese Regel also ausdrücken kan:

$$r : tan.N = sin.P : tan.B.$$

§. 121. Aus diesen drey Regeln kan man nun die übrigen alle schliessen, und man braucht nicht einmal eine Figur dazu. Es ist klar, daß, da in einer solchen Proportion, als diejenigen sind, die wir bereits gegeben haben, drey Buchstaben vorkommen, welche drey Theile einer dreyseitigen Ecke bedeuten, man aus jeden zwey Theilen, die außer dem geraden Winkel gegeben sind, und durch zwey dieser Buchstaben bedeutet werden, den dritten Theil finden könne, welchen der dritte Buchstabe bedeutet. Man muß sich also nur bemühen, vermittelst der bekanten Proportionsregeln und demjenigen, so von den Sinus und Tangenten überhaupt gewiesen worden ist, aus den bereits gefundenen Regeln andere zu schließen, in welchen andere Buchstaben vorkommen: welches geschehen kan, weil die drey gefundenen Regeln zusammen alle Theile einer geradewinklichten Ecke enthalten. Wir wollen diese Regeln, zu einiger Erleichterung der folgenden Schlüsse zusammen hersetzen:

Reg. I. $r : cos.M = tan.H : tan.B$
oder $r : cos.N = tan.H : tan.P$
Reg. II. $r : sin.H = sin.M : sin.P$
oder $r : sin.H = sin.N : sin.B$
Reg. III. $r : sin.B = tan.M : tan.P$
oder $r : sin.P = tan.N : tan.B.$

§. 122. Nunmehro setzen wir uns vor, eine Regel heraus zu bringen, in welcher die drey Buchstaben M, N und P allein vorkommen, welches in keiner der bereits gefundenen Regeln zutrift. So ist

Reg. II. $r : sin.H = sin.M : sin.P$
wie auch $r : sin.H = sin.N : sin.B$
folgends $sin.M : sin.P = sin.N : sin.B$. Nun ist ferner
Reg. III. $r : tan.M = sin.B : tan.P$
und überhaupt $sin.P : cos.P = tan.P : r$
wie auch $tan.M : sin.M = r : cos.M$, XIV,62.

Setzet man nun die Verhältnisse dieser vier letztern Proportionen zusammen, so erhält man, VIII,40.

Reg. IV. $r : cos.P = sin.N : cos.M.$

Man kan die Buchstaben dieser Regel wieder wechseln, und dieselbe dadurch folgendergestalt ausdrücken:

$$r : cos.B = sin.M : cos.N.$$

§. 123.

§. 123. Die nächste Regel soll die Buchstaben B, P und H enthalten. Diese kan man also machen. Es ist:

Reg. IV.	r	:	$cos.$P	=	$sin.$N	:	$cos.$M	
Reg. I.	r	:	$tan.$H	=	$cos.$M	:	$tan.$B	
überhaupt	$tan.$H	:	$sin.$H	=	r	:	$cos.$H,	XIV, 62.
Reg. II.	$sin.$H	:	r	=	$sin.$B	:	$sin.$N	
überhaupt	r	:	$cos.$B	=	$tan.$B	:	$sin.$B	
und	$cos.$B	:	r	=	$cos.$B	:	r.	

Man setze alle diese Verhältnisse zusammen, so wird:

Reg. V. r : $cos.$P = $cos.$B : $cos.$H.

Man kan die Buchstaben P, B auch in dieser Regel versetzen, allein die Regel wird dadurch ganz und gar nicht geändert, wie man leicht siehet.

§. 124. Endlich soll die letzte Regel die Buchstaben M, N und H enthalten. Diese kan man folgendergestalt heraus bringen. Es ist:

Reg. V.	r	:	$cos.$P	=	$cos.$B	:	$cos.$H	
Reg. IV.	$cos.$P	:	r	=	$cos.$M	:	$sin.$N	
und	$sin.$M	:	$cos.$N	=	r	:	$cos.$B	
überhaupt	$cos.$N	:	$cot.$N	=	$sin.$N	:	r,	XIV, 62.
wie auch	$tan.$M	:	$sin.$M	=	r	:	$cos.$M	

Man setze diese Verhältniß wieder zusammen, so komt:

Reg. VI.	$tan.$M	:	$cot.$N	=	r	:	$cos.$H
oder	r	:	$cos.$H	=	$tan.$M	:	$cot.$N.

Auch hier komt durch die Verwechselung der Benennungen M, N, nichts bequemers. Weil aber in dieser sechsten Regel, die man auch also schreiben kan: $tan.$M : r = $cot.$N : $cos.$H, die Verhältniß $tan.$M : r, dieser r : $cot.$M gleich ist, XIV, 62. so kan man diese Regel auch also setzen:

r : $cot.$M = $cot.$N : $cos.$H.

§. 125. Wir haben also nachfolgende zehen Regeln heraus gebracht:

I.	r	:	$cos.$M	=	$tan.$H	:	$tan.$B		
II.	r	:	$sin.$H	=	$sin.$M	:	$sin.$P		
III.	r	:	$sin.$B	=	$tan.$M	:	$tan.$P		
IV.	r	:	$sin.$N	=	$cos.$P	:	$cos.$M		
V.	r	:	$cos.$B	=	$cos.$P	:	$cos.$H		
VI.	r	:	$cot.$M	=	$cot.$N	:	$cos.$H		
VII.	r	:	$cos.$N	=	$tan.$H	:	$tan.$P		
VIII.	r	:	$sin.$H	=	$sin.$N	:	$sin.$B		
IX.	r	:	$sin.$P	=	$tan.$N	:	$tan.$B		
X.	r	:	$sin.$M	=	$cos.$B	:	$cos.$N		

Deren vier letztere zwar aus den vier erstern durch die bloße Verwechselung der Benennungen P, B, und N, M, leicht können gemacht werden, aber doch, wie bereits angemerket worden ist, einige Bequemlichkeit in der Anwen-

wendung geben. Und diese Regeln sind hinlänglich alle geradewinklichte dreyseitige Ecken aufzulösen, welches das einzige ist, so wir noch erweisen müssen.

§. 126. Man hat nemlich in einer dergleichen Ecke, außer dem geraden Winkel, noch fünf Theile, drey Seiten nemlich B, P, H und zween Winkel M, N. Aus jeden drey Theilen einer solchen Ecke soll jeder vierter Theil gefunden werden: der gerade Winkel aber stehet allezeit unter den bekanten drey Theilen; folgends sind außer demselben noch zwey bekante Theile, aus welchen ein jeder dritter zu finden ist. Nun enthält eine jede unserer Regeln, außer dem Zeichen des Sinus eines geraden Winkels r, drey Buchstaben, welche drey Theile des Dreyecks bedeuten, aus deren zweyen, nach Anleitung der Regeln, der dritte durch die gemeine Proportionsregel, oder bequemer, durch die Logarithmen, gefunden werden kan. Es folget also, daß, wenn in unsern zehen Regeln jede drey der fünf Buchstaben B, P, H, M, N, vorkommen, welche man nur zusammen setzen kan, die Regeln zur Auflösung aller Fälle hinlänglich seyn werden.

§. 127. Es lassen sich aber drey und drey der fünf Buchstaben B, P, H, M, N, auf diese Art zusammen setzen:

BPH BPM BPN	BHM BHN	BMN	PHM PHN	PMN	HMN

und man siehet leicht, daß man sie nicht auf mehrere Arten zusammen setzen könne, wenn man auf die Ordnung Acht hat, welche wir bey dieser Zusammensetzung beobachtet haben, da nemlich erstlich die letztern, und sodann nach und nach auch die vorgehenden Buchstaben so oft verändert worden sind, als dieses hat geschehen können. Nun sind diese zehen Zusammenfügungen der Buchstaben alle in den gegebenen zehen Regeln enthalten, wie man sehen kan, wenn man sich die Mühe geben will, beydes zusammen zu halten; es sind also die Regeln vor alle Fälle, die bey den geradewinklichten Ecken vorkommen können, hinlänglich.

Anwendung dieser Regeln.

§. 128. Es ist kaum nöthig, daß wir zeigen, wie diese Regeln zu gebrauchen sind, so leicht ist dieser Gebrauch. Doch kan ein oder anders Exempel nicht schaden. Es sey in einer geradewinklichten dreyseitigen Ecke, oder in einem sphärischen Dreyeck, aus der Grundseite und aus der Hypothenuse

thenuse der Winkel zu finden, welcher zwischen diesen beyden Seiten lieget; so ist dasjenige bekant, so wir mit B bezeichnet haben, wie auch die Seite H, und wird der Winkel gesucht, bey welchem in unsern Figuren allezeit M stehet. Man nehme demnach aus den zehen gegebenen Proportionen diejenige, in welcher H, B und M vorkommen, diese ist die erste, $r : cos.M = tan.H : tan.B$, aber da hier M gesucht wird, so versetze man die Glieder dieser Proportion dergestalt, daß M das letzte werde, und mache $tan.H : tan.B = r : cos.M$, so siehet man, daß man sagen müsse, wie die Tangente der Hypothenuse zur Tangente der Grundseite: so der Radius zu dem Cosinus des gesuchten Winkels M, welcher demnach vermittelst der Logarithmen leicht kan gefunden werden.

Es sey aus dem Winkel an der Perpendicularseite und aus dem Winkel an der Grundseite, die Grundseite zu finden, so hat man N, M, und B wird gesucht. Diese drey Buchstaben kommen in der zehenten Regel $r : sin.M = cos.B : cos.N$ vor. Versetzt man nun die Glieder derselben dergestalt, daß das gesuchte B in die vierte Stelle komme, so stehet sie also: $sin.M : r = cos.N : cos B$, und man siehet, daß man sagen müsse, wie der Sinus des bekanten Winkels M zu dem Radius, so der Cosinus des ebenfals bekanten Winkels N, zu dem Cosinus des Winkels B, welchen man suchte.

Es sey aus der Hypothenuse und aus der Perpendicularseite die Grundseite zu finden, so ist H und P gegeben, und B wird gesucht. Die fünfte Regel $r : cos.B = cos.P : cos.H$ enthält diese drey Buchstaben. Versetzt man die Glieder derselben und machet $cos.P : cos.H = r : cos.B$, so siehet man, daß man sagen müsse: wie der Cosinus der Perpendicularseite zu dem Cosinus der Hypothenuse, so der Radius zu dem Cosinus der gesuchten Grundseite B.

§. 129. Es ist übrigens bey diesen Auflösungen zu merken, daß, da die Sinus und Tangenten, welche man findet, zu spitzigen Winkeln sowol als zu den stumpfen gehören, welche jene zu zweyen rechten Winkeln ergänzen, man wissen muß ob die Seite oder der Winkel, welchen man suchet, spitzig oder stumpf sey, wenn man das eigentliche Maaß desselben aus dem vermittelst der Regel gefundenen Sinus oder Tangenten bestimmen will. Dazu dienen die Eigenschaften, welche wir von diesen Ecken XII, 80. und in dem folgenden angemerket haben, daß nemlich B und N, wie auch P und M entweder zugleich spitzig, oder zugleich stumpf seyn. Wie auch, daß, wenn H spitzig ist, P und B entweder beyde spitzig oder stumpf seyn, XI, 89. da denn, dem vorigen zufolge, auch die Winkel M und N entweder beyde

spitzig oder beyde stumpf seyn müssen. Ferner, daß, wenn H stumpf ist, nothwendig eine der Seiten P, B spitzig, und die andere stumpf seyn müsse; und daß folgends bey diesem Umstand, auch einer der Winkel N, M spitzig sey und der andere stumpf. Endlich, daß, wenn die Seiten B, P, oder die Winkel M, N beyde spitzig oder stumpf sind, die Hypothenuse H spitzig sey; und stumpf, wenn einer der Winkel M, N, oder eine der Seiten B, P spitzig, und die andere stumpf ist.

§. 130. Man kan aber auch den Gebrauch dieser Regeln, welcher doch immer einiges Nachdenken erfordert, dadurch vermeiden, daß man die Cosinus, die Tangenten und Cotangenten eines stumpfen Winkels, oder eines Bogens, der größer ist als ein Quadrant, mit — bezeichnet, und dadurch von denen Cosinus, Tangenten und Cotangenten der spitzigen Winkel und der Bogen, welche kleiner sind als ein Quadrant, unterscheidet, als welche alsdenn immer mit + bezeichnet werden müssen, XIV, 46. 58. 59. Beobachtet man dieses dergestalt, daß man den Radius immer als positiv ansiehet, und mit + bezeichnet: so siehet man aus den Zeichen der drey ersten Glieder in einer jeden Proportion, welche zur Auflösung eines rechtwinklichten sphärischen Dreyecks gebraucht wird, alsbald, was das vierte Glied, welches man suchet, vor ein Zeichen haben müsse; und aus diesem Zeichen ist ferner zu schließen, ob der Winkel, zu welchen es gehöret, spitzig oder stumpf sey. Wovon aber der Fall eine Ausnahme machet, da ein Sinus gefunden wird, weil die Sinus aller Winkel, sie mögen spitzig oder stumpf seyn, immer als positiv angenommen werden müssen, XIV, 46.

§. 131. Wie nun das Zeichen des vierten Gliedes aus denen Zeichen derer drey erstern zu schließen sey, siehet man aus demjenigen, so von den Zeichen der Producte XIII, 74. gesagt ist. Es ist aber auch vor sich klar genug, daß, wenn die Glieder einer Proportion sämtlich mit einem der Zeichen + oder — beleget werden, diese Zeichen in der Proportion unmöglich anders stehen können, als in einer von den folgenden acht Ordnungen:

+	+	+	+	‖	—	—	—	—
+	+	—	—	‖	—	—	+	+
+	—	+	—	‖	—	+	—	+
+	—	—	+	‖	—	+	+	—

also hat man sich über das Zeichen des letztern Gliedes niemals lange zu bedenken, und siehet also ohne Anstand zu was vor einer Art der Winkel oder Bogen der gesuchte gehöre. Und da ein Sinus uns vor sich dennoch hierinne zweifelhaft lässet, so wird dieser Zweifel öfters durch die einzige Anmer-

merkung gehoben, daß M und P, wie auch N und B, immer von einer Art sind. Wir wollen die Regeln kurz durchgehen, und dadurch uns dieses alles noch deulicher vorstellen.

§. 132. In der ersten Regel kömt kein Sinus vor. Man mag also vermittelst dieser Regel suchen was man will, so siehet man unmittelbar aus dem Zeichen desselben, zu welcher Art der Bogen oder Winkel es gehöre: uud eben dieses ist auch in Ansehung der fünften und der sechsten Regel richtig. Wie auch in Ansehung der siebenden, welche aber von der ersten im Grunde nicht verschieden ist.

Was die zweyte Regel anlangt, in welcher bloß Sinus vorkommen, so weiß man, zu welcher Art P gehöre, wenn M bekant ist, und wenn P bekant ist, so ist auch bekant ob M spitzig oder stumpf sey. Also ist nur der einzige Fall zweydeutig; wenn in dieser Regel P und M bekant sind, und man die H suchet, von welcher man nicht wissen kan, ob sie größer oder kleiner als ein Quadrant sey. Eben dieses ist auch von der achten Regel zu sagen, welche im Grunde mit der zweyten einerley ist.

Bey der dritten Regel hat wieder nur in dem Fall eine Zweydeutigkeit statt, wenn B gesucht wird. Denn es wird auch hier der Sinus dieser Seite gefunden, zu den übrigen aber kommen die Tangenten, aus deren Zeichen man sehen kan, ob sie zu spitzigen oder stumpfen Winkeln gehören. In dem zweydeutigen Fall werden auch hier P und M, und der neunten Regel, welche mit dieser im Grunde einerley ist, B und N gegeben. Von der vierten Regel und von der zehenten ist eben dergleichen zu sagen. Es ist auch hier bloß der Fall zweydeutig wenn P und M oder B und N gegeben werden.

§. 133. Es wird also bloß in diesem Fall, was gesucht wird, zweydeutig gefunden, so nemlich, daß zu entscheiden übrig bleibt, zu welcher Art von Bogen oder Winkeln es gehöre, wenn aus dem rechten Winkel, aus dem Winkel M und der demselben entgegen gesetzten Seite P, oder aus dem Winkel N und der demselben entgegen stehenden Seite B, die übrigen Theile des Dreyecks zu bestimmen sind. Der Grund dieser Zweydeutigkeit ist oben XII,78. angemerket worden. Man kan nemlich öfters aus zween Winkeln eines sphärischen Dreyecks und aus einer Seite, welche nicht zwischen denenselben lieget, zwey Dreyecke verfertigen. Und dieses ist der gegenwärtige Fall, die Winkel R und M sind gegeben, wie auch die Seite P, welche dem Winkel M entgegen stehet, und also nicht zwischen R und M lieget. Zuweilen zwar ist aus diesen Dingen nur ein Dreyeck zu verfertigen: aber wir können bey diesen besondern Umständen uns nicht aufhalten.

Regeln zur Berechnung der dreyseitigen Ecken, deren Winkel schief sind.

[*Fig.* 404.] §. 134. Was nun die dreyseitigen Ecken anlanget, deren Winkel alle schief sind, so kan man dieselbe gröstentheils nicht anders berechnen, als wenn man sie aus zwey geradewinklichten Ecken zusammen setzet; oder heraus bringet, indem man eine dreyseitige Ecke, die einen geraden Winkel hat, von einer andern dergleichen Ecke wegnimt. Wir haben bereits XII, 101. gewiesen, wie dieses zu thun sey. Es sey NC, Mmn, eine dreyseitige Ecke, deren Winkel bey M und m von einerley Art sind, entweder beyde spitzig oder beyde stumpf: so kan man durch NC eine Seite NRC auf MCm perpendicular legen, welche die Seite MCm in die zwey Theile MCR, RCm, und das schiefwinklichte Dreyeck in die zwey rechtwinklichte Dreyecke NCMR und nCmR theilen wird. Der Winkel des schiefwinklichten Dreyecks, welcher der getheilten Seite MCm entgegen stehet, ist in diesem Fall aus den zwey Winkeln der geradewinklichten Dreyecke N und n zusammen gesetzt, und da wir diesen Winkel allezeit Nn nennen wollen, so ist in dem gegenwärtigen Falle, Nn = N + n. Uebrigens ist die Perpendicularseite NCR = P, den beyden geradewinklichten Dreyecken gemeinschaftlich, NCM ist die Hypothenuse des einen, die wir H nemen, und nCm die Hypothenuse des andern, die wir mit h bezeichnen wollen, MCR ist die Grundseite des einen B, und RCm die Grundseite des andern, die wir uns unter b vorstellen, MCm aber, die wir der Kürze halber Bb nennen, ist hier = B + b. Demnach ist in diesem Fall Nn gröser als N oder n; und Bb gröser als B oder b.

[*Fig.* 405.] §. 135. Sind aber die Winkel M und m verschiedener Art, dergleichen die 405 Figur vorstellet, da die schiefwinklichte dreyseitige Ecke wieder mit NCMmn bezeichnet worden ist; so fällt die Fläche, welche durch NC gehet, und auf die Fläche, in welcher MCm lieget, perpendicular ist, auser der Seite MCm, und man bekomt, wenn man sich diese Fläche NCR vorstellet, zwar wieder zwey rechtwinklichte Ecken, nemlich NCMR und nCmR. Allein die schiefwinklichte Ecke NCMmn wird nicht durch die Zusammensetzung derselben heraus gebracht, sondern sie bleibt übrig, wenn man die nCmR von der NCMR wegnimt. Indessen ist die Perpendicularseite NCR = P wieder diesen beyden rechtwinklichten Ecken gemeinschaftlich, aber die Seite MCm, welche wir, wie vorhero Bb nennen, ist nunmehro der Unterschied der Grundseiten der geradewinklichten Ecken MCR — mCR. Nennen wir also MCR wieder B, und setzen mCR = b, so ist hier

Bb =

$Bb = B - b$. Eben so ist es mit dem Winkel, welcher der Seite MCm entgegen stehet, an dessen Spitze Nn stehet, und diesen Winkel bezeichnet. Wenn wir allezeit den Winkel MNR nennen N, und bezeichnen den Winkel mnR mit n, so ist $Nn = N - n$: und demnach Nn kleiner als N, gleichwie auch in dem gegenwärtigen Fall Bb kleiner ist als B. Indessen wird in beyden Fällen aus dem $Bb = B + b$ oder $B - b$ und aus dem B, die andere Grundseite b gar leicht gefunden, und eben so giebt sich aus $Nn = N + n$ oder $N - n$ und dem Winkel N, der Winkel n. Uebrigens nennen wir auch hier NCM, H und nCm bezeichnen wir mit h, weil dieses die Hypothenusen der geradewinklichten Ecken sind.

§. 136. Um nun aber die Regeln heraus zu bringen, nach welchen dergleichen Ecken zu berechnen sind; darf man nur diejenigen, so für die rechtwinklichten Ecken gefunden worden, XIV, 125. auf die beyden geradewinklichten Ecken anwenden, welche wir uns in der schiefwinklichten vorstellen. Dadurch geben sich die Regeln für die schiefwinklichten Ecken, wenn man nemlich die Regeln dergestalt zusammen nimmet, daß die Theile der geradewinklichten Ecken, welche in der schiefwinklichten nicht enthalten sind, ausfallen. Die Art zu schließen selbst wird dieses am deutlichsten weisen. Zum Ueberfluß können wir noch anmerken, daß man in allen diesen Regeln anstatt H auch h setzen könne, wenn man zugleich vor M, m vor N, n, und vor B, b, schreibet. Denn man thut dadurch in der That nichts anders, als daß man die allgemeine Regeln durch diejenige Benennungen ausdrücket, welche wir den Theilen der dreyseitigen Ecke nCmR gegeben haben. Die Benennung P aber darf nicht geändert werden, weil P den beyden geradewinklichten Ecken NCMR und nCmR gemeinschaftlich ist.

§. 137. Damit wir aber in dieser Arbeit ohne weitern Anstoß verfahren können; müssen wir vorher, die XIV, 69. gemachte Anmerkungen auf einige der herausgebrachten Regeln anwenden. Es sind diese Anmerkungen daselbst erwiesen worden: ich will sie aber hier nochmals auf eine andere Art erweisen, damit sie sich desto lebhafter vorstellen. Es sind A und B zween Cirkelbogen, jeder kleiner als der halbe Umkreis, und A ist kleiner als B. cA ist, wie immer, das Complement zu A, und cB das Complement zu B. Nun sind entweder die beyden Bogen A, B, jeder insbesondere, kleiner als ein Quadrant, oder jeder derselben ist größer, oder der eine B ist größer, der andere aber A ist kleiner.

§. 138. Ist sowol A kleiner als ein Quadrant, als auch B, und man bezeichnet den Quadranten mit Q, so ist $A = Q - cA$, und $B = Q - cB$. Wird nun das erstere von dem letztern abgezogen, so erhält man $B - A =$

$cA - cB$, woraus folgt $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}cA - \frac{1}{2}cB$, und $tan.(\frac{1}{2}cA - \frac{1}{2}cB) = tan.(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$. Setzet man aber gleiches zu gleichen, so kömt $B+A = 2Q - cB - cA$, woraus folget $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A = Q - (\frac{1}{2}cA + \frac{1}{2}cB.)$ Es ist also hier die eine der Summen $\frac{1}{2}cA + \frac{1}{2}cB$ das Complement der andern, weil diese übrig bleibt, wenn man jene von dem Quadranten abziehet, und demnach $tan.(\frac{1}{2}cA + \frac{1}{2}cB) = cot.(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$, oder $cot.(\frac{1}{2}cA + \frac{1}{2}cB) = tan.(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$.

§. 139. Ist jeder der Bogen A und B größer als ein Quadrant, so ist $A = Q + cA$, und $B = Q + cB$. Wird also gleiches von gleichen abgezogen, so komt $B - A = cB - cA$ und $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cA$, wie vorher. Denn es wird nur überhaupt der Unterschied der Complemente genommen, ohne daß man sich bekümmere, ob dieses oder jenes das größere sey, indem man immer das kleinere von dem größern abziehet. Setzet man aber eben diese gleichen Bogen zusammen, so erhält man $B + A = 2Q + cA + cB$, woraus folgt $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A = Q + (\frac{1}{2}cA + \frac{1}{2}cB)$. Es ist also auch nunmehro $(\frac{1}{2}cA + \frac{1}{2}cB)$ das Complement der halben Summe $(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$, weil diese letztere den Quadranten um $(\frac{1}{2}cA + \frac{1}{2}cB)$ übertrift, und demnach wie in dem vorigen Fall: $tan.(\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cA) = tan.(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$ und $cot.(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) = tan.(\frac{1}{2}cA + \frac{1}{2}cB)$ oder $tan.(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) = cot.(\frac{1}{2}cA + \frac{1}{2}cB)$.

§. 140. Ist aber endlich B größer als ein Quadrant, und A kleiner, so ist $B = Q + cB$, und $A = Q - cA$, folgends, wenn man das kleinere von dem größern abziehet, $B - A = cB + cA$, und $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cA$, und demnach $tan.(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A) = tan.(\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cA)$. Setzt man aber eben diese gleichen Bogen zusammen, so wird heraus gebracht: $B + A = 2Q + cB - cA$, woraus folgt: $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A = Q + (\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cA)$. Es ist demnach hier $(\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cA)$ das Complement zu $(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$ weil diese Summe den Quadranten um $(\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cA)$ übertrift; und folgends $tan.(\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cA) = cot.(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$ oder $cot.(\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cA) = tan.(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$.

§. 141. Werden nun diese Ausdrücke in die Proportion eingeführet, von welcher wir XIV, 74. gesehen haben, daß sie allgemein sey, und vor alle Fälle gelte; ich meine diese:

$tan.(\frac{1}{2}cA + \frac{1}{2}cB) : tan.(\frac{1}{2}cA - \frac{1}{2}cB) = (cos.A + cos.B) : (cos.A - cos.B)$

so erhält man vor den Fall, wenn die Bogen A, B beyde größer oder kleiner sind, als Quadranten, und die Winkel welche sie messen, beyde spitzig oder beyde stumpf, die folgende Proportion:

$cot.(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) : tan.(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A) = (cos.A + cos.B) : (cos.A - cos.B)$;

Vor

Vor den andern Fall aber, wenn der eine Bogen B gröſſer ist als ein Quadrant, und der andere A kleiner, wird heraus gebracht:

$$tan.(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{2}A) : cot.(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}A) = (cos.A+cos.B) : (cos.A-cos.B),$$

und dieses sind die Proportionen, welche wir gebrauchen werden: und wir können nunmehro ohne weitern Anstand zur Verfertigung der verlangeten Regeln vor die schiefwinklichte Dreyecke übergehen.

§. 142. Es ist aber in XIV, 125.

Reg. II. $r : sin.H = sin.M : sin.P$ und folgends auch
$r : sin.h = sin.m : sin.P$ und also VIII,32.
$sin.H : sin.h = sin.m : sin.M.$

Dieses ist sogleich die erste Regel vor die schiefwinklichte Dreyecke. Siehet man bey dieser Regel etwas stille, so findet man, daß sie eine groſse Gemeinschaft mit der Regel XIV, 88. habe, vermittelst welcher die meisten Auflösungen der ebenen Dreyecke verrichtet werden. In diesen Dreyecken verhalten sich jede zwo Seiten, wie die Sinus der Winkel, welche ihnen entgegen liegen, und hier verhalten sich die Sinus zwoer Seiten, wie die Sinus der Winkel, welche ihnen entgegen liegen. Denn m stehet der Seite H entgegen, und M ist der Seite h entgegen gesetzt. Eben dieses trift auch bey den Regeln für die geradewinklichte Dreyecke ein, aus welchen die gegenwärtige geschlossen worden ist, weil H dem geraden Winkel entgegen stehet, dessen Sinus r ist, und P dem Winkel M. Man kan also diese Regel leicht im Gedächtniß behalten, welches bey den übrigen nicht möglich seyn durfte, und auch eben nicht nothwendig ist, weil man bey dem Gebrauch derselben leicht eine Tafel nachschlagen kan, dergleichen diejenige ist, die wir geben werden.

§. 143. Die zweyte Regel berechnen wir folgendergestalt. Es ist die dritte der Regel für die geradewinklichte Ecken:

$r : sin.B = tan.M : tan.P$, und folgends
$r : sin.b = tan.m : tan.P$, demnach VIII, 32.
$sin.B : sin.b = tan.m : tan.M$

welches die Regel ist, die wir suchten.

§. 144. Die dritte Regel folget aus der vierten für die geradewinklichte Ecken. Diese war:

$$r : \cos.P = \sin.N : \cos.M,$$ folgends ist auch

$$r : \cos.P = \sin.n : \cos.m,$$ und also

$$\sin.N : \cos.M = \sin.n : \cos.m,$$ oder

$$\sin.N : \sin.n = \cos.M : \cos.m.$$ Dieses ist unsere dritte Regel.

§. 145. Aus dieser folget nun die vierte, wenn man sie mit einem Satz verknüpfet, den wir oben erwiesen haben. Aus der Proportion nemlich die eben gefunden worden ist,

$\sin.N : \sin.n = \cos.M : \cos.M$, fließet VI, 104.

$(\sin.N + \sin.n) : (\sin.N - \sin.n) = (\cos.M + \cos.m) : (\cos.M - \cos.m)$

Nun ist $(\sin.N + \sin.n) : (\sin.N - \sin.n) = \tan.(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}n) : \tan.(\frac{1}{2}N - \frac{1}{2}n)$ XIV, 73.

und $(\cos.M + \cos.m) : (\cos.M - \cos.m) = \tan.(\frac{1}{2}cM + \frac{1}{2}cm) : \tan.(\frac{1}{2}cM - \frac{1}{2}cm)$ XIV, 74.

Folgends $\tan.(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}n) : \tan.(\frac{1}{2}N - \frac{1}{2}n) = \tan.(\frac{1}{2}cM + \frac{1}{2}cm) : \tan.(\frac{1}{2}cM - \frac{1}{2}cm)$.

§. 146. Ferner giebt die fünfte der Regeln vor die geradewinklichten Ecken;

$$r : \cos.P = \cos.B : \cos.H,$$ folgends ist auch

$$r : \cos.P = \cos.b : \cos.h,$$ und also

$$\cos.B : \cos.H = \cos.b : \cos.h,$$ oder

$$\cos.B : \cos.b = \cos.H : \cos.h.$$ Dieses ist die fünfte der Regeln, deren man bey den schiefwinklichten Ecken benöthiget ist.

§. 147. Hat man aber bey dieser Proportion

$$\cos.B : \cos.b = \cos.H : \cos.h$$

auf die Zeichen acht, welche man den Gliedern derselben geben kan, durch welche die Cosinus solcher Bogen, die größer sind als ein Quadrant, von denen

denen unterschieden werden, welche einen Quadranten nicht übertreffen, oder die Cosinus der stumpfen Winkel, von denen, die zu spitzigen Winkeln gehören, XIV, 130. so siehet man ohne Anstand, daß, wenn die Bogen B und b beyde kleiner sind als Quadranten, es nicht möglich sey, daß einer der Bogen H und h größer sey als ein Quadrant der andere aber kleiner; sondern daß entweder diese Bogen H, h beyde größer seyn müssen als ein Quadrant, oder beyde kleiner. Und eben so ist es, wenn sowol B größer ist als ein Quadrant, als auch b. Auch in diesem Fall muß entweder jeder der Bogen H, h einen Quadranten übertreffen; oder der Quadrant muß größer seyn, als der gröste dieser Bogen, und folgends auch größer als der kleinere. Ist aber einer der Bogen B, b größer als ein Quadrant, der andere aber kleiner; so ist eben so leicht einzusehen, daß auch einer der Bogen H und h den Quadranten übertreffen, der andere aber von dem Quadranten übertroffen werden müsse. Man darf in der That nur die Augen auf die XIV, 131. vorgestellete Ordnungen der Zeichen werfen, wenn man hievon überführet seyn will, oder überhaupt bemerken, daß die Zeichen der zwey erstern Glieder der Proportion *cos.* B, *cos.*b unmöglich einerley seyn können, indem die Zeichen der letztern *cos.* H, *cos.*h verschieden sind, und daß, wenn *cos.* B und *cos.*b einerley Zeichen haben; auch nothwendig *cos.* H und *cos.*h einerley Zeichen haben müssen. Da nun also aus eben dieser Proportion überhaupt folgt:

$$(cos.b + cos.B) : (cos.b - cos.B) = (cos.h + cos.H) : (cos\ h - cos.H)$$

vor den Fall aber in welchen sowol B als b größer oder kleiner ist als ein Quadrant, und also auch sowol H als h, oben XIV, 141. wiewol mit andern Buchstaben, stehet:

$$(cos.b + cos.B) : (cos.b - cos.B) = cot.(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}b) : tan.(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}b)$$

und $(cos.h + cos.H) : (cos.h - cos.H) = cot.(\tfrac{1}{2}H + \tfrac{1}{2}h) : tan.(\tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}h)$

so ist in diesem Falle:

$$cot.(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}b) : tan.(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}b) = cot.(\tfrac{1}{2}H + \tfrac{1}{2}h) : tan.(\tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}h).$$

Vor den andern Fall, in welchem einer der Bogen B, b; und folgends auch einer der Bogen H, h den Quadranten übertrift, der andere aber von dem Quadranten übertroffen wird, stehet auf eben die Art XIV, 141.

$$(cos.b + cos.B) : (cos.b - cos.B) = tan.(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}b) : cot.(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}b)$$

und $(cos.h + cos.H) : (cos.h - cos.H) = tan.(\tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}h) : cot.(\tfrac{1}{2}H + \tfrac{1}{2}h)$.

Es ist also vor diesem Fall, weil die zwo vorhergehende Verhältnisse einander gleich sind:

$$tan.(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}b) : cot.(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}b) = tan.(\tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}h) : cot.(\tfrac{1}{2}H + \tfrac{1}{2}h)$$

welche Proportion mit derjenigen, die vor den ersten Fall gefunden worden ist, völlig übereinkömt, indem nur die Glieder in umgekehrter Ordnung stehen. Es ist also diese Proportion allgemein, und schickt sich vor beyde Fälle. Man kan sie aber mit gewechselten Gliedern, auch also schreiben:

$$cot.(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}b) : cot.(\tfrac{1}{2}H + \tfrac{1}{2}h) = tan.(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}b) : tan.(\tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}h).$$

Woraus, wenn man sich an statt der Cotangenten der Tangenten bedienet, endlich wird

$$tan.(\tfrac{1}{2}H + \tfrac{1}{2}h) : tan.(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}b) = tan.(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}b) : tan.(\tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}h),$$

und dieses ist unsere sechste Regel.

§. 148. Endlich wird die siebente aus der siebenten Regel für die geradewinklichten Ecken gemacht. Diese Regel war

$$r : cos.N = tan.H : tan.P,$$ folgends ist auch

$$r : cos.n = tan.h : tan.P,$$ und also VIII, 32.

$$cos.N : cos.n = tan.h : tan.H.$$

Dieses sind die Regeln, welche man zur Berechnung der dreyseitigen Ecken, deren Winkel schief sind, gebrauchet, alle.

Anwen-

Anwendung dieser Regeln.

§. 149. Zur bequemen Anwendung dieser Regeln dienet die nachstehende Tafel:

Bekant	Q.	Erste Regel.	Zweyte Regel.
Es wird eine Seite gesucht.			
M, m, H	h	*sin.* m : *sin.* M = *sin.* H : *sin.* h	
M, Bb, H	h	r : *cos.* M = *tan.* H : *tan.* B	*cos.* B : *cos.* b = *cos.* H : *cos.* h
M, Nn, H	h	*cot.* M : r = *cos.* H : *cot.* N	*cos.* n : *cos.* N = *tan.* H : *tan.* h
M, m, Nn	h	*tan.*$(\frac{1}{2}c\mathrm{M}+\frac{1}{2}c\mathrm{m})$: *tan.*$(\frac{1}{2}c\mathrm{M}-\frac{1}{2}c\mathrm{m})$ = *tan.*$(\frac{1}{2}\mathrm{N}+\frac{1}{2}\mathrm{n})$: *tan.*$(\frac{1}{2}\mathrm{N}-\frac{1}{2}\mathrm{n})$	r : *cot.* m = *cot.* n : *cot.* h
M, m, H	Bb	r : *cos.* M = *tan.* H : *tan.* B	*tan.* m : *tan.* M = *sin.* B : *sin.* b.
M, h, H	Bb	r : *cos.* M = *tan.* H : *tan.* B.	*cos.* H : *cos.* h = *cos.* B : *cos.* b
Es wird ein Winkel gesucht.			
H, h, M	m	*sin.* h : *sin.* H = *sin.* M : *sin.* m	
H, Nn, M	m	*cot.* M : r = *cos.* H : *cot.* N	*sin.* N : *sin.* n = *cos.* M : *cos.* m
H, Bb, M	m	r : *cos.* M = *tan.* H : *tan.* B	*sin.* b : *sin.* B = *tan.* M : *tan.* m
H, h, Bb	m	*tan.*$(\frac{1}{2}\mathrm{B}+\frac{1}{2}\mathrm{b})$: *tan.*$(\frac{1}{2}\mathrm{H}+\frac{1}{2}\mathrm{h})$ = *tan.*$(\frac{1}{2}\mathrm{H}-\frac{1}{2}\mathrm{h})$: *tan.*$(\frac{1}{2}\mathrm{B}-\frac{1}{2}\mathrm{b})$	*tan.* h : *tan.* b = r : *cos.* m
H, h, M	Nn	*cot.* M : r = *cos.* H : *cot.* N	*tan.* h : *tan.* H = *cos.* N : *cos.* n
H, M, m	Nn	*cot.* M : r = *cos.* H : *cot.* N	*cos.* M : *cos.* m = *sin.* N : *sin.* n

§. 150. Diese Tafel nun wird also gebraucht. Man muß sich die zwo letzten Zeichnungen vorstellen, die 404 nemlich und die 405, und auf das Gesuchte acht haben, welches entweder eine Seite oder ein Winkel ist. Zu dem ersten dienet die erste Helfte der Tafel, und zu dem andern die zweyte.

Wird nun 1) eine Seite gesucht, und der Winkel, welcher dieser Seite entgegen gesetzt ist, ist gegeben, so nenne man die gesuchte Seite h, den gegebenen Winkel aber, welcher derselben entgegen stehet, bezeichne man mit M. Ist aber der, der gesuchten Seite entgegen st hende Winkel nicht gegeben, so nenne man die gesuchte Seite Bb, wodurch der unbekante Winkel, welcher dieser Seite entgegen gesetzt ist, die Benennung Nn bekömt. In beyden Fällen bezeichne man die Seite, welche außer der gesuchten in der Aufgabe als bekant vorkömt, oder wenn beyde Seiten bekant sind, eine derselben mit H. Alsdenn ist es gar leicht auch dem noch übrigen Theil, welcher in der Aufgabe als bekant vorkömt, oder denen noch übrigen Theilen, die gehörige Benennung zu geben, und man sieht, wie das schiefwinklichte Dreyeck aus zweyen geradewinklichten heraus zu bringen sey, damit es sich zu den Regeln schicke.

Wird aber 2) ein Winkel gesucht, und es ist die Seite bekant, welche diesem Winkel entgegen stehet; so benenne man den gesuchten Winkel mit m, die demselben entgegen gesetzte Seite aber mit H. Wird aber die dem gesuchten Winkel entgegen gesetzte Seite nicht gegeben, so setze man der gesuchte Winkel sey Nn, wodurch die demselben entgegen gesetzte unbekante Seite Bb wird. Komt nun, außer dem gesuchten m in der Aufgabe noch ein Winkel als bekant vor, so nenne man denselben M; und wenn beyde Winkel bekant sind, welche außer dem gesuchten in dem Dreyecke vorkommen, so nenne man einen derselben M. Alsdann ist es wieder leicht, dem übrigen Theil, oder denen übrigen Theilen, welche in der Aufgabe als bekant vorkommen, die gehörige Benennung zu geben, und man sihet wieder wie das schiefwinklichte Dreyeck schicklich aus zweyen geradelinichten gemacht werden müsse.

Nunmehro werden die Buchstaben, welche die bekanten Theile des Dreyecks ausdrücken in der Tafel unter dem Wort bekant aufgesucht, und zwar in dem ersten oder zweyten Theil derselben, nachdem eine Seite oder ein Winkel gesucht wird. Hat man sie gefunden, so stehen in eben der Zeile auch die Regeln, deren man sich bedienen muß, das gesuchte aus den bekanten Theilen heraus zu bringen. Es sind dieser Regeln meistens zwo, deren eine man nach der andern anwenden muß, und nur wenige Fälle wer-

den

den durch eine einzige Proportion aufgelöset. Man kan aber auch diese Regeln bey ihrer Anwendung leicht verändern, indem man sich anstatt der Cotangenten derer Tangenten, oder jener anstatt dieser, bedienet, so oft dadurch die Arbeit in etwas erleichtert wird.

§. 151. Wenn, zum ersten Beyspiel, eine Seite gesucht wird, und es ist eine von den übrigen Seiten gegeben, zusamt dem Winkel, welcher dieser gegebenen Seite entgegen stehet: so nennet man die gesuchte Seite h, und den ihr entgegen gesetzten Winkel M, die bekante Seite aber bezeichnet man mit H. Alsdenn kan man den dieser Seite entgegen gesetzten Winkel nicht anders nennen als m, und man hat die Buchstaben M, m, h erhalten, welche die bekanten Theile des Dreyecks ausdrücken, indem h die gesuchte Seite ist. Diese Buchstaben nun stehen in dem ersten Theil der Tafel in der ersten Zeile, und in eben der Zeile stehet die Regel *sin.* m : *sin.* M = *sin.* H : *sin.* h, durch welche *sin.* h aus der bekanten Seite H und den bekanten Winkeln M, m, gefunden wird. Weiß man nun, ob h größer oder kleiner ist als ein Quadrant, so kan man, vermittelst der Sinustafeln, auch zu *sin.* h den Bogen h selbst schaffen.

§. 152. Es wird, zum zweyten Beyspiel, abermal eine Seite gesucht, und der dieser Seite entgegen stehende Winkel wird gegeben, zusamt noch einer Seite, und dem zwischen dieser und der gesuchten Seite liegenden Winkel. Weil hier wieder der Winkel gegeben wird, welcher der gesuchten Seite entgegen stehet; so ist die gesuchte Seite h, und der ihr entgegen stehende Winkel ist M; die gegebene Seite aber H. Dadurch bekomt der zweyte gegebene Winkel den Namen Nn, und die Buchstaben M, Nn, H zeigen alles an, was in dieser Aufgabe gegeben wird. Da nun diese Buchstaben in der dritten Zeile des ersten Theils der Tafel vorkommen; so wird man zuerst die Proportion *cot.* M : *r* = *cos.* H : *cot.* N gebrauchen und dadurch den Winkel N finden müssen. Man kan aber auch diese Proportion in die nachfolgende *r* : *tan.* M = *cos.* H : *cot.* N verwandeln, welche eine etwas leichtere Rechnung giebt. Nun ist Nn bekant, und entweder N + n oder N — n. Demnach erhält man in beyden Fällen den Winkel n, wenn man den kleinern der Winkel Nn und N von dem größern abziehet. Ist nun der Winkel n dergestalt gefunden worden, so wird ferner die gesuchte Seite h durch die zweyte Regel eben der Zeile herausgebracht, indem man nemlich schließet: *cos.* n : *cos.* N = *tan.* H : *tan.* h, und es wird die Seite h dadurch völlig bestimmet.

§. 153. Es wird, zum dritten Beyspiel, aufgegeben einen Winkel zu suchen, wenn alle drey Seiten gegeben sind. Da also die dem gesuch-

ten Winkel entgegen gesetzte Seite nothwendig unter den gegebenen ist, so nenne man den gesuchten Winkel m, und die ihm entgegen gesetzte Seite H. Alsdenn bleibt vor die übrigen Seiten keine andere Benennung übrig, als h vor die eine und Bb vor die andere. Es sind demnach die bekanten Dinge hier H, h, Bb, welche in der vierten Zeile des zweyten Theils der Tafel stehen; und es folgt in dieser Reihe zuerst die Regel: *tan* $(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}b)$: *tan.*$(\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}h)$ = *tan.*$(\frac{1}{2}H-\frac{1}{2}h)$: *tan.*$(\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}b)$. Nun sind in dieser Proportion die mittlern Glieder aus den bekanten H und h leicht zu machen. Was aber Bb anlangt, so weiß man in der That nicht allemal, ob dasselbe sey B+b, oder aber B−b, es ist aber auch daran gar nichts gelegen. Weil man die Proportion verkehrt lesen kan, so siehet man alsobald, daß in dem Fall, wenn Bb = B+b, man *tan.* $(\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}b)$ heraus bringen werde, indem das Product der mittlern Glieder durch *tan.* $\frac{1}{2}$Bb dividiret: ist aber Bb = B−b, so wird eben diese Division des angezeigten Products durch *tan.* $\frac{1}{2}$Bb, geben *tan.*$(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}b)$. Man erhält also in dem einen Fall so gut als in dem andern sowol $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}b$ als $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}b$, und kan dadurch, daß man diese Bogen zusammen setzet, und den kleinern von dem größern abziehet, B und b selbst herausbringen. Ist aber b gefunden worden, so findet man ferner die gesuchte Seite h durch die zweyte Proportion dieser Zeile, welche ist: *tan.* h : *tan.* b = *r* : *cos.* m. Man halte diese Auflösung mit der XIV, 106. gegebenen zusammen, so wird man eine starke Uebereinstimmung finden, welche zur Erleuterung etwas beytragen kan.

§. 154. Wird, zum vierten Beyspiel, aufgegeben, aus den drey Winkeln eines sphärischen Dreyecks eine Seite desselben zu finden, so siehet man so gleich, daß die bekanten Dinge hier nicht anders benennet werden können, als mit M, m, Nn, und daß die gesuchte Seite h seyn werde, weil jeder Seite ein bekanter Winkel entgegen gesetzt ist. Da nun hier die beyden Winkel M und m bekant sind, so kan man immer wissen, ob man nehmen müsse Nn = N + n oder Nn = N − n, XIV, 134. 135. Alsdenn aber hat man drey Glieder der Proportion, welche in der vierten Zeile des ersten Theils der Tafel zuerst stehet, und man findet vermittelst dieser Regel entweder $\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}n$ zu $\frac{1}{2}N+\frac{1}{2}n$, oder $\frac{1}{2}N+\frac{1}{2}n$ zu $\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}n$. In beyden Fällen ist alsdenn auf die bereits zum öftern gezeigte Art, n leicht heraus zu bringen, indem man nemlich den kleinern Winkel $\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}n$ von dem größern $\frac{1}{2}N+\frac{1}{2}n$ abziehet. Hat man aber n, so findet man ferner h durch die zweyte Proportion der Zeile, welche ist: *r* : *cot.* m = *cot.* n : *cot.* h.

§. 155. Es wird, zum fünften Beyspiel, aufgegeben, einen Winkel zu finden, wenn die beyden übrigen Winkel gegeben sind, samt einer der Seiten,

ten, welche dem gesuchten Winkel nicht entgegen stehen, sondern denselben einschließen. Weil also die dem gesuchten Winkel entgegen stehende Seite nicht gegeben ist, so muß man den gesuchten Winkel Nn, die gegebene Seite aber H nennen. Die übrigen Winkel bekommen dadurch nothwendig die Benennung M und m, und man hat die Buchstaben H, M, m in dem zweyten Theil der Tafel zu suchen, wenn man dieses Dreyeck auflösen will. Es stehen aber dieselbe daselbst in der letzten Zeile; und man muß also nach der daselbst zuerst stehenden Proportion schließen: *cot.* M : r = *cos.* H : *cot.* N, oder r : *tan.* M = *cos.* H : *cot.* N, wodurch der Winkel N heraus gebracht wird. Hat man diesen, so schließet man ferner nach der zweyten Proportion der Zeile: *cos.* M : *cos.* m = *sin.* N : *sin.* n. Weil aber hier n durch seinen Sinus gegeben wird, so kan man nicht wissen, ob dieser Winkel spitzig oder stumpf sey. Kan diese Zweydeutigkeit in diesem oder jenen besondern Fall gehoben werden, so kan man den Winkel Nn aus den bekanten N und n leicht machen. Denn weil hier M und m bekant sind, so siehet man leicht, ob man nehmen müsse Nn = N + n oder Nn = N — n.

§. 156. Dasjenige aber, so von den rechtwinklichten Dreyecken XIV, 133. bemerket worden ist, daß zuweilen einige Zweydeutigkeit bey dem gesuchten übrig bleibe, indem man nicht wissen kan, ob die gesuchte Seite größer oder kleiner sey, als ein Quadrant, und ob der gesuchte Winkel spitzig oder stumpf sey, hat auch hier statt, und die Ursache dieser Zweydeutigkeit ist wieder die daselbst angezeigte, daß nemlich aus zween Winkeln und einer Seite, welche einen dieser Winkeln entgegen stehet, sich öfters zwey sphärische Dreyecke zusammensetzen lassen, wozu hier noch komt, daß auch aus zwo Seiten und einem Winkel, welcher einer dieser Seite entgegen lieget, zum öftern, und wenn die Größe dieser Dinge nicht besonders bestimt wird, zwey sphärische Dreyecke verfertiget werden können.

§. 157. Hieraus folgt, daß das gesuchte zweydeutig heraus gebracht werde, so oft M, m und H gegeben wird, welches in denen gegebenen Regeln dreymal vorkömt: welche Zweydeutigkeit hier immer davon herrühret, daß das zuletzt gesuchte ein Sinus ist, welcher immer das Zeichen + hat, es mag der Winkel zu welchen er gehöret, spitzig oder stumpf seyn. Denn weil hier M und m gegeben werden, so ist bekant, wie Bb aus B und b, und Nn aus N und n heraus gebracht werde. Zweytens wird auch das gesuchte mit einer Zweydeutigkeit gefunden, wenn H, h und M gegeben werden, welches wieder dreymal vorkomt. Und es rühret hier die Zweydeutigkeit in dem Fall, wenn der Winkel m gesucht wird, wieder von dem Sinus her: in den übrigen Fällen aber, da man Bb oder Nn suchet, wird

dieselbe dadurch übrig gelassen, daß man nicht wissen kan, ob man die Summe oder den Unterschied der gefundenen Seiten oder Winkel nehmen müsse, um die Seite Bb oder den Winkel Nn heraus zu bringen. Doch fällt diese Zweydeutigkeit in der Anwendung meistentheils weg, weil gemeiniglich einige Nebenumstände dasjenige, so diese Regeln nicht völlig bestimmen, deutlich genug aus einander setzen.

§. 158. Daß aber die Regeln, deren Gebrauch wir dergestalt gewiesen haben, hinlänglich sind, alle schiefwinklichte dreyseitige Ecken zu berechnen, siehet man also. Man nenne den Theil eines sphärischen Dreyecks, welcher gesucht wird, immer Q, und was dem Q in dem Dreyeck entgegen stehet, nenne man O. Die Theile, welche beyderseits an dem Q liegen, bezeichne man mit A und a, und die Theile, welche an O liegen, mit B, b: so daß A, B an eine Seite fallen, und a, b an die andere. Sollen nun die Regeln vollständig seyn, so müssen sie zeigen, wie aus jeden dreyen der fünf Theile A, a, B, b, O der Theil Q zu finden sey. Setzet man nun jede drey der fünf Buchstaben A, a, B, b, O, wie man nur kan, zusammen, so kommen dadurch nachfolgende Verknüpfungen heraus:

AaB Aab AaO	ABb ABO	AbO	aBb aBO	abO	BbO.

Es sind aber in diesen Verknüpfungen diejenigen, in welchen bloß die kleinen Buchstaben a, b mit den größern A, B verwechselt sind, von denselben nicht verschieden, und bedeuten nichts anders als jene. Lässet man also diese als überflüssig weg, so bleiben bloß diese sechs Verknüpfungen der gegebenen Theile übrig: AaB, AaO, ABb, ABO, AbO, BbO. Und alle diese kommen in der Tafel vor, sowol wenn der gesuchte Theil eine Seite ist, als auch wenn ein Winkel gesucht wird, wie man sogleich sehen wird, wenn man sich die Mühe geben will, diese sechs Verknüpfungen in der Tafel aufzusuchen.

Inhalt

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Einfache Rechnungsarten mit ganzen Zahlen und zehentheilichten Brüchen.

Allgemeine Begriffe von den Zahlen. Seite 1.
Wie die Zahlen durch Worte ausgedrücket werden. 6.
Die Zahlen geschickt zu schreiben. 8.
Die dergestalt geschriebene Zahlen zu lesen. 10.
Wie die Brüche überhaupt bezeichnet werden. 11.
Zehentheilichte Brüche. 11.
Die Addition. 14.
Die Subtraction. 18.
Probe der Addition und Subtraction. 22.
Die Anwendung der Addition und Subtraction. 23.
Bezeichnung der Größen, die einander vermehren oder vermindern. 25.
Die Addition und Subtraction gewisser Brüche. 29.
Begriffe von der Multiplication. 30.
Grundsätze zur Multiplication. 31.
Bey der Multiplication gebräuchliche Zeichen und Wörter. 34.
Verfolg der Gründe der Multiplication. 34.
Nähere Gründe zur Ausübung der Multiplication. 38.
Die Ordnungen der Einheiten in dem Producte zu bestimmen. 43.
Die Multiplication am bequemsten zu verrichten. 45.
Die Producte der Zahlen, welche nur mit einer Ziffer geschrieben werden, zu finden. 47.
Bestimmung der Ordnung der Einheiten des Products. 49.

Inhalt.

Fernere Erläuterung der Ausübung der Multiplication. 51.
Begriffe zur Division. 53.
Gründe der Division. 54.
Vorbereitung zur Ausübung der Division. 60.
Die kürzeste Art zu Dividiren. 67.
Die Ordnung der Einheiten in dem Quotienten zu bestimmen. 70.
Den Quotienten in zehentheilichten Brüchen darzustellen. 72.
Einige Vortheile der Multiplication und Division. 76.
Gebrauch dieser Vortheile bey der Probe der Multiplication. 80.
Eine andere Probe der einfachen Rechnungsarten. 82.

Zweyter Abschnitt.

Von der Berechnung der Brüche.

Gründe der Bruchrechnung. S. 87.
Das Aufheben der Brüche. 89.
Zween Brüche zu einerley Benennung zu bringen. 93.
Brüche von verschiedenen Benennungen zu vereinigen. 95.
Drey oder mehrere Brüche unter eine Benennung zu bringen. 98.
Multiplication durch Brüche. 99.
Division durch Brüche. 103. Einige Anmerkungen. 106.
Von den einfachen und zusammen gesetzten Zahlen. 107.
Gemeinschaftliche Theiler zwoer Zahlen. 110.
Den grösten gemeinschaftlichen Theiler zwoer Zahlen zu finden. 112.
Einige besondere Wege, den gemeinschaftlichen Theiler zwoer Zahlen zu finden. 116.
Wie die zusammen gesetzte Zahlen aus den einfachen entstehen. 117.
Ein anderer Beweis dieses Satzes. 123.
Erläuterung der gemeinschaftlichen Theiler verschiedener Zahlen. 128.
Anwendung dieser Betrachtungen auf die Brüche. 129.
Einige Vortheile bey der Bruchrechnung. 131.

Dritter Abschnitt.

Von den Quadrat- und Cubiczahlen.

Begriffe der Quadratzahlen. Seite 135.
Zusammensetzung der Quadratzahl einer zweytheiligen Wurzel. 137.

Die

Die Quadratzahl einer Wurzel, die mehr als zween Theile hat, zusammen zu setzen. 140.
Die Wurzel aus einer Quadratzahl zu ziehen die eine ganze Zahl ist. 145.
Ganze Zahlen, deren Quadratwurzeln keine ganze Zahlen sind. 150.
Wie man sich den Quadratwurzeln nähere, die nicht genau ausgedrückt werden können. 155.
Die Wurzeln zehentheilichter Brüche. 158.
Irrationalzahlen. 160.
Begriffe von den Cubiczahlen. 161.
Wie die Cubiczahl einer zweytheilichten Wurzel zusammen gesetzt wird. 162.
Wie die Cubiczahl einer Wurzel zusammen gesetzt wird, die mehr als zween Theile hat. 168.
Das Ausziehen der Cubicwurzel. 171.
Cubicwurzeln der Brüche. 176.
Ganze Zahlen, deren Cubicwurzeln keine ganze Zahlen sind. 178.
Wie man sich den Cubicwurzeln nähert, wenn sie nicht genau zu haben sind. 179.

Vierter Abschnitt.

Von geraden Linien und Winkeln.

Allgemeine Begriffe von dem ausgedehnten Wesen. Seite 183.
Begriffe der Puncte und Linien. 187.
Oberflächen. 194.
Von den Winkeln, vor sich betrachtet. 197.
Parallellinien. 211.
Von dem Umkreis der Figuren überhaupt. 214.
Wie der Umkreis eines Dreyecks durch zwo Seiten bestimmet wird, die einen Winkel einschließen. 219.
Der Umkreis eines Dreyecks wird durch zween Winkel und eine Seite bestimmet. 227.
Ein Dreyeck aus drey gegebenen Seiten zusammen zu setzen. 231.
Verschiedene Aufgaben von gleichen Linien und Winkeln. 236.
Wie die Parallellinien entstehen, und deren Eigenschaften. 244.
Von den Winkeln der geradelinichten Figuren. 257.
Wie die Seiten der Dreyecke durch die ihnen entgegen gesetzte Winkel bestimmet werden. 266.

Fünf=

Inhalt.

Fünfter Abschnitt.

Von geraden Linien und Winkeln bey den Cirkelkreisen.

Erstere Eigenschaften der Cirkel. S. 275.
Von den Sehnen der Cirkel. 280.
Gerade Linien, welche einen Cirkel berühren. 289.
Von den Winkeln gewisser Sehnen und Berührungslinien. 292.
Beschreibung der regulären Figuren. 300.
Von geraden Linien, die den Cirkel schneiden. 311.

Sechster Abschnitt.

Von den Verhältnissen und ihrer Gleichheit.

Grundbegriffe. S. 315.
Welche Verhältnisse einander gleich oder ungleich sind. 325.
Merkmale der Gleichheit der Verhältnisse bey Zahlen und getheilten Größen. 330.
Merkmale, woraus die Gleichheit der Verhältniß ungetheilter Größen geschlossen wird. 340.
Regeln zur Verwandelung der Proportionen. Die erste. 347.
Die zweyte Regel. 348.
Die dritte Regel. 355.
Die vierte Regel. 360.
Zu zwo oder drey Zahlen, die dritte oder vierte Proportionalzahl zu finden. 362.

Siebenter Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

Die Gründe dieser Lehre. S. 368.
Von der Aehnlichkeit der Dreyecke. 376.
Von der Aehnlichkeit der übrigen Figuren. 384.
Von der Aehnlichkeit der Theile der Cirkel. 389.
Die Verhältniß verschiedener geraden Linien, so einen Cirkel schneiden oder berühren. 396.

Achter

Inhalt.

Achter Abschnitt.

Von der Zusammensetzung der Verhältnisse.

Begriffe von der Zusammensetzung der Verhältnisse. S. 406.
Wie die zusammen gesetzten Verhältnisse aus den einfachen zu finden sind. 412.
Die Zahl der Verhältnisse, aus welchen eine andere zusammen zu setzen ist, zu vermindern. 424.
Einige besondere Sätze. 429.
Erläuterung durch Zahlen. 434.

Neunter Abschnitt.

Von der Gleichheit und Verhältniß der Figuren.

Grund dieser Lehre. S. 440.
Gleichheit gewisser Parallelogrammen und Dreyecken. 443.
Die übrige ebene Figuren mit Dreyecken zu vergleichen 447.
Allgemeine Gründe, die Dreyecke und Parallelogrammen mit einander zu vergleichen. 454.
Vergleichung eines Quadrats mit einem andern geradewinklichten Vierecke. 465.
Vergleichung solcher Figuren, die einander ähnlich sind. 471.
Aehnliche Figuren zusammen zu setzen; und eine von der andern abzuziehen. 475.
Einige besondere Sätze und Aufgaben von den geradewinklichten Vierecken. 481.

Zehenter Abschnitt.

Von der Lage gerader Linien und Flächen, in Ansehung anderer Flächen.

Wie zwo Flächen einander schneiden. 491.
Wie die Lage einer Fläche bestimmet wird. 495.
Gerade Linien, so einer Fläche parallel laufen. 498.
Gerade Linien, so auf einer Fläche perpendicular stehen. 502.

Neigung einer Fläche gegen eine andere. 507.
Flächen, deren eine der andern parallel lieget. 511.

Eilfter Abschnitt.

Von den Cörpern und ihren Oberflächen.

Allgemeine Begriffe. S. 516.
Erste Art der Cörper. 519.
Wie ein Cörper der ersten Art mit einem andern solcher Cörper verglichen wird. 525.
Einige besondere Sätze zur Vergleichung der Cörper der ersten Art. 530.
Cörper der zweyten Art. 534.
Wie die Cörper der zweyten Art mit einander verglichen werden. 537.
Cörper der dritten Art. 542.
Vergleichung der Cörper der dritten Art mit den Cörpern der ersten. 546.
Wie zween Cörper der dritten Art mit einander verglichen werden. 550.
Von den regulären Cörpern. 553.
Von den Oberflächen der Cörper. 554.
Oberflächen der geraden Cylinder. 556.
Oberflächen der geraden Kegel. 557.
Oberflächen der Kugeln. 563.

Zwölfter Abschnitt.

Von den Kugelschnitten.

Die Figur dieser Schnitte. S. 568.
Pole der Kugelschnitte. Axe der Kugel. 571.
Kugelschnitte, die einander schief schneiden oder berühren. 576.
Maas des Winkels, welchen zween der grösten Cirkel einer Kugel einschließen. 583.
Solide Ecken. 584.
Sphärische Dreyecke. 588.

Gründe der Gleichheit zweyer dreyseitigen Ecken. 595.
Besondere Eigenschaften der geradewinklichten dreyseitigen Ecken. 603.
Wie die schiefwinklichten dreyseitigen Ecken aus zwoen geradewinklichten entstehen. 609.

Dreyzehenter Abschnitt.

Gründe der Berechnung ausgedehnter Größen.

Einleitung. S. 611.
Gerade Linien durch Zahlen auszudrücken. 613.
Die Winkel durch Zahlen auszudrücken. 615.
Ausmessung der geradelinichten Figuren. 616.
Ausmessung verschiedener Cörper. 621.
Eine Berechnung des Cirkels. 625.
Von der Buchstaben Rechnung. Erklärung der Zeichen. 632.
Vereinigung der Zahlen, so durch Buchstaben angezeiget werden, und deren Subtraction. 639.
Die Producte aus zusammen gesetzten Factoren durch Buchstaben auszudrücken. 641.
Zahlreihen. Die Arithmetische. 648.
Von den geometrischen Zahlreihen. 655.
Geometrische Reihen zu summiren. 657.
Wie oft eine beliebige Zahl von zweyerley Buchstaben versetzet werden könne. 666.
Die Dignitäten einer zweytheiligen Wurzel. 675.
Ein jedes Glied einer geometrischen Reihe zu finden. 679.
Begriffe der Logarithmen. 686.
Gebrauch der Logarithmen. 696.
Von der Berechnung der Logarithmen. 700.
Die logarithmische Linie. 701.
Würkliche Berechnung der Logarithmen. 707.

Vierzehenter Abschnitt.

Berechnung der Cirkel und Winkel.

Ein wichtiger Grundsatz. S. 721.
Berechnung des Umkreises eines Cirkels. 724.

Inhalt.

Verschiedene Berechnungen, die sich auf die Ausmessung des Umkreises eines Cirkels gründen. 731.
Berechnung der Seiten und Winkel der Dreyecke. 736.
Sinus. Cosinus. 737.
Tangenten. 741.
Vorbereitung zur Berechnung der Sinus und Tangenten. 746.
Berechnung der Sinus. 752.
Nähere Gründe der Berechnung zur Seiten und Winkel der Dreyecke. 756.
Würkliche Berechnung der Dreyecke. 758.
Vorbereitung zur Erfindung der Regeln, nach welchen die dreyseitigen Ecken zu berechnen sind. 764.
Regeln zur Berechnung der geradewinklichten dreyseitigen Ecken. 768.
Anwendung dieser Regeln. 772.
Regeln zur Berechnung der dreyseitigen Ecken, deren Winkel schief sind. 776.
Anwendung dieser Regeln. 783.

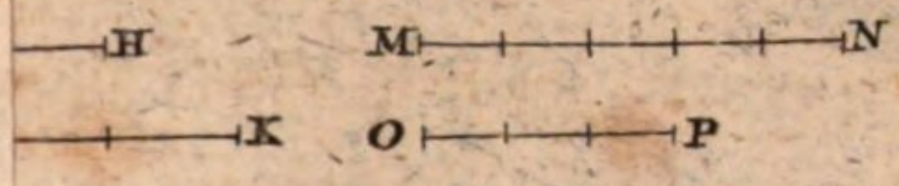
Verbesserungen.

Pag. 632. lin. 13. Erklärung des Zeichens, anstatt Erklärung der Zeichen.

Pag. 634. lin. 16. $aaa + aa$ anstatt $aaa \times aa$.

E N D E.

3

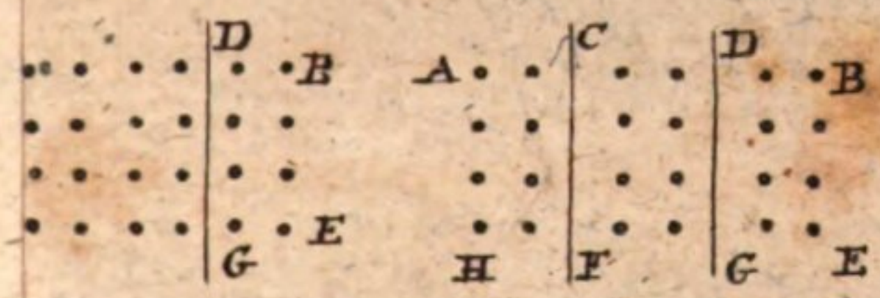


4

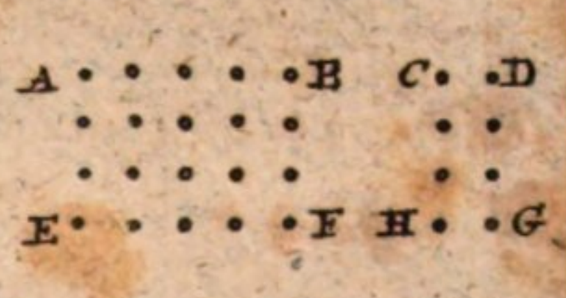
7

8

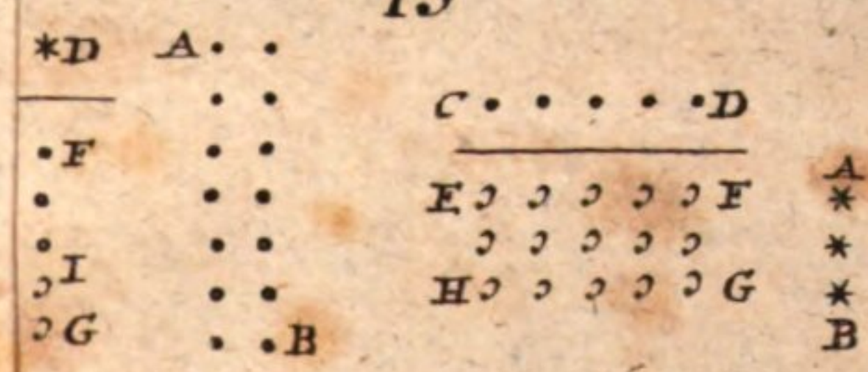
11



12

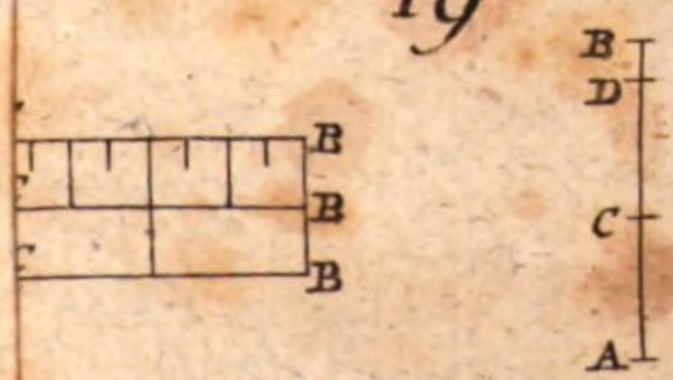


15



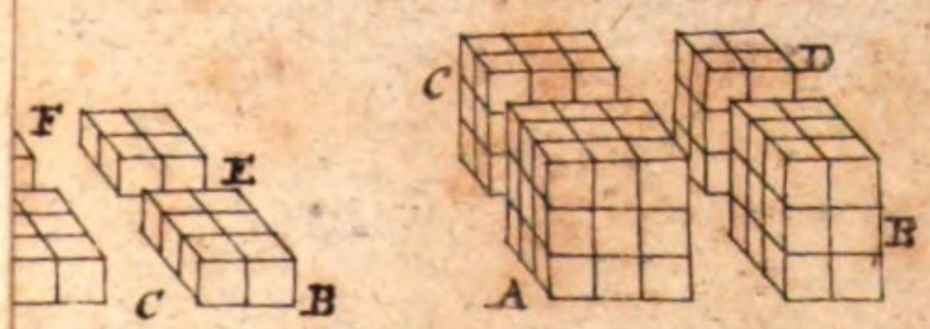
16

19

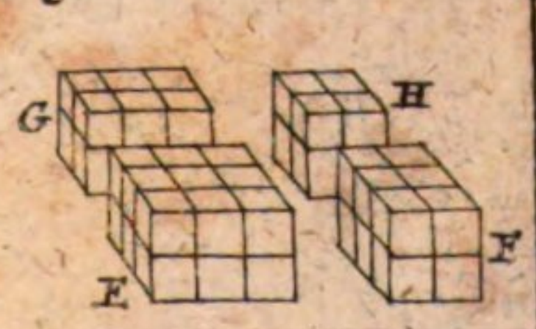


20

23

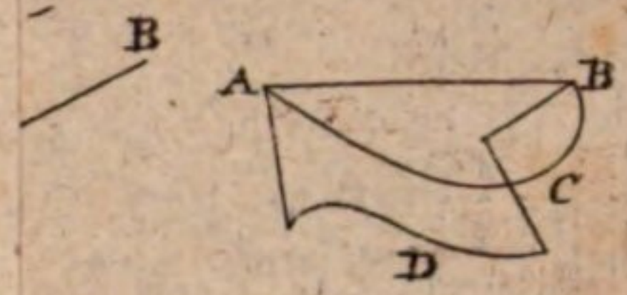


24

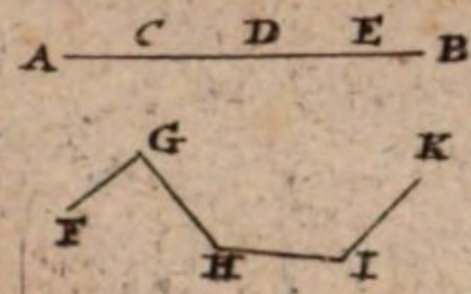


Tab. I.

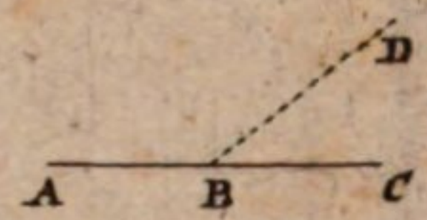
27



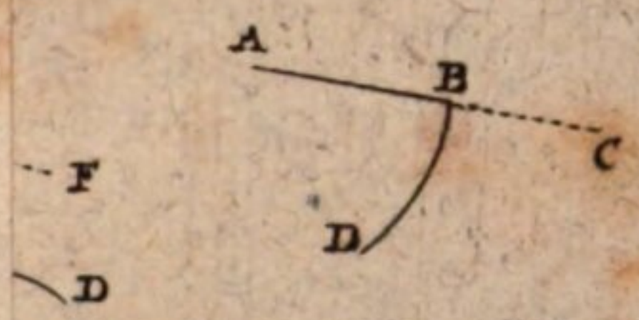
28



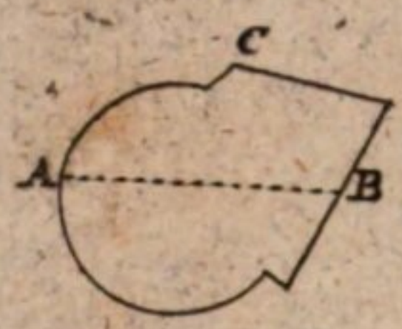
29



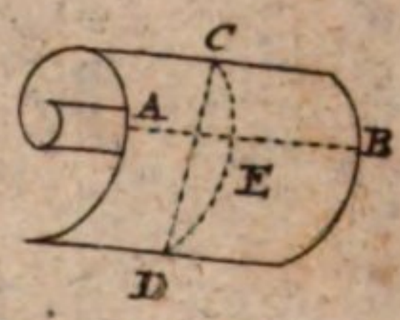
32



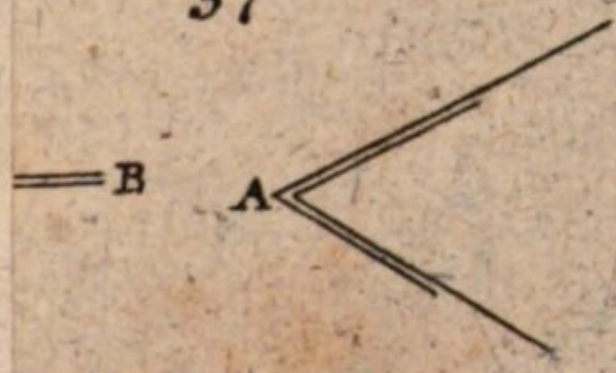
33



34

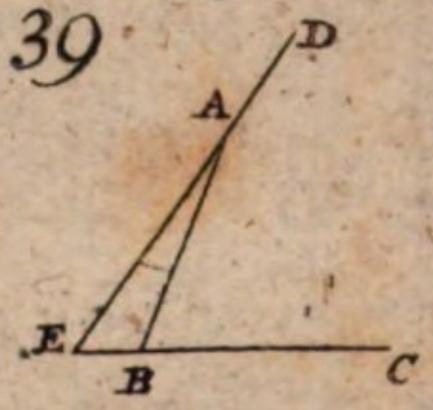


37

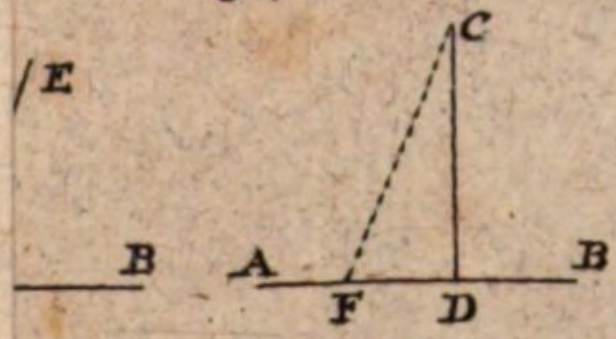


38

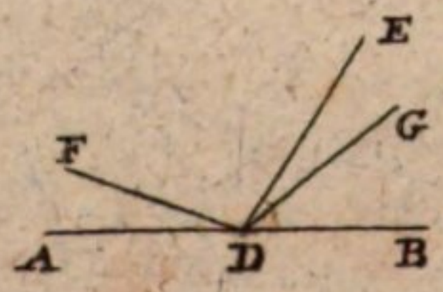
39



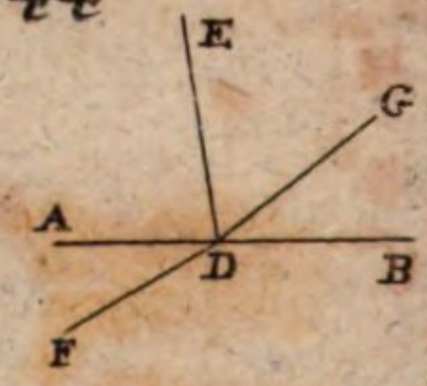
42



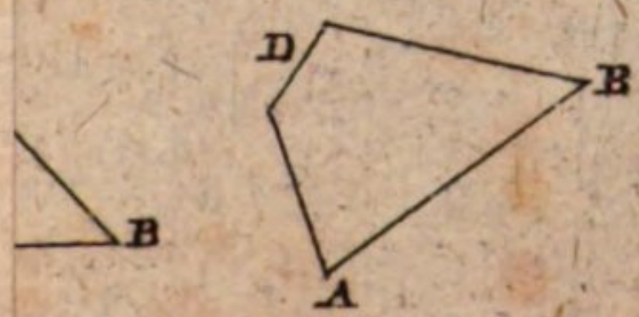
43



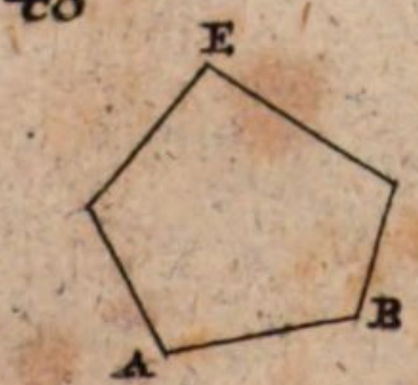
44



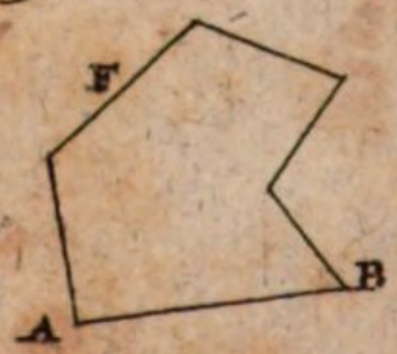
47



48

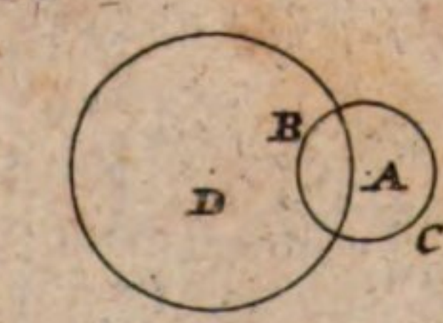


49

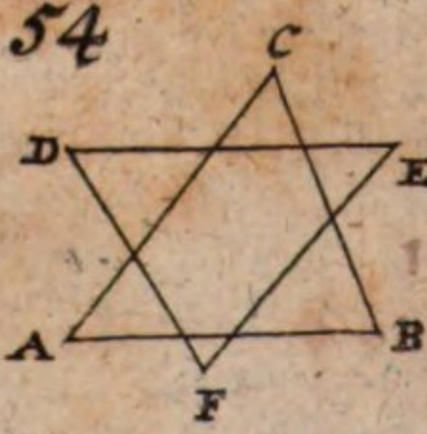


52

53

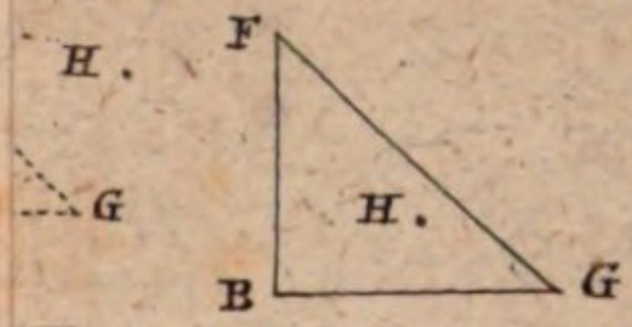


54

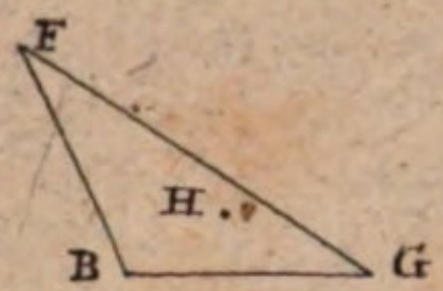


Tab. II.

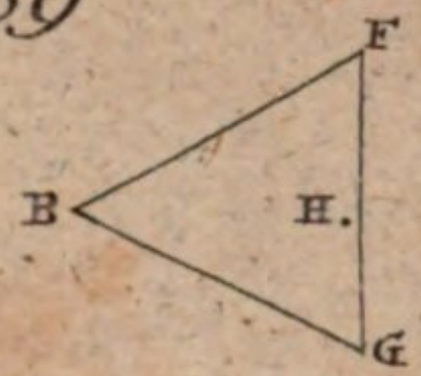
57



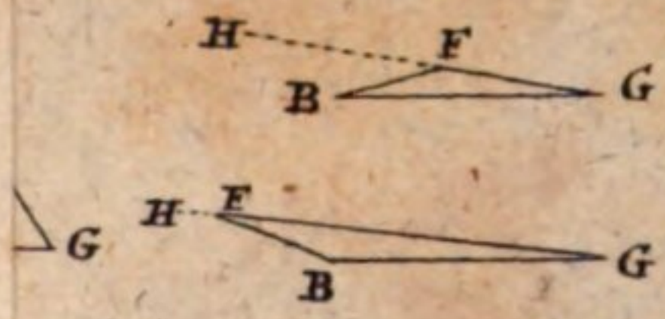
58



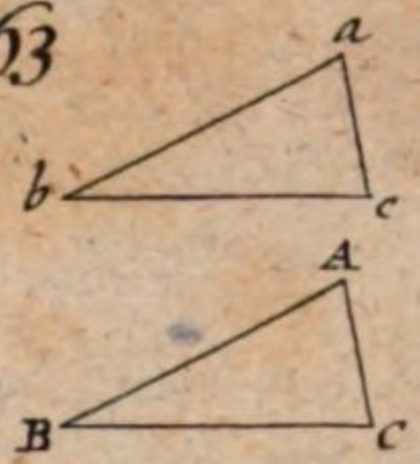
59



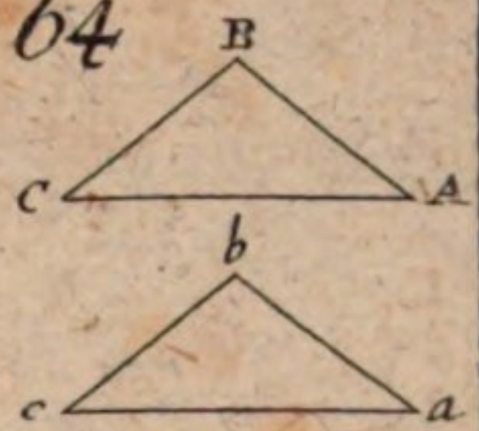
62



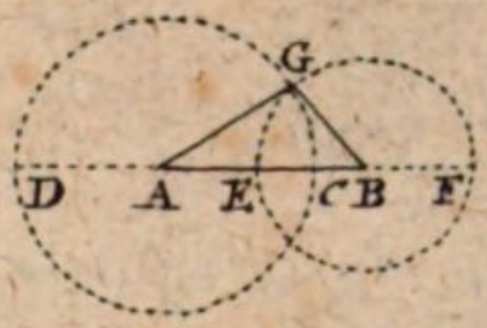
63



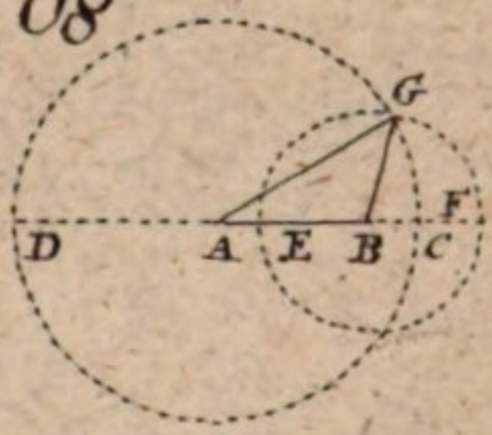
64



67

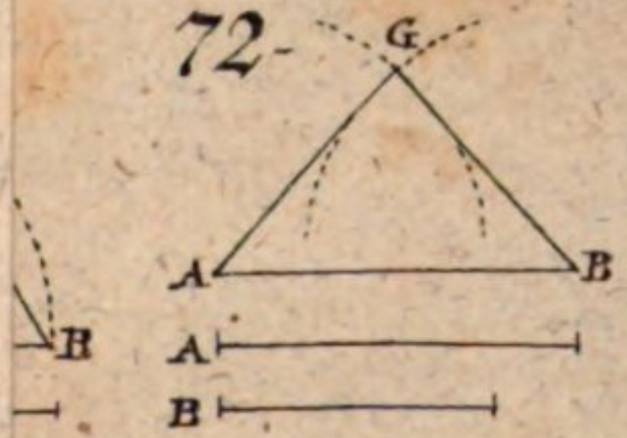


68

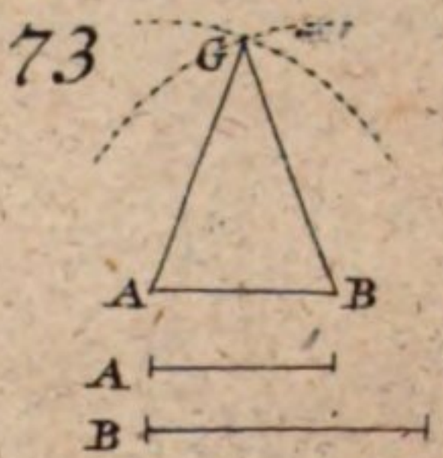


69

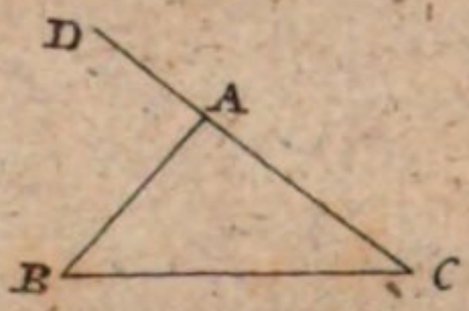
72



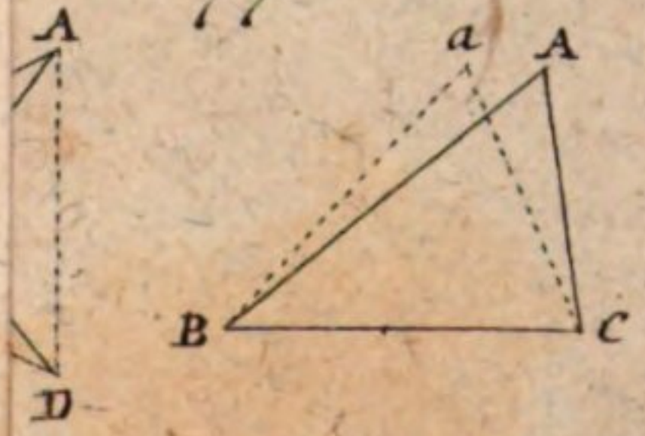
73



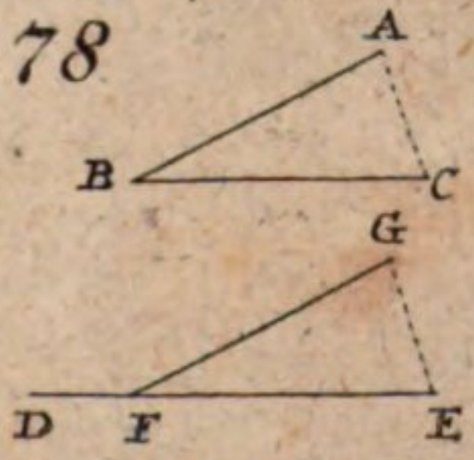
74



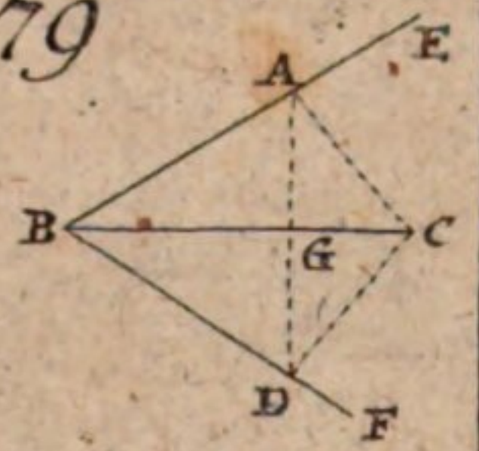
77



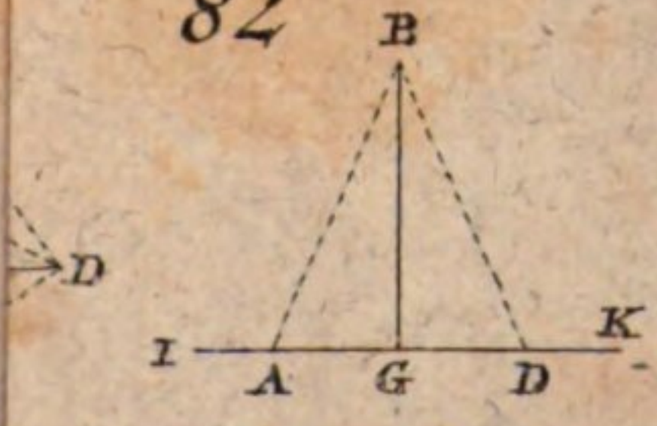
78



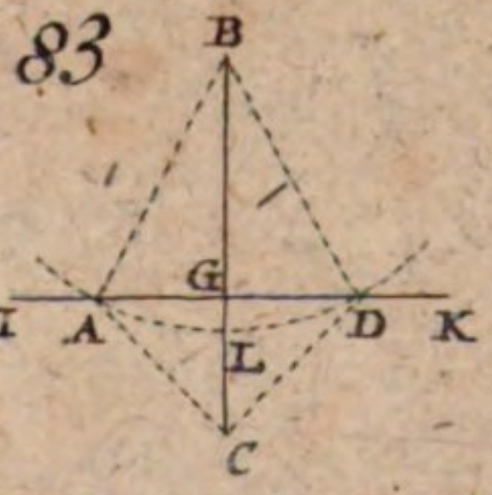
79



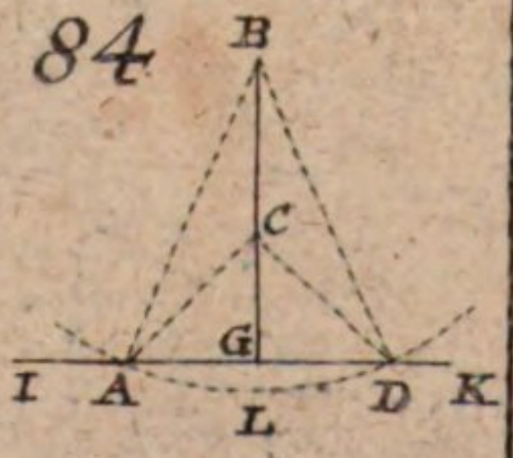
82



83



84



Tab. III.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Segner, Johann Andreas von,

Deutliche und vollständige Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie
Zum Gebrauche derjenigen, welche sich in diesen Wissenschaften durch eigenen Fleiß üben wollen

Lemgo 1767

4 Math.u. 113
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10525764-7
VD18 14547449